# Gezeiten und Tageslänge

**Thomas Filk, Universität Freiburg**

In diesem Kapitel wird das Phänomen der Gezeiten (typischerweise zwei Flutberge und zwei Ebbesenken am Tag, vornehmlich in Richtung des Mondes) und ihre Entstehung vorausgesetzt. Es wird gezeigt, wie dieses Phänomen zu einer Verlangsamung der Erddrehung und damit zu einer Verlängerung der Tage führt, und dass dies zur Folge hat, dass sich der Mond langsam von der Erde entfernt.

## 1 Die Tage werden länger

Die Erde dreht sich einmal täglich um ihre Achse. Das ist im Vergleich zu einem Erde-Mond-Umlauf sehr schnell. Da es sich um eine Drehung um eine Achse durch das Zentrum der Erde handelt, hat diese keinen Einfluss auf die Entstehung der Gezeiten. Allerdings wirken sich die Gezeiten auf diese Drehung aus: Der unebene Meeresgrund sowie die kontinentalen Küsten bewirken, dass es eine Reibung zwischen Erde und Wassermassen gibt, die sogenannte Gezeitenreibung. Anders ausgedrückt, die Wassermassen der Gezeiten treffen auf die Ostküsten der Kontinente mit einer etwas größeren Wucht als auf die Westküsten. Dadurch wird die Erde in ihrer relativen Drehung zu den Wasserbergen der Gezeiten abgebremst.

Ein ähnlicher Effekt hat vermutlich auch dazu geführt, dass der Mond, der ursprünglich sicherlich eine Eigendrehung relativ zur Erde hatte, abgebremst wurde und mittlerweile der Erde immer dieselbe Seite zuwendet. Hier waren es zwar keine Wassermassen, doch durch den Gezeiteneffekt von der Erde auf den Mond wurden dort die Landmassen leicht angehoben. Einen ähnlichen Effekt gibt es auch bei den Landmassen der Erde, er macht aber nur rund 30 Zentimeter Höhenunterschied aus. Der Mond hat dadurch im Verlauf der Zeit an Rotationsenergie verloren und dreht sich heute nur noch einmal im Monat um seine Achse, wobei er der Erde immer dieselbe Seite zeigt.

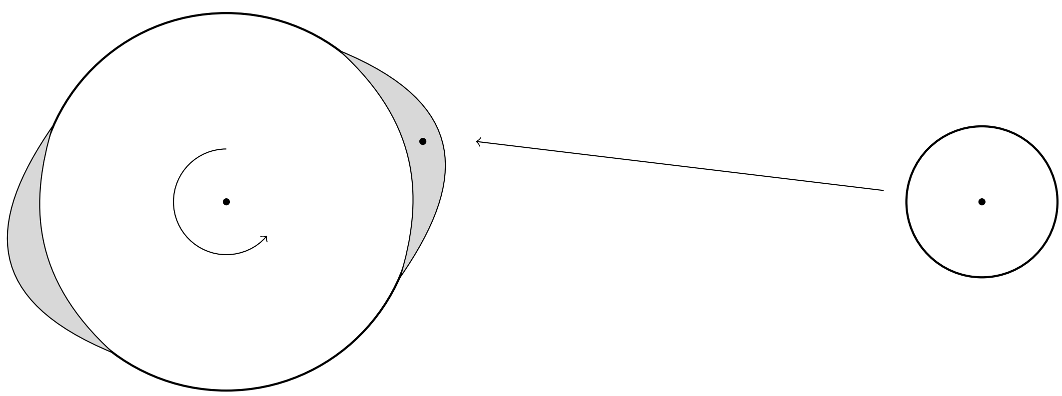

Abbildung 1: Durch die Eigendrehung der Erde relativ zu den Flutbergen kommt es zu einer „Reibung“, bei der die Erde abgebremst wird, wodurch die Tage länger werden. Andererseits haben die voreilenden Flutberge eine beschleunigende Wirkung auf den Mond, der dadurch an Energie gewinnt und sich von der Erde entfernt. Der Drehimpuls - vorher in der Eigenrotation der Erde, nachher in der Bewegung des Monds - bleibt erhalten.

