Die Zeitgleichung

Thomas Filk, Universität Freiburg

Die sogenannten *wahren Sonnentage*, hier ist die Zeitdauer von Sonnenhöchststand bis zum nächsten Sonnenhöchststand gemeint, sind nicht immer gleich lang. Dafür sind in erster Linie zwei Einflüsse verantwortlich: die elliptische Form der Erdbahn und die Neigung der Erdachse gegen die Ekliptik, also die Ebene, in der die Erdbahn um die Sonne verläuft. Dies führt zu einer Differenz zwischen der wahren Sonnenzeit (bei der die Sonne um 12 Uhr ihren Höchststand in Richtung Süden erreicht) und der sogenannten mittleren Sonnenzeit, wie sie auf einer gleichmäßig gehenden Uhr angezeigt wird.[1] Diese Differenz, die sogenannte Zeitgleichung, war schon im Altertum bekannt. Die Zeitgleichung $\mathrm{ZG}(t)$ gibt an, wie viele Minuten man zur gemessenen wahren Ortszeit addieren muss, um die gemittelte Ortszeit zu erhalten:

$$\mathrm{ZG}(t) = \text{Mittlere Ortszeit}(t) - \text{Wahre Ortszeit}(t)\,. \tag{1}$$

Sie konnte auf der Basis der Kepler'schen Gesetze Anfang des 16. Jahrhunderts auch theoretisch begründet werden.

In Tabelle 1 sind die wichtigsten Größen zusammengefasst, die in diesem Kapitel benötigt werden.

große Halbachse Erde-Sonne	$a = 149\,598\,023\,\mathrm{km}$
Datum des Perihels	derzeit am (3 ± 2). Januar
Neigung der Erdachse zur Ekliptik	$\varepsilon = 23{,}44^\circ$
numerische Exzentrizität der Erdbahn	$\epsilon = 0{,}0167$
Abstand Erde-Sonne im Perihel	$r_{\mathrm{min}} = 147{,}10 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$
Abstand Erde-Sonne im Aphel	$r_{\mathrm{max}} = 152{,}10 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$
Dauer eines tropischen Jahres	365,24219 Tage

Tabelle 1: Die wichtigsten physikalischen Größen im Zusammenhang mit der Zeitgleichung. Je nach Zusammenhang und erforderlicher Genauigkeit werden die Werte unterschiedlich gerundet.

1 Zeitsysteme

Wie schon erwähnt, entspricht der Sonnenstand, die sogenannte wahre Sonnenzeit, im Allgemeinen nicht dem, was man als Ortszeit bezeichnet. Zum einen hat es sich als sinnvoll erwiesen, sogenannte Zeitzonen zu definieren, innerhalb deren die Zeitsysteme gleich sind, zum anderen ist der scheinbare Gang der Sonne am Himmel nicht vollkommen gleichförmig.

1.1 Zeitzonen

Die wahre Sonnenzeit an einem bestimmten Ort auf der Erde ist definiert durch den Sonnenhöchststand, der den Zeitpunkt 12 Uhr festlegt. Auf der nördlichen Halbkugel (nördlich des 23,5.

[1] Hinzu kommt noch, dass die Ortszeit heute nicht mehr die wahre Ortszeit ist, sondern einer Zeitzone zugeteilt wurde. Je nach Längengrad, an dem sich ein Ort befindet, muss zur lokalen Zeit entsprechend der Zeitzone noch ein Korrekturterm hinzugefügt werden werden. Diese Korrektur wird in Abschnitt 1.2 kurz erwähnt und ansonsten nicht berücksichtigt.

Breitengrads) befindet sich die Sonne in diesem Augenblick genau im Süden, auf der südlichen Halbkugel (südlich des $-23{,}5$. Breitengrads) ist sie im Norden.[2] Etwas anders ausgedrückt handelt es sich bei 12 Uhr mittags (wahre Sonnenzeit) um den Augenblick, an dem die Verbindungslinie Erdmittelpunkt-Sonnenmittelpunkt den Längengrad des jeweiligen Orts schneidet. Ein wahrer Sonnentag ist dann der Zeitraum von einem Sonnenhöchststand zum nächsten Sonnenhöchststand.

Die wahre Uhrzeit (bezüglich der Sonne) hängt vom Längengrad eines Orts ab. Aus diesem Grund ist eine solche Zeitrechnung sehr kompliziert, da sie lokal von Ort zu Ort verschieden sein kann. Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts war das tatsächlich der Fall: Jede größere Stadt hatte ihre eigene Ortszeit. Insbesondere als Folge des zunehmenden Eisenbahnverkehrs wurde ein solches System jedoch zu umständlich, und so wurde per Erlass im Jahre 1893 in Deutschland als gesetzliche Zeit die Zeit am 15. Längengrad eingeführt. Diese Zeit bezeichnet man allgemein auch als „Mitteleuropäische Zeit (MEZ)“, da sie in den meisten europäischen Ländern gilt.

