

# Beschleunigte Systeme und das Rindler-Universum

Thomas Filk; Universität Freiburg

Das Äquivalenzprinzip besagt im Wesentlichen, dass wir in einem lokalen Bezugssystem nicht zwischen einer konstanten Beschleunigung und einem konstanten Gravitationsfeld unterscheiden können. Wir werden dieses Prinzip in den nächsten Abschnitten ausgiebig nutzen, um den Einfluss von Gravitationsfeldern zu untersuchen und damit erste Schritte zur Allgemeinen Relativitätstheorie zu gehen.

In diesem Kapitel geht es konkret um einen konstant beschleunigten Beobachter in der Speziellen Relativitätstheorie. Viele der Effekte lassen sich dann über das Äquivalenzprinzip auf die Allgemeine Relativitätstheorie übertragen.

## 1 Die konstante Beschleunigung

Schon allein die Frage, was genau unter einer konstanten Beschleunigung zu verstehen ist, bedarf in der Speziellen Relativitätstheorie einer eingehenderen Analyse. Wir können an einem ausgedehnten Körper nicht einfach eine Kraft angreifen lassen, da kein Körper wirklich starr ist - dies würde der Speziellen Relativitätstheorie widersprechen - und sich die Wirkung jeder angreifenden Kraft erst über eine Stoßwelle auf den Körper ausdehnt. Der Einfachheit halber betrachten wir daher zunächst nur einen idealisierten Massepunkt, der konstant beschleunigt werden soll. Doch auch hier ist das Konzept einer konstanten Beschleunigung nicht trivial.

Einerseits befindet sich der beschleunigte Gegenstand zu jedem Zeitpunkt in einem anderen Inertialsystem, andererseits hängt die naheliegende Antwort – eine konstante Beschleunigung bedeutet einen pro Zeiteinheit konstanten Geschwindigkeitszuwachs – vom Bezugssystem ab. Eine invariante Definition des Konzepts einer konstanten Beschleunigung, die wir auch in diesem Kapitel verwenden werden, ist folgende: *Im jeweiligen momentanen Inertialsystem des beschleunigten Massepunktes ist die Beschleunigung konstant.* Damit ist gemeint, dass es in jedem Augenblick ein Inertialsystem gibt, das dieselbe Geschwindigkeit wie der beschleunigte Beobachter hat (natürlich ändert sich dieses Inertialsystem ständig); von diesem „momentanen Inertialsystem“ aus betrachtet erfährt der beschleunigte Beobachter einen konstanten Geschwindigkeitszuwachs.

In diesem Abschnitt betrachten wir die Bewegung eines konstant beschleunigten Massepunktes von einem Inertialsystem aus, in dem der Massepunkt zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  ruht. Zunächst leiten wir die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit – gemessen in diesem Inertialsystem – her, anschließend lösen wir diese Gleichung und bestimmen die Bahnkurve  $x(t)$  für diesen Massepunkt.

### 1.1 Herleitung der Differentialgleichung für die Geschwindigkeit

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit im Inertialsystem des zu Beginn ruhenden Teilchens lautet:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g \left( 1 - \frac{v(t)^2}{c^2} \right)^{3/2}. \quad (1)$$

Diese Gleichung werden wir im nächsten Abschnitt lösen, doch zunächst wollen wir sie auf zwei verschiedene Weisen ableiten.

In dem Ruhesystem des Massepunktes zu einem bestimmten Zeitpunkt ( $t$  im Inertialsystem des anfänglichen Ruhezustands,  $\tau$  im Bezugssystem des beschleunigten Massepunktes) soll eine Kraft

wirken, die ihn in der infinitesimalen Eigenzeit  $d\tau$  immer auf dieselbe infinitesimale Geschwindigkeit  $dv$  beschleunigt:

$$dv = g d\tau, \quad (2)$$

wobei  $g$  ein Maß für die konstante Beschleunigung ist.

Im anfänglichen Ruhesystem, d.h. bezüglich der Zeit  $t$ , nimmt die Geschwindigkeit also zu einem Zeitpunkt  $t$  um

$$dv = g \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (3)$$

zu. Hierbei wurde die Beziehung  $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$  zwischen der Eigenzeit  $\tau$  und der Zeit  $t$  in einem (momentanen) Inertialsystem verwendet.

Hat für den ruhenden Beobachter das beschleunigte System zum Zeitpunkt  $t$  die Geschwindigkeit  $v(t)$ , so hat es zum Zeitpunkt  $t + dt$  nach dem Geschwindigkeitsadditionstheorem (vgl. Gl. 21) die Geschwindigkeit:

$$v(t + dt) = \frac{v(t) + dv}{1 + \frac{v(t)dv}{c^2}} \approx v(t) + \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right) dv + \dots \quad (4)$$

$$= v(t) + g \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{3/2} dt + \dots \quad (5)$$

Daraus erhalten wir unmittelbar Gl. 1.

Die zweite Herleitung der Differentialgleichung geht von der allgemeinen Beziehung für das Transformationsgesetz der Beschleunigung zwischen zwei Bezugssystemen aus. Wenn die Beschleunigung in dieselbe Richtung wie die Transformation erfolgt, gilt:

$$a' = \gamma^3 a. \quad (6)$$

Mit  $a' = g$  und  $a = \frac{dv}{dt}$  folgt obige Differentialgleichung.