Durch die raschere Drehung der Erde werden die Wasserberge der Flut etwas vorangetrieben, sodass diese nicht mehr auf der Verbindungslinie zwischen Erde und Mond liegen, sondern etwas davor (siehe Abb. 1). Auf der einen Seite bewirkt nun die Anziehungskraft des Monds auf diese Wasserberge das Abbremsen der Erdumdrehung, auf der anderen Seite - im Gegenzug - wird der Mond durch die Anziehungskraft der Wasserberge etwas beschleunigt. Das hat einerseits den Effekt, dass die Tage auf der Erde länger werden (die Erde dreht sich langsamer - das macht in hundert Jahren rund 2 Millisekunden pro Tag aus, d.h. die Dauer eines Tages hat in den letzten 150-200 Millionen Jahren um rund eine Stunde zugenommen), andererseits nimmt der Abstand des Monds von der Erde zu. Im Jahr sind das derzeit rund 3,8 Zentimeter.

Der Drehimpuls der Erde nimmt zwar durch die Bremswirkung der Gezeiten langsam ab, aber dadurch nimmt der Bahndrehimpuls des Monds (bzw. genauer des Erde-Mond-Systems) langsam zu. Insgesamt bleibt der Gesamtdrehimpuls des Erde-Mond-Systems erhalten.

# 2 Ein paar „$\pi\times$Daumen“-Rechnungen

## 2.1 Die Zunahme der Tageslänge

Der Drehimpuls des Erde-Mond-Systems steckt in erster Linie in der Mondbahn (Drehung des Monds um den gemeinsamen Schwerpunkt) und in zweiter Linie in der Eigendrehung der Erde. Der Bahndrehimpuls der Erde und die Eigendrehung des Monds können vernachlässigt werden. Tabelle 1 gibt einige Größenordnungen an. Die Bahndrehimpulse von Erde und Mond berechnen sich nach

$$L_{\text{Bahn}} = mrv = mr^2\omega = mr^2\frac{2\pi}{T}\,, \tag{1}$$

($m$ die Masse des Objekts, $r$ der Abstand Schwerpunkt-Mittelpunkt des Objekts, $v$ die Geschwindigkeit des Objekts, $\omega$ die zugehörige Winkelgeschwindigkeit).[1] Die Umlaufperiode $T$ ist die siderische Periode der Mondbahn, das sind ungefähr 27,3 Tage. Die Eigendrehimpulse wurden nach

$$L_{\text{Eigen}} = \frac{2}{5}mR^2\omega\,, \tag{2}$$

berechnet ($m$ Masse, $R$ Radius des Objekts, $\omega$ bzw. $T$ die Eigenfrequenz bzw. Periode der Drehung; für den Mond ist $T = 27{,}3\,\text{Tage}$, für die Erde ist $T = 1\,\text{Tag}$ oder $86\,400\,\text{Sekunden}$). Hier wird die Annahme gemacht, dass die Masse der Objekte konstant verteilt ist, es sich also um eine starre Vollkugel handelt. Dies ist insbesondere für die Erde mit ihrem flüssigen Erdinneren nicht wirklich gegeben, stellt aber eine gute Näherung dar.

Wenn nun die Eigendrehung der Erde aufgrund der Gezeitenreibung abnimmt, fließt dieser Drehimpuls praktisch ausnahmslos in den Bahndrehimpuls des Monds. Die Summe der Änderungen verschwindet und wir können annehmen, dass

$$\frac{\Delta L_{\text{Erde/Eigen}}}{\Delta t} = -\frac{\Delta L_{\text{Mond/Bahn}}}{\Delta t}\,. \tag{3}$$