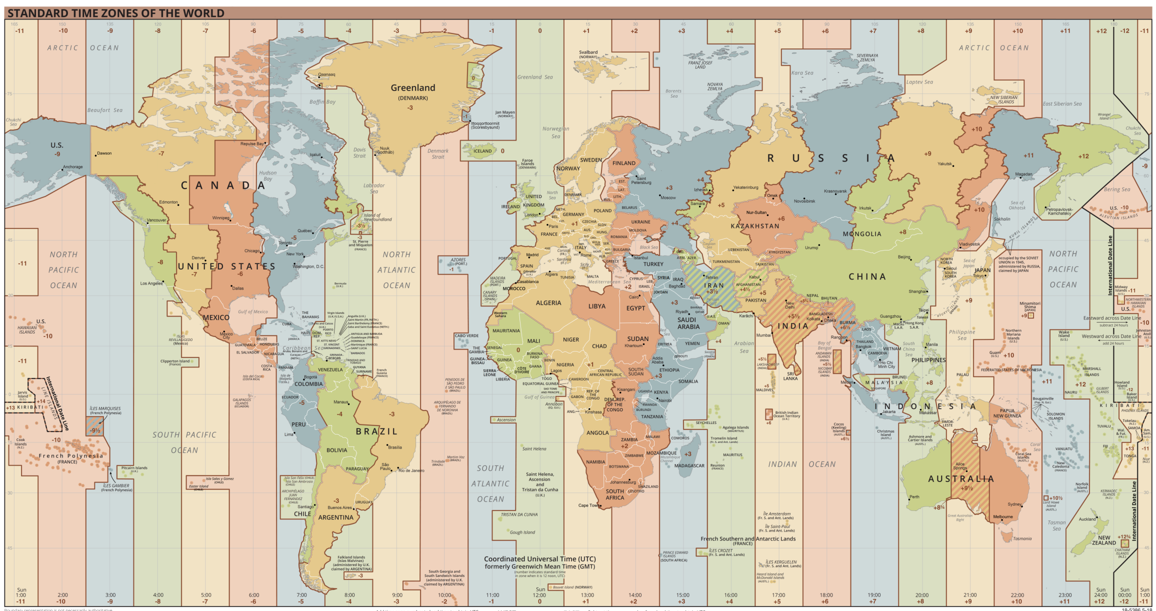

Abbildung 1: Die Zeitzonen der verschiedenen Länder. (aus [7])

Die Erdkugel ist in 24 Zeitzonen eingeteilt (Abb. 1), jede Zeitzone umfasst somit $360/24 = 15$ Längengrade. Befindet sich ein Ort nicht auf dem Längengrad seiner Zeitzone, muss man pro Längengraddifferenz 4 Minuten addieren bzw. subtrahieren, je nachdem ob sich der Ort westlich oder östlich von dem Längengrad seiner Zeitzone befindet. Die Mitteleuropäische Zeit, die in Deutschland und den meisten westeuropäischen Kontinentalgebieten (außer Portugal) gültig ist, hat ihren Längengrad bei 15° Ost. Das ist nahe des östlichsten Punkts der deutschen Grenze. Selbst Frankfurt an der Oder liegt noch etwas weiter westlich. Freiburg liegt beim Längengrad 7,85°, also 7,15° westlich vom 15. Längengrad. Dementsprechen muss man zur MEZ rund 28,6 Minuten addieren, um die wahre Ortszeit zu erhalten (in der Sommerzeit nochmals eine Stunde mehr). Der Sonnenhöchstand im Sommer in Freiburg ist gegen 13:30.

[2] Zwischen diesen Breitengraden kann die Sonne zu diesem Zeitpunkt je nach Jahreszeit im Norden oder Süden stehen. In jedem Fall entspricht ihre Lage einem Extrempunkt bezüglich des Winkels über dem Horizont.

1.2 Wahrer und mittlerer Sonnentag

Unabhängig von den bisher erwähnten Korrekturen, die zur Bestimmung der lokalen Ortszeit notwendig sind, kann der wahre Sonnentag, also die Zeitdauer zwischen zwei Sonnenhöchstständen an einem Ort, im Laufe eines Jahres um bis zu fast einer halben Minute schwanken, was sich zu manchen Zeiten kumulativ bis zu einer Viertelstunde aufaddieren kann. Die beiden Hauptursachen dafür - die elliptische Bahn der Erde und die Neigung der Erdachse relativ zur Ekliptik - werden in den Abschnitten 3 und 4 besprochen. Aus diesem Grund definiert man einen mittleren Sonnentag als die Dauer eines Tages, sodass ein Jahr genau 365,2422 mittlere Sonnentage hat. Dies hat jedoch zur Folge, dass eine Uhr, welche die Uhrzeit nach dem mittleren Sonnentag anzeigt, nicht mit einer Uhr übereinstimmt, welche die wahre Sonnenzeit anzeigt, also z.B. eine Sonnenuhr. Manche Sonnenuhren berücksichtigen diese Effekte, indem die Stundenlinien die Form eines sogenannten Analemmas haben (Abschnitt 6.2).

2 Zur Mathematik einer elliptischen Bahnkurve

Es gibt zwei bekannte Definitionen einer Ellipse: (1) als die Menge aller Punkte, bei denen die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, den Brennpunkten der Ellipse, konstant ist, und (2) als Schnitt eines Kegelmantels mit einer Ebene. Dass die Lösungen des Zwei-Körper-Kepler-Problems (also das Zwei-Körper-Problem mit einem Potenzial proportional zu $1/r$) Kegelschnitte sind, ist ebenfalls bekannt. Die gebundenen Lösungen bilden dabei Ellipsen, wobei der Kreis ein Spezialfall einer Ellipse ist.