## 1.2 Bestimmung der Bahnkurve

Wir können die Differentialgleichung 1 beispielsweise durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = g dt. \quad (7)$$

Da

$$\frac{d}{dv} \left( \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (8)$$

und wir für  $t_0 = 0$  die Anfangsbedingung  $v = 0$  gesetzt haben, erhalten wir

$$\frac{v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = gt. \quad (9)$$

Diese Gleichung können wir nach  $v(t)$  auflösen und finden:

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}}}. \quad (10)$$

Für  $t \ll c/g$  nimmt  $v(t)$  offensichtlich linear mit  $t$  zu, wie es in der nicht-relativistischen Mechanik für die konstante Beschleunigung gelten muss, für  $t \gg c/g$  nähert sich  $v(t)$  der Lichtgeschwindigkeit  $c$  als der Grenzggeschwindigkeit.<sup>1</sup>

Wir können diese Gleichung nochmals integrieren und erhalten die Trajektorie  $x(t)$ :

$$x(t) = \int_0^t \frac{gt'}{\sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}}} dt' = \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}} \Big|_0^t \quad (11)$$

$$= \frac{c^2}{g} \left( \sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}} - 1 \right). \quad (12)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir die Lösungen für  $v(t)$  und  $x(t)$  etwas genauer untersuchen. Zum Abschluss dieses Abschnitts möchte ich noch eine kurze Anmerkung zu der relativistischen Bewegungsgleichung machen:

Multiplizieren wir Gleichung 9 auf beiden Seiten mit der Konstanten  $m$  (der Ruhemasse des Teilchens) und bilden die Ableitung nach  $t$ , so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} \right) = mg, \quad (13)$$

was wir mit dem relativistischen Impuls

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (14)$$

auch in der Form

$$\frac{dp}{dt} = mg = F \quad (15)$$

schreiben können. Dies ist die relativistische Bewegungsgleichung (auch für eine allgemeine Kraft  $F$ ) und aus ihr hätten wir die Bewegungsgleichung für die konstante Beschleunigung durch Umkehrung der obigen Schritte sofort ableiten können. Es mag allerdings zunächst überraschen, dass auf der linken Seite der Gleichung die Ableitung nach  $t$  und nicht nach der Eigenzeit  $\tau$  im beschleunigten System steht. Es sieht daher zunächst so aus, als ob diese Gleichung nicht invariant sei. Doch die relativistische Kraft ist eigentlich nicht  $F$  sondern  $\gamma F$  und die invariante Gleichung lautet

$$\frac{dp}{d\tau} = \gamma F. \quad (16)$$

Da

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dp}{dt} \gamma, \quad (17)$$

hebt sich der  $\gamma$ -Faktor auf beiden Seiten weg.

### 1.3 Erste Analyse der konstant beschleunigten Bewegung

Wir untersuchen zunächst die Trajektorie aus der Sichtweise des ruhenden Beobachters (im Ruhesystem der Ausgangslage des beschleunigten Systems). Anschließend betrachten wir die Situation aus der Sichtweise eines Beobachters in dem konstant beschleunigten System (beispielsweise einer konstant beschleunigten Rakete).

---

<sup>1</sup>Für die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  entspricht die Zeitskala  $c/g \approx 354$  Tage bzw. fast einem Jahr. Ab dieser zeitlichen Größenordnung lohnt sich eine Weltraumreise mit konstanter Beschleunigung.

Die Trajektorie der konstanten relativistischen Beschleunigung im Inertialsystem der anfänglichen Ruhelage beschreibt einen Hyperbelast (siehe Abb. 1). Dies sieht man leicht, wenn man Gl. 12 in folgende Form bringt:

$$\left(x(t) + \frac{c^2}{g}\right)^2 - \frac{(gt)^2}{c^2} = 1. \quad (18)$$

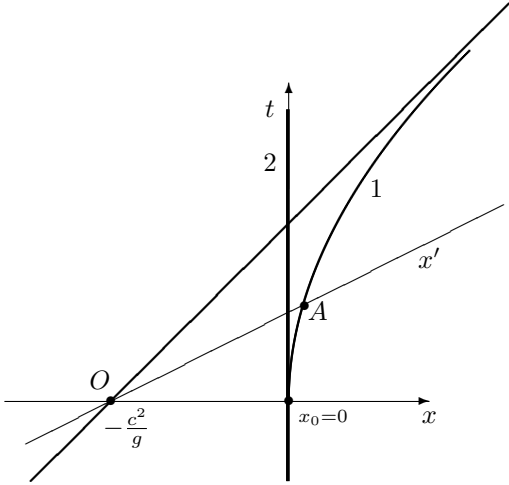


Abbildung 1: Die konstante Beschleunigung. Die Trajektorie eines konstant beschleunigten Massenpunktes (1) beschreibt im Inertialsystem eines ruhenden Beobachters (2) eine Hyperbel. Bei dem Ereignis  $O$  mit den Koordinaten  $x = -\frac{c^2}{g}$  und  $t_0 = 0$  schneiden sich alle Gleichzeitigkeitlinien der Trajektorie einschließlich der Weltlinie des Lichtstrahls, dem sich die Trajektorie asymptotisch nähert.

Für kleine Werte von  $t$  (genauer  $t \ll \frac{c}{g}$ ) beschreibt die Trajektorie die zu erwartende Parabel der Newton'schen Mechanik. Dazu entwickeln wir die Lösung nach kleinen Werten von  $(tg)/c$ :

$$x(t) \approx \frac{c^2}{g} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{g^2 t^2}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{g^4 t^4}{c^4} + \dots - 1\right) = \frac{1}{2} g t^2 + \dots \quad (19)$$

Für sehr große Werte von  $t$  nähert sich die Trajektorie immer mehr dem Lichtstrahl  $x(t) = ct$ . Dieses Verhalten zeigt sich auch in der Geschwindigkeit (Gl. 10), die für kleine Werte von  $t$  linear zunimmt,  $v(t) \approx gt + \dots$ , und sich für große Werte von  $t$  der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Interessant ist, dass sich alle Gleichzeitigkeitlinien zu der Trajektorie in einem Ereignis  $O$  bei  $t = 0$  und  $x = -\frac{c^2}{g}$  schneiden (in Abb. 1 ist die Gleichzeitigkeitlinie zum Ereignis  $A$  angegeben). Dies ist gleichzeitig das Ereignis, bei dem ein ausgesandter Lichtstrahl die Asymptote der Hyperbel bildet. Der Abstand, gemessen in einem augenblicklichen Inertialsystem, zwischen einem Punkt auf der Hyperbelbahn (z.B. dem Ereignis  $A$ ) und diesem Ereignis  $O$  bleibt konstant.