[1] Das Verhältnis der Drehimpulse von Erd- zu Mondbahn lässt sich einfacher abschätzen: Nach Gl. 8 ist $m_{\text{Erde}}R_{\text{Erde}-\text{D}} = m_{\text{Mond}}R_{\text{Mond}-\text{D}}$, wobei $R_{\text{X}-\text{D}}$ der Abstand des Mittelpunkts des Körpers $X$ zum gemeinsamen Schwerpunkt $D$ ist. Die Winkelgeschwindigkeit ist für die beiden Körper im Erde-Mond-System dieselbe, also erhalten wir die Gleichung

$$m_{\text{Erde}}R_{\text{Erde}}\omega = m_{\text{Mond}}R_{\text{Mond}}\omega\,.$$

Diese ist gleichbedeutend zu

$$R_{\text{Erde}}L_{\text{Erde/Bahn}} = R_{\text{Mond}}L_{\text{Mond/Bahn}}$$

oder auch

$$m_{\text{Mond}}L_{\text{Erde/Bahn}} = m_{\text{Erde}}L_{\text{Mond/Bahn}}\,.$$

Das Verhältnis der Bahndrehimpulse ist also gleich dem umgekehrten Verhältnis der Massen. Dieses ist immer gleich (es beträgt ungefähr 1 : 81,2), daher ist auch das Verhältnis der Bahndrehimpulse unabhängig vom Abstand zwischen Erde und Mond.

| System | Drehimpuls | prozentualer Anteil |
|---:|---|---|
| Mondbahn um Schwerpunkt | $2{,}83 \cdot 10^{34}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$ | 79% |
| Erdbahn um Schwerpunkt | $3{,}4 \cdot 10^{32}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$ | 1% |
| Eigendrehung Erde | $7{,}06 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$ | 19,9% |
| Eigendrehung Mond | $2{,}4 \cdot 10^{29}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$ | < 0,001% |

Tabelle 1: Größenordnung der Drehimpulse im Erde-Mond-System. Die Zahlen sind wiederum nur ungefähre Angaben und wurden aus den Parametern in Tab. 1 berechnet. Unsicherheiten liegen in der Annahme einer Kreisbahn für den Mond sowie in der Formel für die Eigendrehimpulse, die eine konstante Masseverteilung voraussetzt. Insbesondere ist der Eigendrehimpuls der Erde etwas kleiner (ungefähr $5{,}85 \cdot 10^{33}\,\mathrm{kg \cdot m^2/s}$). Damit erhöht sich der Anteil des Bahndrehimpulses des Monds im Vergleich zum Gesamtdrehimpuls auf rund 82%, entsprechend verringert sich der Anteil des Eigendrehimpulses der Erde auf rund 17%.

Im Grenzfall $\Delta t \to 0$ wird dieser Quotient zum Drehmoment.

Wir kennen das Drehmoment der Gezeitenreibung nicht. Aber wir kennen ziemlich genau den Abstand Erde-Mond und wissen, dass der Abstand des Monds im Laufe eines Jahres um rund 3,8 cm zunimmt. Bevor wir diesen Wert in Gl. 1 einsetzen müssen wir berücksichtigen, dass eine Änderung des Abstands (bzw. des Bahnradius) auch eine Änderung der Umlaufzeit zur Folge hat. Aus der Bedingung „Gravitationskraft = Fliehkraft“ folgt:

$$G\frac{m_{\mathrm{Erde}} m_{\mathrm{Mond}}}{R_{EM}^2} = m_{\mathrm{Mond}} R_{\mathrm{EM}} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad T = 2\pi \left(\frac{R_{\mathrm{EM}}^3}{G m_{\mathrm{Erde}}}\right)^{1/2} . \tag{4}$$

Dies ist das berühmte dritte Kepler'sche Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der Halbachsen. Setzen wir diese Beziehung in Gl. 1 ein, erhalten wir den Drehimpuls der Mondumlaufbahn als Funktion des Abstands (sowie weiterer Konstanten):

$$L_{\mathrm{Mond/Bahn}} = m_{\mathrm{Mond}} \sqrt{G m_{\mathrm{Erde}} R_{\mathrm{EM}}} \,. \tag{5}$$

Die Änderung des Drehimpulses als Funktion des Abstands ist somit:(Herleitung)

$$\Delta L_{\mathrm{Mond/Bahn}} = \frac{m_{\mathrm{Mond}}}{2} \sqrt{\frac{G m_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{EM}}}} \Delta R \,. \tag{6}$$