Die sogenannte *lineare Exzentrizität* e einer Ellipse ist gleich dem Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse zu einem der Brennpunkte. Sie hat die Dimension einer Länge. Die *numerische Exzentrizität* ϵ ist gleich dem Verhältnis von e zur großen Halbachse a und ist somit dimensionslos (vgl. Abb. 2, links):

$$\epsilon = \frac{e}{a} \,. \tag{2}$$

Außerdem gilt

$$2a = r_{\text{max}} + r_{\text{min}} \qquad \text{und} \qquad 2e = r_{\text{max}} - r_{\text{min}} \,, \tag{3}$$

wobei r_{max} der maximale Abstand zwischen einem Brennpunkt und der Ellipse ist (also der Abstand zwischen einem Brennpunkt und dem gegenüberliegenden Punkt der Ellipse) und r_{min} der minimale Abstand. Bei der Erdumlaufbahn um die Sonne bezeichnet man den Punkt mit dem maximalen Abstand zur Sonne als Aphel, den Punkt mit dem minimalen Abstand als Perihel.[3]

Aus den Gleichungen 2 und 3 folgt

$$\epsilon = \frac{r_{\text{max}} - r_{\text{min}}}{r_{\text{max}} + r_{\text{min}}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{r_{\text{min}}}{r_{\text{max}}} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \,. \tag{4}$$

Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz („In gleichen Zeiten werden gleiche Flächen überstrichen“) folgt, dass sich die Geschwindigkeiten im Perihel (dem sonnennächsten Punkt), v_{max}, zur Geschwindigkeit im Aphel (dem sonnenfernsten Punkt), v_{min}, wie die Abstände der Bahn zur Sonne verhalten (siehe Abb. 2, rechts):

$$\frac{v_{\text{min}}}{v_{\text{max}}} = \frac{r_{\text{min}}}{r_{\text{max}}} \,. \tag{5}$$

Das zweite Kepler'sche Gesetz ist äquivalent zur Drehimpulserhaltung.(Herleitung)

[3] Bei der Mondbahn um die Erde bezeichnet man den Punkt der Mondbahn mit dem größten Abstand zur Erde als Apogäum und den Punkt mit dem kleinsten Abstand als Perigäum.

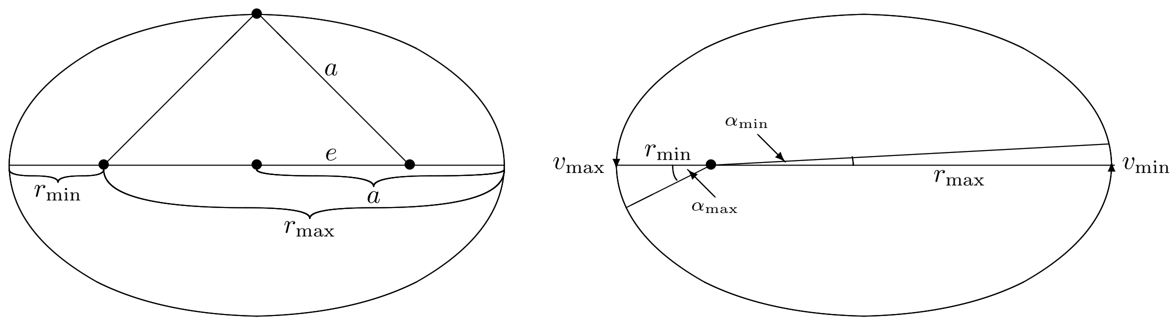

Abbildung 2: (links) Die geometrischen Größen in einer Ellipse: a (große Halbachse), e (Exzentrizität), r_{min} und r_{max} (kleinster und größter Abstand der Ellipse zu einem Brennpunkt); (rechts) die dynamischen Größen in einer Ellipse: v_{min} und v_{max} (kleinste und größte Geschwindigkeit eines umlaufenden Objekts), α_{max} und α_{min} (in gleichen Zeiten überstrichene Winkel im Perihel und Aphel).

Für die Winkel im Perihel α_{max} und Aphel α_{min}, die in gleichen Zeiten überstrichen werden, bedeutet dies:

$$\frac{\alpha_{\text{min}}}{\alpha_{\text{max}}} = \left(\frac{v_{\text{min}}}{r_{\text{max}}}\right) \Big/ \left(\frac{v_{\text{max}}}{r_{\text{min}}}\right) = \left(\frac{r_{\text{min}}}{r_{\text{max}}}\right)^2 . \tag{6}$$

3 Der Einfluss der elliptischen Bahnkurve

In diesem Abschnitt vernachlässigen wir die Neigung der Erdachse zur Ekliptik (diesen Effekt berücksichtigen wir im nächsten Abschnitt) und nehmen an, die Rotationsachse der Erde sei senkrecht zu ihrer Bahnebene.

Würde sich die Erde auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegen, wäre der Winkel, den sie auf ihrer Bahn um die Sonne täglich überstreicht, immer derselbe. Wir bezeichnen diesen Winkel mit α_0. Sein Wert berechnet sich aus der Tatsache, dass ein Jahr rund 365,2422 Tage dauert und in dieser Zeit ein Winkel von 360° überstrichen wird:

$$\alpha_0 = \frac{360^\circ}{365{,}2422\,\mathrm{d}} = 0{,}98565^\circ/\mathrm{d}\,. \tag{7}$$

Die Erde dreht sich in 24 Stunden einmal um ihre Achse von Sonnenhöhststand zu Sonnenhöchstand. Dabei überstreicht sie einen Winkel von $360^\circ + \alpha$. Der zusätzliche Winkel α rührt daher, dass sich die Erde im Verlauf eines Tages auf ihrer Bahn weiter um die Sonne bewegt hat, und sich somit die Sonne relativ zur Erde um den Winkel α weiterbewegt hat. Auf einer Kreisbahn wäre dieser Winkel $\alpha = \alpha_0$. Um sich um diesen Winkel α zu drehen, benötigt sie ungefähr 4 Minuten.[4] Um diese Zeit ist der ideale Sonnentag länger als der siderische Tag (der sich auf eine Umdrehung relativ zum Fixsternhimmel bezieht).