Wir betrachten nun dieselbe Situation, allerdings aus der Sichtweise eines Beobachters in dem konstant beschleunigten System (man denke beispielsweise an eine Rakete, die konstant beschleunigt wird). Zunächst müssen wir die Zeit  $t$  in die Eigenzeit  $\tau$  des beschleunigten Beobachters umrechnen. Dazu verwenden wir die allgemeine Beziehung

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (20)$$

und nutzen nun aus, dass

$$\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}}}. \quad (21)$$

Diese Beziehung folgt unmittelbar aus den beiden Gleichungen 9 und 10. Wir erhalten somit

$$\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}}} dt' = \frac{c}{g} \sinh^{-1} \frac{gt}{c} \quad (22)$$

oder, aufgelöst nach  $t$ :

$$t = \frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c}. \quad (23)$$

Zwischen der verstrichenen Zeit  $t$  eines Beobachters im anfänglichen Ruhesystem (beispielsweise auf der Erde) und der Zeit  $\tau$  für einen Beobachter in dem konstant beschleunigten System besteht also für große Zeiten eine exponentielle Beziehung. Für die relativ zum anfänglichen Ruhesystem zurückgelegte Strecke als Funktion der Eigenzeit einer Person in dem beschleunigten System erhalten wir

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left( \cosh \frac{g\tau}{c} - 1 \right). \quad (24)$$

Diese Beziehung scheint zunächst den Möglichkeiten eines bemannten Raumflugs sehr entgegen zu kommen: Für die Reise zum rund 2 Millionen Lichtjahre entfernten Andromeda-Nebel (der nächsten großen Galaxie außerhalb der Milchstraße) würden bei einer konstanten Beschleunigung von  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  (der Erdbeschleunigung) für einen Astronauten in seinem Bezugssystem nur rund 28 Jahre vergehen.<sup>2</sup>

Dies widerspricht nicht der Relativitätstheorie: Die 2 Millionen Lichtjahre erfahren für den Beobachter in der Rakete eine (Lorentz-)Kontraktion auf weniger als 28 Lichtjahre. Das bedeutet aber, dieser Beobachter „sieht“ den Andromeda-Nebel mit Überlichtgeschwindigkeit auf sich zukommen.

Einen ähnlich erstaunlichen Effekt sieht der Beobachter auch, wenn er zurückblickt. Das Ereignis  $O$  bei  $(t = 0, x = -\frac{c^2}{g})$  bleibt für immer auf seiner Gleichzeitigkeitlinie. Es wird zu einem Augenblick, der nie vergeht. Auch der Abstand zwischen ihm und diesem Ereignis bleibt in seinem Bezugssystem immer konstant. Allerdings sollte nochmals betont werden, dass sich diese Effekte auf ein augenblickliches globales Inertialsystem beziehen, und dies lässt sich für einen beschleunigten Beobachter nicht operational realisieren.

In Abschnitt 3 kommen wir nochmals auf den konstant beschleunigten Beobachter zu sprechen und beschreiben dort, was der Beobachter wirklich „sieht“.

## 2 Zwei konstant beschleunigte Systeme

Die bekannte Schriftensammlung „Speakable and unspeakable in quantum mechanics“ von John Bell ([2], Kapitel 9) enthält auch einen Artikel, der nichts mit Quantentheorie zu tun hat. Er trägt den Titel „How to teach special relativity“, und hier plädiert Bell dafür, Studierende der Physik auch mit der „alten“ Version der Speziellen Relativitätstheorie vertraut zu machen, wie sie von Larmor, Lorentz und Poincaré vertreten wurde und wie sie in Kapitel [Philosophischer Hintergrund der SRT](#) angedeutet wurde. Er beschreibt dort eine einfache Situation aus der Speziellen Relativitätstheorie, die seiner Ansicht nach in der „alten“ Sichtweise leichter nachvollzogen werden kann als in der Form, in der die Relativitätstheorie heute meist gelehrt wird.

Zwei gleichartige Raketen befinden sich zunächst in Ruhe und haben einen Abstand  $L$  (in diesem Ruhesystem haben sie die Koordinaten  $x_1 = 0$  und  $x_2 = L$ ). Sie seien durch ein Seil der Länge  $L$  miteinander verbunden. Ab dem Zeitpunkt  $t = 0$  erfahren beide Raketen dieselbe konstante Beschleunigung  $g$  in Richtung ihres Abstandsvektors (also die  $x$ -Richtung). Ihre Weltlinien sind somit Hyperbeln, deren Abstand im anfänglichen Ruhesystem (mit den Koordinaten  $(t, x)$ ) konstant bleibt (vgl. Abb. 2).

Bell stellt nun die Frage, ob das Seil zwischen den beiden Raketen irgendwann reißt. Ein solches Ereignis ist eine physikalische Tatsache und hängt daher nicht vom Bezugssystem ab. Anschein-

<sup>2</sup>Auf der Internetseite von John Baez [1] findet man eine sehr schöne Beschreibung der seltsamen Effekte einer konstant beschleunigten relativistischen Rakete.