Für $\Delta R = 3{,}8\,\mathrm{cm}$ ist dies die Drehimpulsänderung in der Mondbahn in einem Jahr. Um denselben Wert ändert sich der Eigendrehimpuls der Erde in einem Jahr. Da sich in Gl. 2 nur $\omega$ ändern kann, folgt:

$$\Delta L_{\mathrm{Erde/Eigen}} = \frac{2}{5} m_{\mathrm{Erde}} R_{\mathrm{Erde}}^2 \Delta\omega = -\frac{2}{5} m_{\mathrm{Erde}} R_{\mathrm{Erde}}^2 \frac{2\pi}{T^2} \Delta T \,. \tag{7}$$

(Hier wurde $\Delta\omega = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}T}\Delta T$ ausgenutzt.) Das Minuszeichen deutet an, dass der Drehimpuls kleiner wird (also $\Delta L$ negativ ist) wenn die Periode länger wird (also $\Delta T$ positiv ist). Insgesamt erhalten wir somit:

$$\Delta T = \frac{5}{8\pi} T^2 \frac{m_{\mathrm{Mond}}}{m_{\mathrm{Erde}} R_{\mathrm{Erde}}^2} \sqrt{\frac{G m_{\mathrm{Erde}}}{R_{\mathrm{EM}}}} \Delta R \,. \tag{8}$$

Mit den Gleichungen für den Bahndrehimpuls des Monds (Gl. 5) und dem Eigendrehimpuls der Erde (Gl. 2) können wir diese Beziehung auch umschreiben:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{L_{\mathrm{Mond/Bahn}}}{L_{\mathrm{Erde/Eigen}}} \frac{\Delta R}{R_{\mathrm{EM}}} \,. \tag{9}$$

Diese Beziehung besitzt eine „rasche“ Herleitung: Wir wissen, dass

$$\Delta L_{\text{Erde/Eigen}} + \Delta L_{\text{Mond/Bahn}} = 0\,. \tag{10}$$

Die beiden Relationen

$$L_{\text{Erde/Eigen}} \propto \frac{1}{T} \qquad \text{und} \qquad L_{\text{Mond/Bahn}} \propto \sqrt{R_{\text{EM}}} \tag{11}$$

führen auf (man bilde jeweils die logarithmischen Ableitungen, sodass die Proportionalitätsfaktoren wegfallen)

$$\Delta L_{\text{Erde/Eigen}} = -\frac{L_{\text{Erde/Eigen}}}{T}\Delta T \qquad \text{und} \qquad \Delta L_{\text{Mond/Bahn}} = \frac{1}{2}\frac{L_{\text{Mond/Bahn}}}{R_{\text{EM}}}\Delta R_{\text{EM}} \tag{12}$$

Eingesetzt in Gl. 10 erhalten wir Gl. 9. Nach Tabelle 1 ist $\frac{L_{\text{Mond/Bahn}}}{L_{\text{Erde/Eigen}}} \approx 4$, außerdem ist $\frac{\Delta R_{\text{EM}}}{R_{\text{EM}}} \approx 10^{-10}$ und $T = 86\,400\,\text{s}$. Damit folgt

$$\Delta T = 2 \cdot 10^{-10} \cdot 0{,}864 \cdot 10^{5}\,\text{s} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,\text{s}\,. \tag{13}$$

Dies ist die Änderung in der Tageslänge in einem Jahr. In 100 Jahren sind das etwas weniger als 0,002 s.

## 2.2 Wie alt ist der Mond?

Die Frage nach dem Alter des Monds ist für viele Bereiche von Bedeutung. Die Vermutung ist, dass der Mond von rund 4 Milliarden Jahren, also kurz nach der Entstehung der Erde, durch einen riesigen Meteoriteneinschlag in die Erde entstanden ist. Wenn wir ganz naiv die 3,8 cm pro Jahr, um die die Entfernung des Monds von der Erde zunimmt, extrapolieren, kommen wir bei 4 Milliarden Jahren auf eine Entfernung von rund $1{,}52 \cdot 10^{8}$ m oder 152 000 km. Diese Entfernung ist deutlich zu groß. Vermutlich hatte der Mond kurz nach seiner Entstehung eine Entfernung von der Erde, die knapp über der Grenze lag, bei welcher der Mond aufgrund der Gezeitenkräfte auseinandergerissen worden wäre (diese Grenze bezeichnet man auch als Roche-Grenze), das sind rund 15 000-20 000 km.