Tatsächlich bewegt die Erde sich aber auf einer elliptischen Bahn und ihre Winkelgeschwindigkeit ist im Perihel größer als im Aphel. Das bedeutet, dass an einem Tag in Perihelnähe (dieser Tag liegt derzeit um den 3. Januar) ein größerer Winkel von ihr relativ zur Sonne überstrichen wird als an einem Tag im Aphel (rund 3. Juli). Für die Zeitabhängigkeit dieses Winkels können wir folgenden Ansatz machen

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left(1 + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) , \tag{8}$$

[4] Da sich die Erde in 24 Stunden um rund 360° dreht, dreht sie sich in einer Stunde um 15° und somit in 4 Minuten um 1°.

wobei T die Periodendauer der Erdbahn um die Sonne ist - also ein Jahr - und die Zeit t am Perihel beginnen soll (also $\alpha(t=0)=\alpha_{\max}$). Nach Gl. 6 besteht folgende Beziehung zwischen der Amplitude A und der Exzentrizität ϵ:

$$\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}} = \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^2 \approx 1+4\epsilon\,. \tag{9}$$

Andererseits gilt nach Gl. 8:

$$\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}} = \frac{\alpha(0)}{\alpha(T/2)} = \frac{\alpha_0(1+A)}{\alpha_0(1-A)} \approx 1+2A\,. \tag{10}$$

Wir erhalten somit die Beziehung $A=2\epsilon$.

Für die Winkelgeschwindigkeit der Eigendrehung der Erde können wir nach obiger Argumentation schreiben:

$$\omega = \frac{360^\circ + \alpha_0}{86400\,\mathrm{s}}\,. \tag{11}$$

Andererseits ist die Zeitdauer $T(\alpha)$, die die Erde benötigt, um sich um den Winkel α zu drehen, gegeben durch

$$T(\alpha) = \frac{\alpha}{\omega}\,, \tag{12}$$

und damit dauert ein Tag (in Abhängigkeit von der Jahreszeit t):

$$T(t) = \frac{360^\circ + \alpha(t)}{\omega} = \left(\frac{360^\circ + \alpha_0(1+2\epsilon\cos\frac{2\pi}{T}t)}{360^\circ+\alpha_0}\right) T_0 \tag{13}$$

$$= T_0 + 2\alpha_0\epsilon\frac{\cos\frac{2\pi}{T}t}{360^\circ+\alpha_0}T_0\,, \tag{14}$$

wobei $T_0 = 86\,400\,\mathrm{s}$ einem mittleren Sonnentag entspricht. Die Zeitdifferenz zwischen einem mittleren Sonnentag und dem tatsächlichen Sonnentag ist somit

$$\Delta T(t) = T(t) - T_0 = 2\alpha_0\epsilon\frac{\cos\frac{2\pi}{T}t}{360^\circ+\alpha_0}T_0\,. \tag{15}$$

Setzen wir Werte ein, so erhalten wir für die Amplitude dieser Schwankung:

$$\Delta T = 2\alpha_0\epsilon\frac{1}{360^\circ+\alpha_0}86400\,\mathrm{s} \approx 7{,}88\,\mathrm{s}\,. \tag{16}$$

Um diesen Wert kann ein einzelner Tag also länger oder kürzer sein als ein mittlerer Sonnentag (sofern man nur die elliptische Bahn der Erde berücksichtigt). Ein solcher Effekt für sich genommen wäre vermutlich im Altertum noch nicht aufgefallen, wäre dieser Effekt nicht kumulativ, d.h., wenn viele aufeinanderfolgende Tage um ähnliche Werte zu lang oder zu kurz sind, addieren sich die Effekte auf. Je nach Jahreszeit geht die tatsächliche Zeit der gemittelten Zeit voraus bzw. nach. Relevant für die Zeitgleichung ist dieser kumulative Effekt, d.h. die Differenz zwischen der wahren Zeit, die an einem Ort am Stand der Sonne abgelesen wird, und der gemittelten Zeit, die eine Uhr anzeigt.

Bilden wir von Gl. 15 die Summe, erhalten wir:

$$\mathrm{ZG}_1(t) = \sum_{t'=0}^{t} \Delta T(t') \approx \frac{T}{2\pi}\Delta T \sin\frac{2\pi}{T}t\,. \tag{17}$$

Hierbei verläuft die Summe über die Tage t vom Perihel gerechnet und T ist die Dauer eines Jahres in Tagen (also $T = 365{,}2422$). Die Summe selbst wurde durch ein Integral approximiert. Die Amplitude dieser periodischen Funktion ist schon beträchtlich höher: Sie beträgt rund 7,63 Minuten. Dies ist ein Maß für den kumulativen Effekt: Im Verlauf eines Jahres kann die wahre Zeit an einem Ort der gemittelten Zeit um $\pm 7{,}63$ Minuten vor bzw. nach gehen. Dieser Effekt ist Anfang April (drei Monate nach dem Perihel) und nochmals Anfang Oktober (sechs Monate später) am größten. Zunächst hinkt die wahre Zeit der gemittelten Zeit hinterher.

4 Die Neigung der Erdachse zur Ekliptik

Für die separate Beschreibung des zweiten Einflusses auf die Tageslänge nehmen wir an, dass sich die Erde gleichmäßig auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt. Wir berücksichtigen allerdings nun, dass die Rotationsachse der Erde um 23,44° relativ zur Normalen der Ekliptik (der Bahnebene der Erde) geneigt ist. Außerdem ist es sinnvoll, nicht ein heliozentrisches Koordinatensystem zu verwenden, sondern ein geozentrisches, allerdings soll dieses Koordinatensystem relativ zum Frühlingspunkt (also der Schnittlinie zwischen Äquatorebene und Ekliptik) fest sein (siehe Abb. 3). Die z-Achse dieses Systems sei die Rotationsachse der Erde, die x,y-Achsen liegen dann in der Äquatorebene (z.B. sei die x-Achse die Schnittlinie der Ekliptik und Äquatorebene, sie zeige also in Richtung Frühlingspunkt). Es handelt sich also nicht um ein erdfestes Koordinatensystem, das die tägliche Drehung der Erde mitmacht, sondern um ein Koordinatensystem, das bezüglich des Frühlingspunkts fest ist. Dies ist auch das Koordinatensystem, das man in der Astronomie häufig verwendet.