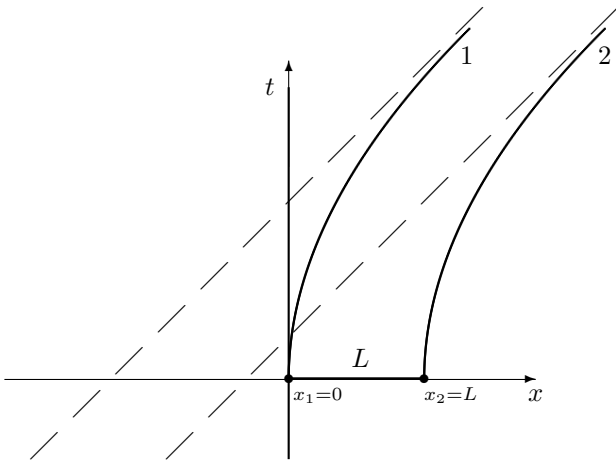


Abbildung 2: Zwei Raketen (1 und 2) erfahren dieselbe konstante Beschleunigung. Sie seien durch ein Seil miteinander verbunden, dessen Länge gerade dem anfänglichen Abstand  $L$  der Raketen entspricht. Wird das Seil reißen oder nicht?

nend hat er diese Frage in den 70er Jahren mehreren Physikern am CERN gestellt und sehr unterschiedliche Antworten erhalten (viele scheinen behauptet zu haben, das Seil reiße nicht). Tatsächlich reißt das Seil. Wir betrachten nun diese Situation aus allen drei Bezugssystemen – dem Inertialsystem, in dem die Raketen anfänglich in Ruhe sind, sowie den beiden Bezugssystemen der Raketen.

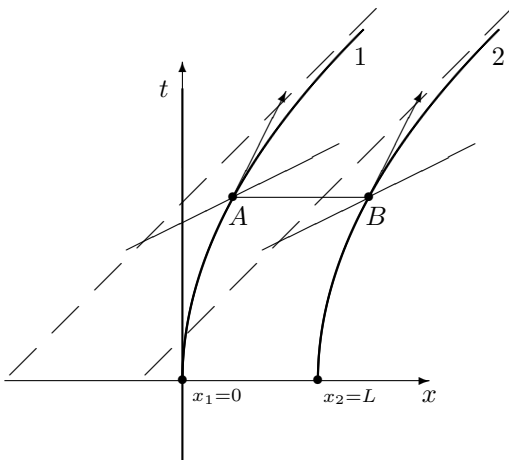


Abbildung 3: Die beiden Ereignisse  $A$  und  $B$  sind im ruhenden Inertialsystem gleichzeitig. Auch die Eigenzeiten der beiden Raketen sind bei diesen Ereignissen gleich. Der räumliche Abstand der Ereignisse ist  $L$ .

Wir beginnen unsere Betrachtungen im ruhenden Inertialsystem mit den Koordinaten  $(t,x)$ . Zwei in diesem System gleichzeitige Positionen der Raketen (z.B.  $A$  und  $B$ ) haben immer noch den räumlichen Abstand  $L$  (vgl. Abb. 3). Trotzdem bewegt sich das Seil mit einer bestimmten Geschwindigkeit relativ zu dem Ruhesystem (angedeutet durch die Vektorpfeile in Abb. 3). Damit sind die Ereignisse  $A$  und  $B$  für das Seil auch nicht gleichzeitig (auch die Gleichzeitigkeitslinien zu den beiden Ereignissen sind in der Abbildung angedeutet). Da sich das Seil bewegt, kommt es zu einer Lorentz-Kontraktion und das Seil wird reißen.

Bell bemerkt, dass damals viele Physiker in der Lorentz-Kontraktion nur eine scheinbare Verkürzung von Abständen sahen, weil man eine Länge aus verschiedenen Systemen mit unterschiedlichen Gleichzeitigkeitsvorstellungen ausmisst. Doch das Reißen des Seils ist eine Tatsache, kein „Scheineffekt“. Hier, so argumentiert er, gibt die Lorentz'sche Vorstellung einer tatsächlichen Verkürzung ein besseres Bild: Die Reichweite der elektromagnetischen Kräfte, die das Seil zusammenhalten, wird (ähnlich wie die Solitonen bei unserer linearen, gekoppelten Kette) kürzer, doch die

Atome müssen, da sie zwischen den Raketen eingespannt sind, ihren Abstand behalten. Irgendwann wird die Reichweite der Kräfte so klein, dass die Atome nicht mehr zusammengehalten werden können und das Seil reißt.