Es ist offensichtlich, weshalb die naive Extrapolation der 3,8 cm pro Jahr für die Zunahme der Erde-Mond-Entfernung nicht korrekt ist. Mehrere Gründe spielen hier eine wichtige Rolle. Insbesondere muss berücksichtigt werden, dass der Abstand zwischen Erde und Mond früher kleiner war.

1. Damit folgt, dass die Gezeitenkräfte, die sich wie $1/R_{\text{EM}}^{3}$ verhalten, wesentlich größer waren. Bei einem großzügig angenommenen Faktor 10 zwischen dem ursprünglichen Abstand und dem heutigen Abstand macht dies für die Gezeitenkräfte einen Faktor 1000 aus. Dieser Einfluss auf Ebbe und Flut lässt sich kaum abschätzen.

2. Ein kleinerer Abstand zwischen Erde und Mond bedeutet auch, dass sich der Mond wesentlich schneller um die Erde gedreht hat. Nimmt man auch hier einen Faktor 10 an, folgt aus dem dritten Kepler'schen Gesetz, dass die Mondzyklen um mehr als einen Faktor 30 kürzer waren als heute, der Mond sich also in weniger als einem (heutigen) Tag um die Erde gedreht hat. Damit war auch die Zeitdauer zwischen Ebbe und Flut deutlich kürzer.

3. Schließlich hat sich die Erde früher wesentlich schneller gedreht als heute und damit folgten Ebbe und Flut rascher aufeinander. Der Reibungseffekt pro Jahr war wegen der häufigeren Fluten (unabhängig von ihrer Stärke) höher.

Berücksichtigt man all diese Effekte, so hat sich der Mond insbesondere zu Beginn deutlich schneller von der Erde entfernt, als es unsere naive Extrapolation angibt. Eine Rechnung, die all diese Effekte berücksichtigt, kommt auf ein Alter des Monds von rund 1,3 Milliarden Jahren (siehe [?]).

Dies wiederum ist eine zu kurze Zeitdauer. Dieses Ergebnis wird gelegentlich von Creationisten (Anhängern einer auf der Darstellung der Bibel basierenden Schöpfungsgeschichte, nach der Gott die Welt von etwas über 6000 Jahren erschaffen hat) angeführt um zu argumentieren, dass die sogenannten wissenschaftlichen Berechnungen für das Alter der Erde (und des Monds), die auf 4 Milliarden Jahre deuten, falsch sein müssen. Sie sehen hierin einen Widerspruch zu den beobachteten Tatsachen.

Wäre das Ergebnis von 1,3 Milliarden Jahren für das Alter des Monds korrekt, wäre das tatsächlich ein Problem für die übliche wissenschaftliche Theorie über das Alter der Erde. Der wesentliche Unsicherheitsfaktor für die obige Berechnung ist jedoch der Einfluss der um einen Faktor 10–1000 (als Größenordnung) stärkeren Gezeitenkräfte auf Ebbe und Flut und die damit verbundene Gezeitenreibung. Insbesondere wird vermutet, dass die Gezeitenreibung in früheren Jahrmillionen einen deutlich geringeren Einfluss hatte, als eine einfache Extrapolation von heutigen Verhältnissen vermuten ließe: Es gab vor rund 200 Millionen Jahren nur einen großen Kontinent (Pangaea), und vermutlich gab es in der Geschichte der Erde vor ein bzw. zwei Milliarden Jahren mehrere Phasen, in denen es nur einen Kontinent gab. Dadurch war die Gezeitenreibung deutlich geringer (es gab weniger Küsten) und der Effekt des Drehimpulsaustauschs zwischen Erde und Mond war wesentlich kleiner. Hier gibt es noch viele Unsicherheiten, das Argument der Creationisten ist jedoch sicherlich zu einfach und nicht haltbar.