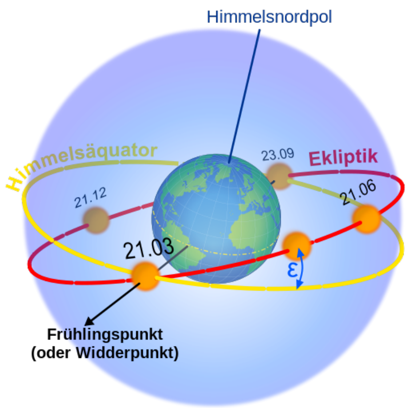

Abbildung 3: Äquatorebene und Ekliptik sind um 23,44° gegeneinander geneigt (hier mit ε bezeichnet). Eine gleichmäßige Bewegung der Sonne entlang der Ekliptik wird zu einer ungleichmäßigen Bewegung in Bezug auf die Längengrade.

In Bezug auf ein solches Koordinatensystem bewegt sich die Sonne im Verlauf eines Jahres gleichförmig auf einem Kreis, der um 23,44° relativ zur Äquatorebene geneigt ist. Die Gleichförmigkeit dieser Bewegung folgt aus der gleichförmigen Bewegung der Erde um die Sonne (da wir eine Kreisbewegung annehmen). Die Längengrade auf der Erde schneiden die scheinbare Bahn der Sonne, die relativ zum Äquator geneigt ist, jedoch nicht gleichförmig. Das bedeutet, dass die scheinbare Bewegung der Sonne relativ zu den Längengraden nicht gleichförmig ist, und das wiederum bedeutet, dass ein Sonnentag zu manchen Zeiten kürzer bzw. länger ist. Genauer sind die Tage um den Frühlings- und Herbstpunkt die kürzesten und die Tage um die Sommer- und Wintersonnenwende die längsten.

Zur Berechnung dieses Effekts für die Zeitgleichung muss man einen gleichmäßig unterteilten Vollkreis, der unter 23,44° geneigt ist, entlang der Längengrade auf die Äquatorebene projizieren. Die auf der Ekliptik gleichen Bogenlängen werden auf der Äquatorebene ungleich - etwas dichter am Frühlingspunkt (derzeit 21.3.) und Herbstpunkt (derzeit 23.9.) und etwas weniger dicht bei der Sommersonnenwende (derzeit 21.6.) und der Wintersonnenwende (derzeit 21.12).

Die folgende Herleitung dieses Beitrags geht davon aus, dass sich der Effekt wieder als eine trigonometrische Funktion schreiben lässt, was in guter Näherung auch erfüllt ist. Diese Funktion hat im Verlaufe eines Jahres zwei Maxima (an den Sonnenwenden) und zwei Minima (an den Äquinoktien). Damit müssen wir nur noch die Amplitude dieser Funktion bestimmen.

Wie aus Abb. 4 ersichtlich, ändert sich eine Bogenlänge a, wenn sie von der Ekliptik entlang der Längengrade auf den Äquator projiziert wird. In der Nähe der Äquinoktien ist die Beziehung durch $a' = a \cos\varepsilon$ gegeben. In der Nähe der Sonnenwendepunkte am 23,44.ten Breitengrad gilt ungefähr $a = a' \cos\varepsilon$ (genauer ist dies die Beziehung zwischen den Bogenlängen entlang der beiden Breitengrade; der Abstand zwischen den beiden Punkten entlang der Ekliptik ist etwas kleiner, dies kann man

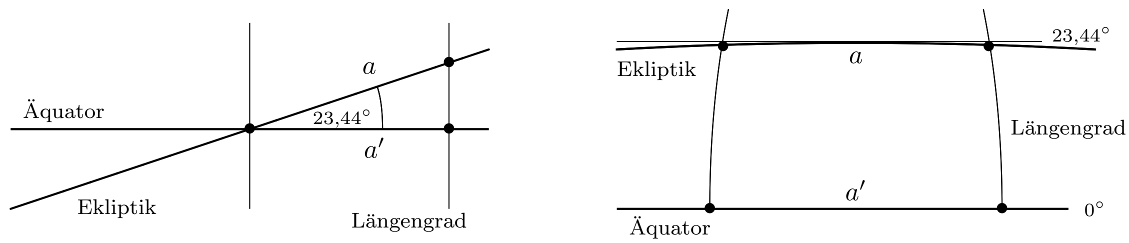

Abbildung 4: Projektionen von der Ekliptik auf die Äquatorebene in der Nähe der Äquinoktien (Schnittpunkte zwischen Äquator und Ekliptik; links) und der Sommer- bzw. Wintersonnenwende (rechts). Zwei Punkte, die entlang der Ekliptik eine Bogenlänge a haben, werden entlang der Längengrade auf zwei Punkte auf dem Äquator projiziert, die dort eine Bogenlänge a' haben. Man vergleiche diese Abbildung auch mit Abb. **??** und **??**.

aber in führender Ordnung und wenn die Punkte genügend nahe beieinander liegen vernachlässigen). Machen wir wieder einen Ansatz der Form