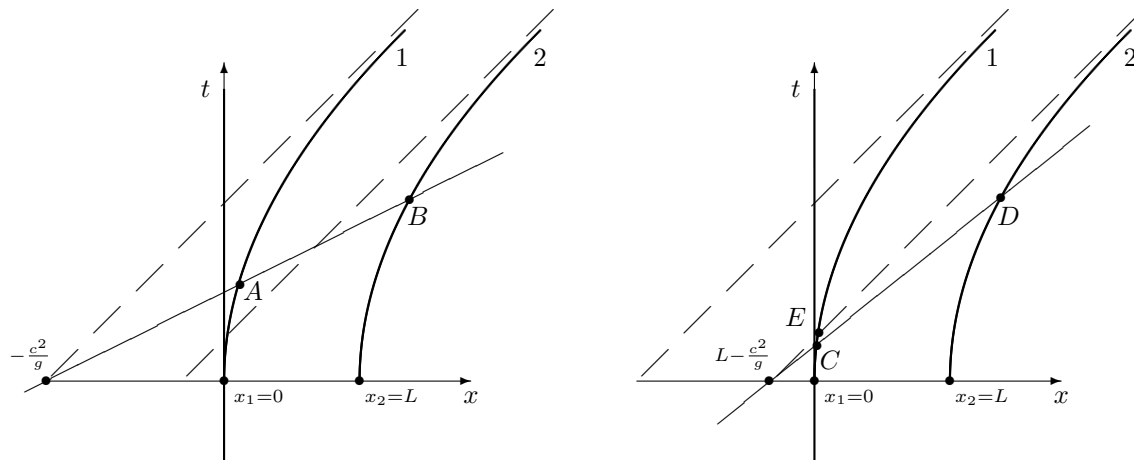


Abbildung 4: Die Gleichzeitigkeitslinien für die beiden Raketen. (Links) Ereignis  $A$  befindet sich auf der Weltlinie von Rakete 1. In dem augenblicklichen Inertialsystem ist Ereignis  $B$  auf der Weltlinie von Rakete 2 gleichzeitig zu  $A$ . Doch bei  $B$  hat Rakete 2 bereits eine größere Geschwindigkeit als Rakete 1 bei Ereignis  $A$ , sodass der Abstand von Rakete 2 aus Sicht von Rakete 1 zunimmt. (Rechts)  $D$  ist ein Ereignis auf der Weltlinie von Rakete 2 und in dem augenblicklichen Inertialsystem ist Ereignis  $C$  auf der Weltlinie von Rakete 1 gleichzeitig zu  $D$ . Doch nicht nur ist die Geschwindigkeit von Rakete 1 bei  $C$  sehr viel langsamer als die von Rakete 2 bei  $D$ , sodass der Abstand zwischen den beiden Raketen aus der Sicht von Rakete 2 zunimmt, sondern Rakete 2 sieht Rakete 1 auch nie zu dem Ereignis  $E$  gelangen. Für Rakete 2 endet die Weltlinie von Rakete 1 an diesem Punkt.

Wir betrachten nun die Situation aus dem Bezugssystem von Rakete 1, also der hinteren Rakete bezüglich der Beschleunigungsrichtung (Abb. 4 (links)). Zu einem beliebigen Ereignis  $A$  auf der Weltlinie dieser Rakete kann der Beobachter in der Rakete zumindest mathematisch seine augenblickliche Gleichzeitigkeitslinie konstruieren (er kann sie nicht im Sinne einer Einstein-Synchronisation operational realisieren): Das sind alle Ereignisse zu Vektoren, die bezüglich der Minkowski-Metrik senkrecht auf dem augenblicklichen 4-Vektor der Geschwindigkeit bzw. der augenblicklichen Tangente an die Weltlinie stehen. Danach ist Ereignis  $B$  auf der Weltlinie von Rakete 2 gleichzeitig zu Ereignis  $A$  (für Rakete 1). Doch bei  $B$  bewegt sich Rakete 2 bereits wesentlich schneller als Rakete 1 bei  $A$ . Das bedeutet, für Rakete 1 nimmt der Abstand zu Rakete 2 ständig zu. Somit wird das Seil auch irgendwann reißen.

Abschließend betrachten wir dieselbe Situation noch aus dem Bezugssystem von Rakete 2 (Abb. 4 (rechts)).  $D$  sei ein beliebiges Ereignis auf dieser Weltlinie, und ähnlich wie zuvor konstruiert der Beobachter in dieser Rakete die Gleichzeitigkeitslinie zu diesem Ereignis. Er findet, dass in diesem augenblicklichen Inertialsystem Ereignis  $C$  auf der Weltlinie von Rakete 1 gleichzeitig zu  $D$  ist. Doch bei  $C$  bewegt sich Rakete 1 wesentlich langsamer als Rakete 2 bei  $D$ , daher nimmt auch in seinem Bezugssystem der Abstand zu Rakete 1 zu und das Seil wird reißen.

Wir beobachten hier aber noch etwas Weiteres: Alle Gleichzeitigkeitslinien zur Weltlinie von Rakete 2 liegen (bei  $x$ -Koordinaten größer als  $L - \frac{c^2}{g}$ ) unterhalb des Lichtstrahls, der zur Asymptote der Bahnkurve von 2 wird. Das bedeutet, für Rakete 2 wird Rakete 1 niemals weiter als bis zu dem Ereignis  $E$  auf diesem Lichtstrahl gelangen, Rakete 1 wird dieses Ereignis *aus der Sichtweise von*

*Rakete 2* noch nicht einmal erreichen.

Im nächsten Abschnitt gehen wir auf diesen letztgenannten Punkt nochmals ein. Jedenfalls sind sich alle drei Beobachter darin einig, dass das Seil nach den physikalischen Gesetzen in ihrem Bezugssystem reißen muss. Man sollte aber in jedem Fall berücksichtigen, dass die Konstruktion einer „augenblicklichen Gleichzeitigkeitsfläche“ bei beschleunigten Weltlinien rein mathematische ist und sich physikalisch nicht realisieren lässt. Bei einem „ewigen“ Inertialsystem ist eine solche Konstruktion zumindest im Prinzip operational möglich.

### 3 Das Rindler-Universum

Wir haben gesehen, wie sich im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie bereits einige sehr interessante Effekte in der Physik eines konstant beschleunigten Beobachters untersuchen lassen. Dabei haben wir allerdings von globalen Gleichzeitigkeitslinien Gebrauch gemacht, die für einen Beobachter entlang einer Weltlinie nicht unbedingt von Relevanz sind. Beispielsweise kann bei beschleunigten Systemen die Folge solcher Gleichzeitigkeitslinien, selbst wenn sie entlang der Weltlinie in kausaler Reihenfolge konstruiert werden, Ereignisse in großem Abstand (hier definiert  $d = \frac{c^2}{g}$  die Skala) in kausal rückläufiger Reihenfolge überstreichen (man betrachte beispielsweise Ereignisse, die in Abb. 1 links von Ereignis  $O$  liegen). Aus diesem Grunde verwendet man auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie solche globalen Gleichzeitigkeitslinien – in  $2+1$  Raumzeit-Dimensionen sind es natürlich Flächen und in  $3+1$  Raumzeit-Dimensionen Volumina – nur selten.