## 2.3 Wie geht es weiter?

Die Erde wird sich in Zukunft immer langsamer drehen und der Mond dabei immer mehr entfernen. Die Monate werden dadurch ebenfalls länger. Ist der derzeitige Eigendrehimpuls (siehe Tab. 1) der Erde „aufgebraucht“ und ganz auf den Mond übergegangen, wird der Mond einen Bahndrehimpuls von rund $3{,}54 \cdot 10^{34}\,\mathrm{km{\cdot}m/s^2}$ haben. Nach Gl. 5 bedeutet dies einen Abstand Erde-Mond von etwas über $R_{\mathrm{EM}} = 425\,000\,\mathrm{km}$ haben und der Monat wird rund 33 (heutige) Sonnentage dauern. Die Rotation der Erde ist dann an den Mond gebunden, so wie jetzt schon die Rotation des Monds gebunden ist, d.h. der Mond zeigt der Erde immer dieselbe Seite. Daher dauert ein Monat dann nur einen Sonnentag.

# 3 Herleitung einiger Gleichungen

## 3.1 Differenzieller Drehimpuls

Der direkte Weg, aus

$$L_{\text{Mond/Bahn}}(R_{\text{EM}}) = m_{\text{Mond}}\sqrt{Gm_{\text{Erde}}R_{\text{EM}}} \tag{14}$$

das Differenzial zu $L$ abzuleiten ist die Taylor-Entwicklung bzw. die erste Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}L_{\text{Mond/Bahn}}(R_{\text{EM}})}{\mathrm{d}R_{\text{EM}}} = \frac{1}{2}m_{\text{Mond}}\sqrt{\frac{Gm_{\text{Erde}}}{R_{\text{EM}}}} \tag{15}$$

und somit folgt:

$$\Delta L_{\text{Mond/Bahn}}(R_{\text{EM}}) = \frac{1}{2}m_{\text{Mond}}\sqrt{\frac{Gm_{\text{Erde}}}{R_{\text{EM}}}}\Delta R\,. \tag{16}$$

Man kann die Ableitung auch umgehen:

$$\begin{aligned}
\Delta L_{\text{Mond/Bahn}} &\equiv L_{\text{Mond/Bahn}}(R_{\text{EM}} + \Delta R) - L_{\text{Mond/Bahn}}(R_{\text{EM}}) && (17)\\
&= m_{\text{Mond}}\sqrt{Gm_{\text{Erde}}(R_{\text{EM}} + \Delta R)} - m_{\text{Mond}}\sqrt{Gm_{\text{Erde}}R_{\text{EM}}}\,. && (18)
\end{aligned}$$

Wir klammern $R_{\text{EM}}$ aus:

$$\begin{aligned}
\Delta L_{\text{Mond/Bahn}} &= m_{\text{Mond}}\sqrt{Gm_{\text{Erde}}R_{\text{EM}}\left(1 + \frac{\Delta R}{R_{\text{EM}}}\right)} - m_{\text{Mond}}\sqrt{Gm_{\text{Erde}}R_{\text{EM}}} && (19)\\
&= m_{\text{Mond}}\sqrt{Gm_{\text{Erde}}R_{\text{EM}}}\left(\sqrt{1 + \frac{\Delta R}{R_{\text{EM}}}} - 1\right) && (20)
\end{aligned}$$

Wir nutzen nun die Entwicklung der Wurzelfunktion:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2) \tag{21}$$

und erhalten:

$$\Delta L_{\text{Mond/Bahn}} = \frac{1}{2}m_{\text{Mond}}\sqrt{Gm_{\text{Erde}}R_{\text{EM}}}\,\frac{\Delta R}{R_{\text{EM}}} = \frac{1}{2}m_{\text{Mond}}\sqrt{\frac{Gm_{\text{Erde}}}{R_{\text{EM}}}}\,\Delta R\,. \tag{22}$$