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left(1 + B \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)\right) \tag{18}$$

folgt

$$\frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} = \frac{1-B}{1+B} = \cos^2 \varepsilon \tag{19}$$

oder

$$B = \frac{1-\cos^2 \varepsilon}{1+\cos^2 \varepsilon} = 0{,}0859153\,. \tag{20}$$

Dies führt auf maximale Schwankungen in der Tageslänge von $\pm 20{,}27\,\mathrm{s}$ und auf eine kumulative Zeitverschiebung von

$$\mathrm{ZG}_2(t) = \sum_{t=0}^{t} \Delta T(t) \approx \frac{T}{4\pi} \Delta T \sin \frac{4\pi}{T} t \approx (9{,}82\,\mathrm{min}) \cdot \sin \frac{4\pi}{T} t\,. \tag{21}$$

Wiederum ist T die Zeitdauer von einem Jahr, und da in der Summe die Diskretisierung in Tagen t vorgenommen wurde, sollte auch T in Tagen angegeben werden. t ist die Anzahl der Tage vom Frühlingspunkt (dort ist nun $t = 0$) gemessen.

5 Die Zeitgleichung

Die Zeitgleichung ist die Summe dieser beiden Beiträge. Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass die Zeitpunkte $t = 0$ unterschiedlich gewählt wurden. Gibt man t in Tagen an, sollte die Periode für den ersten Anteil (elliptische Erdbahn) am 3. Januar beginnen, also am 3. Tag des Jahres, und die Periode für den zweiten Anteil (Neigung der Erdachse zur Ekliptik) am 21. März, in Jahren, die kein Schaltjahr sind, also am 80. Tag eines Jahres. Abb. 5 zeigt die Summe der beiden Beiträge.

Insgesamt sind die Minuten der Zeitgleichung zur wahren Ortszeit zu addieren, sodass man die mittlere Ortszeit erhält. Diese Wahl des Vorzeichens geht darauf zurück, dass man früher beispielsweise mithilfe eines Sextanten auf hoher See die wahre Ortszeit gemessen hat und nun die mittlere Ortszeit berechnen musste. Ist die Zeitgleichung negativ (beispielsweise zu Beginn des Jahres) müssen die entsprechenden Minuten (Absolutwerte) der Zeitgleichung also von der wahren Ortszeit abgezogen werden, um zur mittleren Ortszeit zu gelangen.

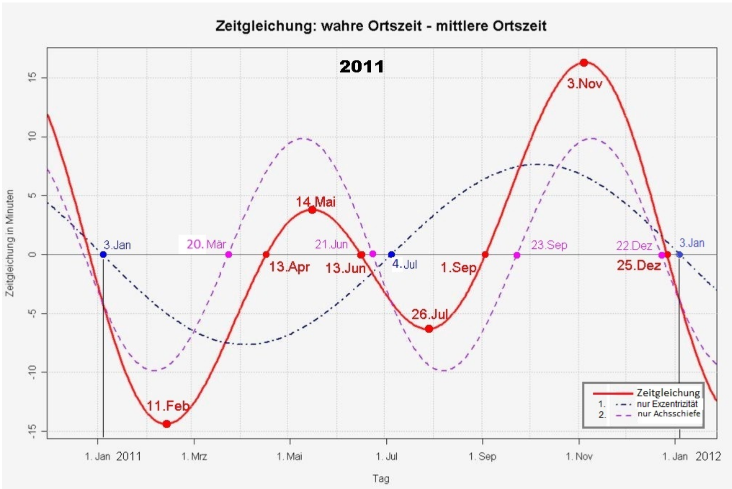

Abbildung 5: Die Zeitgleichung. Im Verlaufe eines Jahres kann die wahre Ortszeit von der mittleren Ortszeit um über eine Viertelstunde abweichen. Da sich das Perihel langsam verschiebt (in rund 21 000 Jahren einmal um 360°) verschieben sich im Verlauf der Zeit auch die beiden Beiträge relativ zueinander. (aus [6])

6 Kuriositäten

6.1 Die Ekliptik auf alten Landkarten und Globen

Auf manchen alten Landkarten und Globen ist die Projektion der Ekliptik auf die Erde eingezeichnet. Ein Beispiel ist die bekannte Weltkarte von Hendrik Hondius aus dem Jahr 1630 (Abb. 6, oben).

Sowohl die Äquatorlinie als auch die Ekliptik sind in 360 äquidistante Einheiten von jeweils 1° unterteilt. Für die Äquatorlinie gilt das auch auf der Karte. Da der Großkreis der Ekliptik in seiner Projektion auf der Karte bei unterschiedlichen Breitengraden verläuft und der Maßstab der Karte vom Breitengrad abhängt (siehe auch das Kapitel Landkarten), erscheint die Unterteilung der Ekliptik nicht mehr gleichförmig. In der Nähe der Wendepunkten der Sonne, also in den Bereichen, wo die Ekliptik in der Nähe des ±23,5. Breitengrads ist, sind die Unterteilungen auf der Ekliptik etwas breiter als am Äquator (siehe Abb. 6, unten rechts), da der Maßstab auf der Karte kleiner wird, wenn man sich vom Äquator entfernt. In den Ausschnitten (Abb. 6, unten) erkennt man, dass beim Schnittpunkt der Ekliptik mit dem Äquator (also den Äquinoktien) die Projektion der Ekliptik auf den Äquator die Bogenlänge schrumpfen lässt (Abb. 6, unten links). An diesen Stellen schneidet die 10° Bogenlänge der Ekliptik den Äquator links von der 10° Marke bzw. dem 10. Längengrad. Andererseits vergrößert wegen des veränderten Maßstabs die Projektion entlang der Längengrade in der Nähe der Wendepunkte die Bogenlänge (Abb. 6, unten rechts): Hier liegt die 10° Marke der Ekliptik (10° neben dem Wendepunkt) rechts neben dem 100. Längengrad (der 90. Längengrad markiert den Wendepunkt) am Äquator.