In diesem Abschnitt soll nochmals der konstant beschleunigte Beobachter betrachtet werden, allerdings mit den Methoden, die wir später bei verallgemeinerten Geometrien in der Allgemeinen Relativitätstheorie verwenden werden: (1) durch Angabe der kausalen Beziehungen und (2) durch die Untersuchung von Signalen, die zwischen Beobachtern auf verschiedenen Weltlinien ausgetauscht werden können. Die Raumzeit eines solchen konstant beschleunigten Beobachters bezeichnet man auch als Rindler-Universum. Aufgrund des Äquivalenzprinzips lassen sich viele der beobachteten Effekte qualitativ (und in manchen Einzelheiten sogar quantitativ) auf einen Beobachter in der Nähe eines schwarzen Loches übertragen. Von besonderer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang das Konzept eines „Horizonts“.

#### 3.1 Kausale Beziehungen

Wie wir in Abschnitt 1.2 gezeigt haben, lässt sich im Raumzeit-Diagramm eines inertialen Beobachters  $B$  die Weltlinie eines konstant beschleunigten Beobachters  $A$  als Hyperbel darstellen. In diesem Abschnitt betrachten wir eine Weltlinie zu einem System, das seit „ewigen Zeiten“ einer konstanten Beschleunigung unterlag und auch für ewige Zeiten dieser Beschleunigung unterliegen wird (vgl. Abb. 5). Das System kommt also aus dem Unendlichen auf den inertialen Beobachter  $B$  zu und wird dabei konstant abgebremst bis es schließlich für einen Augenblick relativ zu dem inertialen Beobachter in Ruhe ist und sich nun mit derselben Beschleunigung wieder von dem inertialen Beobachter entfernt.

Der Minkowski-Raum des inertialen Beobachters  $B$  lässt sich durch die kausale Relationen der Ereignisse zu dem beschleunigten Beobachter  $A$  in vier Klassen einteilen:

- I Dieser Bereich enthält alle Ereignisse, die irgendwann einmal in der kausalen Zukunft des Beobachters  $A$  lagen und gleichzeitig irgendwann einmal in der kausalen Vergangenheit von  $A$  sein werden. Jedes der Ereignisse konnte von  $A$  einmal beeinflusst werden und kann umgekehrt einmal einen Einfluss auf  $A$  haben. Dieser Bereich entspricht also im üblichen Sinne der kausalen Raumzeit für Beobachter  $A$ .



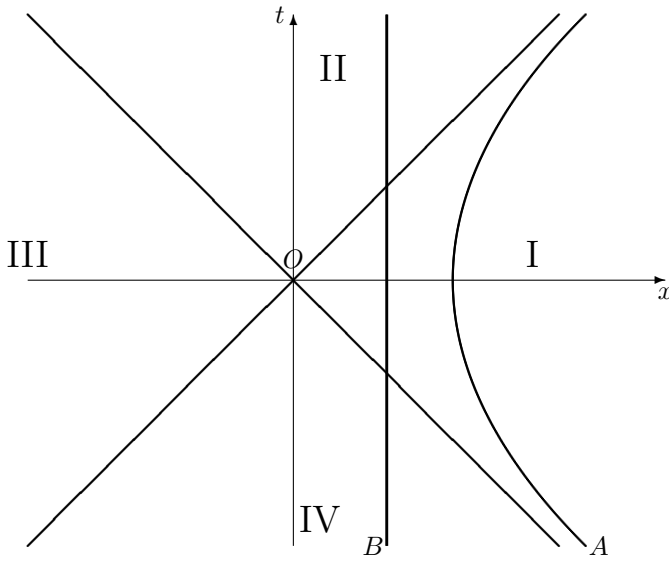


Abbildung 5: Rindler-Universum. Dargestellt sind die Weltlinien eines konstant beschleunigten Beobachters  $A$  und eines inertialen Beobachters  $B$ . Die Hyperbelbahn von Beobachter  $A$  definiert die angegebenen Lichtstrahlen sowie das Ereignis  $O$ . Die Quadranten I–IV stehen jeweils in einer besonderen kausalen Beziehung zu Beobachter  $A$ .

- II Dieser Bereich enthält alle Ereignisse, die in der kausalen Zukunft von Ereignissen auf der Weltlinie von  $A$  liegen, aber nicht in der kausalen Vergangenheit irgendeines Ereignisses auf der Weltlinie von  $A$ . Der Beobachter  $A$  kann diesen Bereich also nicht „einsehen“ bzw. er kann von den Ereignissen in diesem Bereich nie kausal beeinflusst werden, er kann aber umgekehrt die Ereignisse in diesem Bereich kausal beeinflussen.
- III Die Ereignisse in diesem Bereich haben keinen kausalen Zusammenhang – weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit – zu irgendeinem Ereignis auf der Weltlinie von Beobachter  $A$ .
- IV Alle Ereignisse in diesem Bereich liegen irgendwann einmal in der kausalen Vergangenheit von  $A$ , waren aber niemals in seiner kausalen Zukunft.  $A$  kann von diesen Ereignissen also kausal beeinflusst werden, hat aber umgekehrt keinen Einfluss auf sie.

Hinsichtlich der Kausalbeziehungen ist für den beschleunigten Beobachter  $A$  die Ereignismenge in Bereich I so, wie für einen inertialen Beobachter die Ereignismenge der Minkowski-Raum-Zeit: Zu jedem Ereignis gibt es auf seiner Weltlinie einen Zeitpunkt in der Vergangenheit, *vor* dem dieses Ereignis in seiner kausalen Zukunft lag, es kann also durch diesen Beobachter beeinflusst werden. Ebenso gibt es zu jedem Ereignis einen Zeitpunkt, *ab* dem der Beobachter in der kausalen Zukunft des Ereignisses liegt, d.h. dieses Ereignis wahrnehmen bzw. von ihm Kenntnis erlangen kann.