6.2 Das Analemma

Das Analemma ist eine achtförmige Figur, die ungefähr den Schattenverlauf der Spitze eines Stabes (z.B. eines Obelisken oder der Spitze des Zeigers einer Sonnenuhr) zur selben mittleren Ortszeit (z.B. um 12 Uhr mittags) im Verlauf eines Jahres beschreibt (siehe Abb. 7, links). Die beiden Koordinaten dieser Figur entsprechen einmal dem unterschiedlichen Höchstand der Sonne im Sommer und Winter: Im Winter steht die Sonne auch zur Mittagszeit sehr tief und somit ist der Schatten vergleichsweise lang, im Sommer steht die Sonne hoch am Himmel und daher ist der Schatten entsprechend kurz.

Die dazu (fast) orthogonale Richtung entspricht der Zeitgleichung: Da die Position der Schattenspitze immer zur selben mittleren Ortszeit bestimmt wird, geht die wahre Sonne dieser Zeit entsprechend der Zeitgleichung entweder etwas vor oder nach, d.h. der Schatten ist etwas nach links oder

Abbildung 6: (Oben) Weltkarte von Hendrik Hondius aus dem Jahr 1630. Deutlich erkennbar neben der Äquatorlinie ist die Projektion der Ekliptik. (Unten) Ausschnitte aus der Weltkarte von Hendrik Hondius. (links) Ausschnitt beim Schnittpunkt von Äquator und Ekliptik, der hier auf einen der damals gebräuchlichen Nullmeridiane durch die Azoren gelegt wurde. Links unten sind Teile von Südamerika erkennbar, rechts oben Teile von Afrika. (rechts) Ausschnitt in der Nähe des südlichen Wendepunkts der Ekliptik (unser Winterpunkt). Der Kontinent links ist Afrika, die Insel rechts daneben Madagaskar; rechts oben erkennt man die Südspitze von Indien und Sri Lanka (damals Ceylon). ([3])

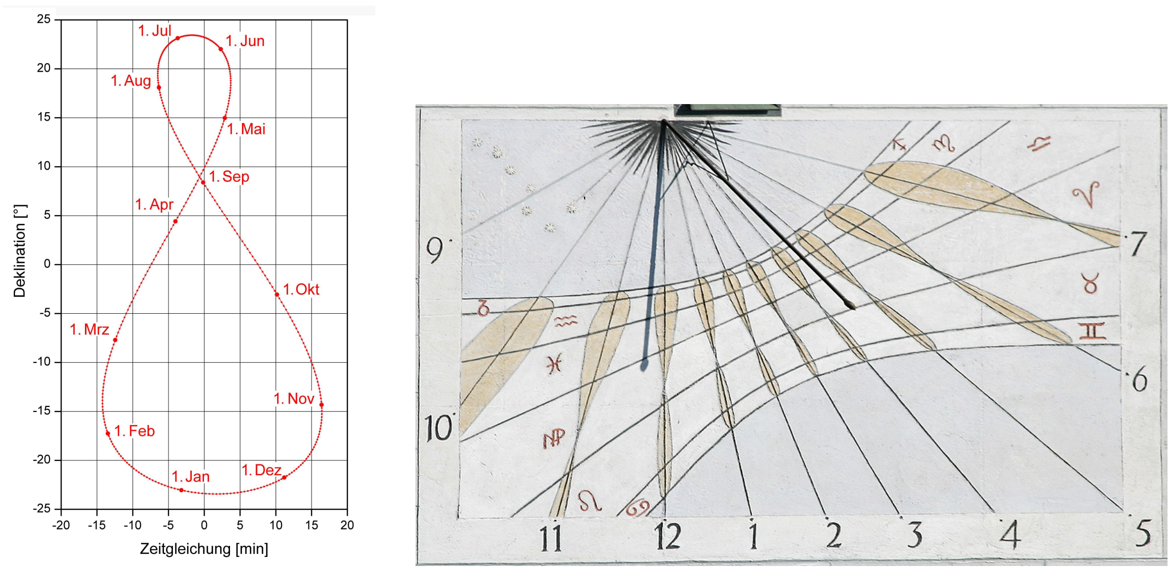

Abbildung 7: Das Analemma. (links) Die derzeitige Figur des Analemmas. Die obere Spitze der 8 beschreibt den Sonnenstand im Sommer, wenn die Sonne hoch steht und der Schatten entsprechend kurz ist. Der Zeiger oder Obelisk steht oberhalb der Figur und die Südrichtung ist nach oben (aus [1]). (rechts) Die Sonnenuhr am Alten Rathaus in München mit einem Analemma zur Korrektur der wahren Sonnenzeit auf die mittlere Sonnenzeit. (aus [1])

rechts versetzt.

Manche Sonnenuhren korrigieren den Effekt der Zeitgleichung. Dazu gibt es unterschiedliche Verfahren. Man kann z.B. die Schattenlinien zu einer festen Uhrzeit nicht als Geraden zeichnen (die einem festen Längengrad entsprechen würden) sondern in Form einer langgestreckten Acht. Hierbei wird, wie bei all diesen Verfahren, ausgenutzt, dass der Schatten im Winter länger ist als im Sommer.

Ein weiteres Verfahren besteht darin, den Schattenstab der Sonnenuhr unterschiedlich dick zu machen und zum Ablesen an einer Skala eine bestimmte Kante des Schattens zu verwenden (siehe Abb. 8). Solche Stäbe bezeichnet man auch als Bernhardt'sche Walze (benannt nach dem Techniker Martin Bernhardt, der diese Walze patentieren ließ, ähnliche Ideen hatte aber auch schon der Engländer John Ryder Oliver Ende des 19. Jahrhunderts). Ebenfalls wegen der unterschiedlichen Sonnenhöhe zu den verschiedenen Jahreszeiten würde ein jeweils anderer Teil des Schattenstabs den Schatten auf die Skala werfen. Wegen der unterschiedlichen Dicke erreicht man so, dass diese Schattenkante entsprechend verschoben ist. Da die Zeitgleichung in den beiden Jahreshälften unterschiedlich ist, benötigt man einen Schattenstab für die erste und einen anderen Schattenstab für die zweite Jahreshälfte.

Im Verlauf der Zeit verschieben sich die beiden Beiträge zur Zeitgleichung gegeneinander. Während sich der Neigungswinkel zur Ekliptik nur sehr wenig und über einen sehr großen Zeitraum von über 40 000 Jahren verändert, wandert das Perihel im Verlauf von rund 21 000 Jahren einmal durch das Jahr. Dadurch verändert sich die Zeitgleichung langsam und somit auch die Form des Analemmas. Derzeit ist das Analemma leicht asymmetrisch, weil die Wintersonnenwende und das Perihel nicht auf denselben Tag fallen (das war z.B. im Jahr 1246 der Fall). Außerdem sind die beiden „Hanteln“ der Acht unterschiedlich groß. Wenn das Perihel im Frühlings- bzw. Herbstpunkt steht, sind die beiden Teile gleich groß.

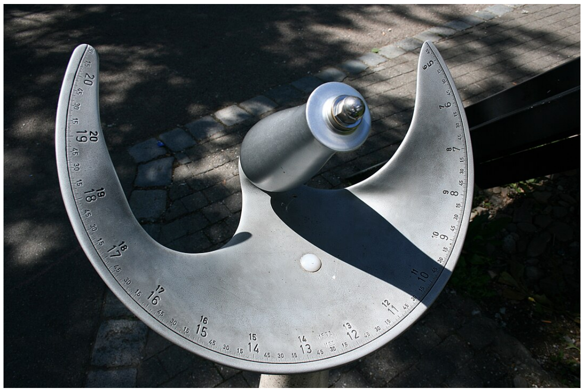

Abbildung 8: Sonnenuhr mit Bernhardt'scher Winterwalze. (aus [5])

6.3 Der kürzeste Tag

Die Wintersonnenwende entspricht gemeinhin dem kürzesten Tag. Derzeit liegt dieses Ereignis um den 21. Dezember. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich sie Sonne über dem südlichen Wendekreis (dem Wendekreis des Steinbocks). In Freiburg liegen zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang an diesem Tag 8 Stunden, 22 Minuten und 13 Sekunden. Doch kürzester Tag heißt nicht, dass es an diesem Tag am frühesten dunkel wird oder am spätesten hell. Der früheste Sonnenuntergang liegt um den 11. Dezember (in Freiburg um 16:35), der späteste Sonnenaufgang ist um den 2. Januar (in Freiburg gegen 8:18). Alle angegebenen Uhrzeiten beziehen sich natürlich auf die mittlere Sonnenzeit (genauer MEZ) und nicht die wahre Sonnenzeit. Der Grund für den Unterschied ist die Zeitgleichung.

Eine ähnliche Aussage gilt für die Sommersonnenwende. Der längste Tag mit 16 Stunden 2 Minuten und 47 Sekunden in Freiburg ist der 21. Juni. Doch der frühste Sonnenaufgang liegt um den 16./17. Juni (gegen 5:18), der späteste Sonnenuntergang um den 25./25. Juni (gegen 21:32). Genaue Zeiten für die Tageslänge, Sonnenauf- und Untergang sowie weitere interessante Daten für jeden beliebigen Ort der Erde findet man auf der Webseite [4].

7 Anhang

7.1 Äquivalenz des zweiten Kepler'schen Gesetzes und der Drehimpulserhaltung

Sei $\boldsymbol{r}$ der Verbindungsvektor von einem Brennpunkt der Ellipse - dem Brennpunkt, in dem sich die Sonne befindet - zu einem Punkt auf der Ellipse (dem Ort eines Planeten) und $\boldsymbol{\Delta r}$ die in der Zeit Δt zurückgelegte Strecke in tangentialer Richtung. Das zweite Kepler'sche Gesetz besagt, dass die in dem Zeitraum Δt (für $\Delta t \to 0$) überstrichene Fläche ΔF, d.h.

$$\Delta F = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Delta r}\,, \tag{22}$$

entlang der Bahnkurve immer gleich ist. Damit ist aber auch der Drehimpuls

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{23}$$

konstant. Das Argument gilt natürlich auch in der umgekehrten Richtung: Aus der Drehimpulserhaltung folgt das zweite Kepler'sche Gesetz.

Literatur

[1] aus Wikipedia „Analemma“; S. Wetzel, CC BY-SA 4.0.

[2] Till Niermann - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21792620

[3] Ravensburger Puzzle; Antique World Map, Hondius.

[4] https://www.timeanddate.com/sun/germany/freiburg

[5] Wikipedia „Sonnenuhr“; Präzisions-Sonnenuhr mit Winterwalze am Carl Zeiss Planetarium, Stuttgart. https://de.wikipedia.org/wiki/Sonnenuhr

[6] Wikipedia „Zeitgleichung“; https://de.wikipedia.org/wiki/Zeitgleichung (aufgerufen am 14.5.2023).

[7] Wikipedia „Zeitzone“. https://de.wikipedia.org/wiki/Zeitzone