Alle anderen Bereiche haben für einen inertialen Beobachter in einer Minkowski-Raum-Zeit kein Gegenstück. Die Ereignisse in den Bereichen III und IV liegen beispielsweise niemals in der kausalen Zukunft von  $A$ . Der beschleunigte Beobachter hat somit auch keine Möglichkeit, diese Ereignisse jemals zu beeinflussen. Allerdings kann er die Ereignisse aus Bereich IV wahrnehmen bzw. kausal von ihnen beeinflusst werden, da er sich irgendwann in der kausalen Zukunft von diesen Ereignissen befinden wird. Der Bereich III gehört zu einem Teil des Universums, der mit  $A$  überhaupt keine kausale Verbindung hat, weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit. In gewisser Hinsicht existiert dieser Bereich für den beschleunigten Beobachter  $A$  gar nicht. Die Ereignisse von Bereich II können zwar von  $A$  beeinflusst werden, allerdings kann  $A$  diesen Bereich ebenfalls nie einsehen.

### 3.2 Was „sehen“ die Beobachter voneinander?

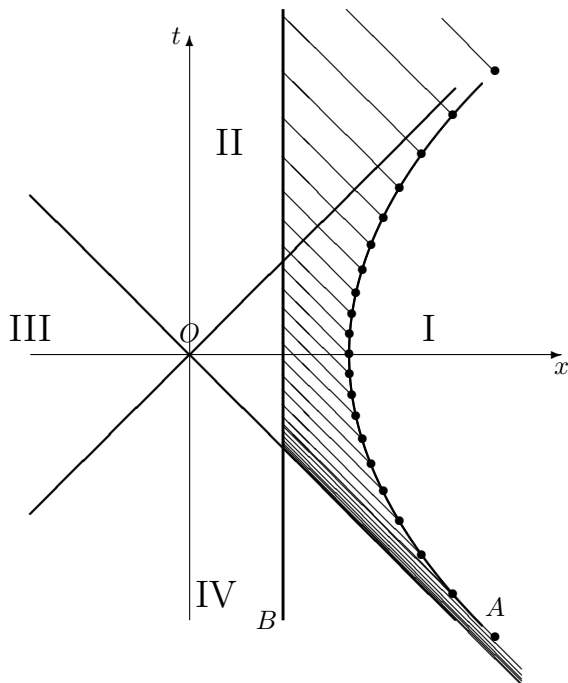


Abbildung 6: Was sieht der inertielle Beobachter  $B$  von dem beschleunigten Beobachter  $A$ ? In regelmäßigen Eigenzeitabständen (Ereignisse auf der Weltlinie von  $A$ , gekennzeichnet durch „•“) sendet der beschleunigte Beobachter Signale aus.  $B$  empfängt diese Signale in seinem System in unterschiedlichen Zeitabständen.

Wir überlegen uns zunächst, was der inertielle Beobachter  $B$  von dem beschleunigten Beobachter  $A$  „sieht“. In Abbildung 6 sind beide Weltlinien dargestellt, zusätzlich sind in gleichmäßigen Eigenzeitabständen von  $A$  Ereignisse markiert, bei denen  $A$  ein Lichtsignal zu Beobachter  $B$  aussendet.

Solange  $B$  sich in Bereich IV befindet, hat er keinerlei Kenntnisse von  $A$ . Erst beim Überschreiten der Grenze zwischen Bereich IV zu Bereich I „erfährt“ Beobachter  $B$  von  $A$ . Das geschieht allerdings gleich sehr heftig: Innerhalb einer beliebig kurzen Zeit nimmt Beobachter  $B$  eine unendliche Zeitspanne in der Vergangenheit von Beobachter  $A$  wahr.

Hinsichtlich seiner Wahrnehmung sieht Beobachter  $B$  den beschleunigten Beobachter  $A$  in einer beliebig kurzen Zeit eine unendliche Strecke auf ihn zukommen. Diese scheinbare Wahrnehmung widerspricht natürlich nicht der Aussage, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit darstellt. Da Beobachter  $B$  in beliebig kurzer Zeit eine unendliche Vergangenheit von  $A$  wahrnimmt, sind die eintreffenden Lichtwellen auch unendlich blau-verschoben. In gewisser Hinsicht ist dieses Ereignis für Beobachter  $B$  wie eine Singularität.

Solange sich der inertielle Beobachter  $B$  im Bereich I befindet, kann er mit dem beschleunigten Beobachter  $A$  Information austauschen. Für Beobachter  $B$  ändert sich auch nicht viel, wenn er in den Bereich II tritt. Für ihn hat die Grenze zwischen Bereich I und II keinerlei Bedeutung und er hat an dieser Grenze auch keine besondere Wahrnehmung. Er kann den beschleunigten Beobachter  $A$  bis in eine beliebige Zukunft weiter beobachten. Allerdings werden die Zeitabstände zwischen Signalen, die  $A$  in gleichen Eigenzeitabständen aussendet, für  $B$  immer größer. Der inertielle Beobachter  $B$  sieht also den beschleunigten Beobachter  $A$  immer stärker rot-verschoben. Diese Rotverschiebung entspricht im Wesentlichen dem Doppler-Effekt eines sich zunehmend rasch entfernenden Senders.

Nun untersuchen wir, was der beschleunigte Beobachter  $A$  von dem inertialen Beobachter  $B$  sieht. In Abb. 7 sind wieder die beiden Weltlinien dargestellt, diesmal sendet aber  $B$  in regelmäßigen Abständen Lichtsignale aus. Auf der Weltlinie von  $A$  sind in äquidistanten Eigenzeitabständen Er-

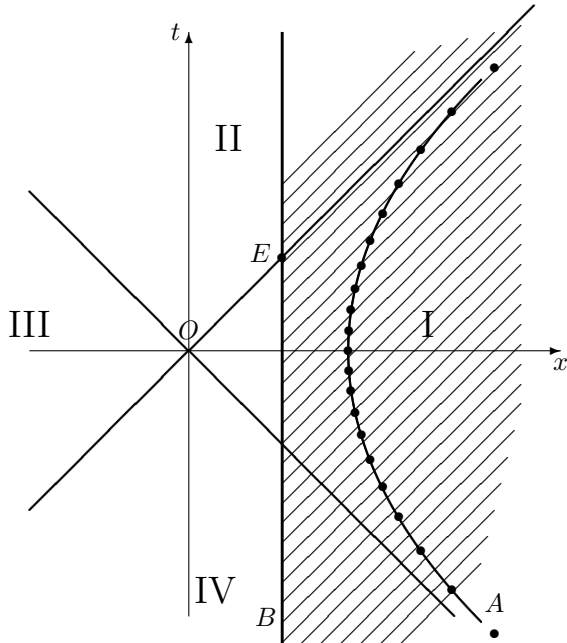


Abbildung 7: Was sieht der beschleunigte Beobachter  $A$  von dem inertialen Beobachter  $B$ ? Nun sendet  $B$  in regelmäßigen Eigenzeitabständen Signale aus, die  $A$  empfängt. Wegen der unterschiedlichen relativen Geschwindigkeit sowie zusätzlich den unterschiedlichen Skalen für die Eigenzeiten von  $A$  relativ zu  $B$  (Ereignisse in gleichen Eigenzeitabständen wurden auf der Weltlinie von  $A$  wieder gekennzeichnet) empfängt auch  $A$  die Signale in unterschiedlichen Zeitabständen.

eignispunkte eingetragen – der Eigenzeitabstand entspricht dem zeitlichen Abstand, mit dem  $B$  die Lichtsignale abschickt.

In beliebig ferner Vergangenheit kann  $A$  den Beobachter  $B$  schon wahrnehmen, allerdings treffen die Lichtsignale bezüglich seiner Eigenzeit sehr viel rascher bei ihm ein, sodass er Beobachter  $B$  blau-verschoben wahrnimmt, wiederum wie bei einem Doppler-Effekt. Je weiter man in die Vergangenheit von  $A$  zurückgeht, umso blauverschobener sieht  $A$  den inertialen Beobachter  $B$ . Sobald  $B$  auch in den Bereich  $I$  eingedrungen ist, können  $A$  und  $B$  Signale austauschen und sich gegenseitig verständigen.

Wenn die beiden Weltlinien von  $A$  und  $B$  für einen Augenblick parallel sind, sieht  $A$  die Signale von  $B$  mit derselben Frequenz, wie  $B$  sie aussendet. Ab dann empfängt  $A$  die Signale seltener, d.h.  $A$  sieht  $B$  rotverschoben.

Offenbar kann  $A$  keinerlei Signale mehr aus dem Bereich  $II$  empfangen. Das bedeutet, kein Signal, das  $B$  nach dem Ereignis  $E$  verschickt, wird  $A$  jemals erreichen. Für  $A$  endet die Weltlinie von  $B$  an dem Ereignis  $E$ . Der Lichtstrahl, der die Bereiche  $I$  und  $II$  trennt, ist für Beobachter  $A$  ein Horizont, hinter den er nicht blicken kann. Man bezeichnet diesen Horizont auch als *Ereignishorizont*.

Der Beobachter  $A$  sieht den Beobachter  $B$  aber nicht einfach hinter dem Horizont verschwinden. Im Gegenteil: Er kann für alle Zukunft den Beobachter  $B$  wahrnehmen, wie er sich immer mehr dem Horizont bzw. dem Ereignis  $E$  nähert. Die Abstände, mit denen  $A$  aber von  $B$  die in gleichen Zeitabständen ausgesandten Signale erhält, werden immer größer.  $A$  nimmt die Zeit im  $B$ -System immer langsamer wahr. Damit ist eine Rotverschiebung der Strahlung verbunden.  $B$  verschwindet also nicht hinter dem Horizont, sondern  $B$  verschwindet an der Oberfläche des Horizonts im langwelligen Bereich des Spektrums.

Die Grenzen zwischen den Bereichen  $I$  und  $IV$  einerseits und den Bereichen  $I$  und  $II$  andererseits verhalten sich also in gewisser Hinsicht symmetrisch:  $A$  kann die Ereignisse in Bereich  $IV$  wahrnehmen, nicht aber die Ereignisse in Bereich  $II$ . Umgekehrt hat  $B$  keine Kenntnis von  $A$ , solange er sich in Bereich  $IV$  befindet, er nimmt das Schicksal von  $A$  aber durchaus wahr, wenn er sich in Bereich  $II$  befindet.

Der Bereich III gehört zu einem Teil des Universums, der mit  $A$  überhaupt keine kausale Verbindung hat, weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit. In gewisser Hinsicht existiert dieser Bereich für den beschleunigten Beobachter  $A$  gar nicht. Trotzdem ist dieser Bereich für den inertialen Beobachter  $B$  ein ganz normaler Teil seines Universums. Da andererseits  $B$  von diesem Bereich auch erst erfährt, nachdem er den Horizont zwischen I und II durchschritten hat, kann er  $A$  keine Mitteilung davon machen.

## Literatur

- [1] Baez, John; [math.ucr.edu/home/baez](http://math.ucr.edu/home/baez), und speziell für Physik [math.ucr.edu/home/baez/physics](http://math.ucr.edu/home/baez/physics)
- [2] John Bell; *Speakable and Unsayable in Quantum Physics*, 2. edition, Cambridge University Press (2004).