

Landkarten und der metrische Tensor

Thomas Filk, Universität Freiburg

Die fundamentale dynamische Größe in der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Metrik bzw. der metrische Tensor, oft geschrieben als $g_{\mu\nu}(x)$, wobei x die Punkte der Raumzeit parametrisiert. In der Mathematik, insbesondere der Differentialgeometrie, geht der Definition dieses Feldtensors eine von einer Einbettung unabhängige Definition einer Mannigfaltigkeit voran. Dies wird hier umgangen, auch wenn die Begriffe der Karte und des Atlas einer solchen Beschreibung schon sehr nahe kommen.

In diesem Kapitel wird der Begriff des metrischen Feldtensors anhand von Landkarten veranschaulicht. Landkarten sind Lösungen des Problems, Ausschnitte einer Kugeloberfläche in einer Ebene darzustellen. Das ist mit längentreuen Darstellungen, die größere Bereiche der Erdoberfläche wiedergeben, nicht möglich. Besonders deutlich wird dies an Weltkarten. Hier kommt es immer zu deutlichen Verzerrungen und die Kunst besteht darin, die größten Verzerrungen in solche Bereiche zu legen, die für die konkrete Anwendung weniger relevant sind. Außerdem ist man je nach Anwendung daran interessiert, unterschiedliche Dinge auf einer Karte invariant zu lassen. Es gibt winkeltreue bzw. formtreue Darstellungen der Kugeloberfläche, die aber die Flächen unterschiedlich skalieren, und es gibt flächentreue Darstellungen, die aber die Formen sehr verzerren. Und dann gibt es natürlich sehr viele Optionen dazwischen.

Bei einer Weltkarte kommen neben den Verzerrungen noch sogenannte Koordinatensingularitäten hinzu. Dabei handelt es sich um singuläre Punkte oder Linien (typischerweise am Rand der Karte, z.B. an den Polen), bei denen die Bijektivität zwischen der Karte und dem dargestellten Gebiet verloren geht. Solche Koordinatensingularitäten treten immer dann auf, wenn die Topologie der darzustellenden Mannigfaltigkeit - hier der Kugeloberfläche - nicht mit der Topologie der darstellenden Mannigfaltigkeit - hier dem zusammenhängenden Ausschnitt einer euklidischen Ebene - übereinstimmt. Das Gebiet selbst hat natürlich keine Singularität - die Oberfläche einer Kugel ist glatt - sondern nur die Karte. In der Allgemeinen Relativitätstheorie treten solche Koordinatensingularitäten ebenfalls auf (z.B. ist der Horizont eines Schwarzen Lochs in der üblichen Darstellung der Schwarzschild-Koordinaten eine Koordinatensingularität). Allerdings gibt es auch Lösungen der Einstein'schen Gleichungen mit wirklichen (physikalischen) Singularitäten, z.B. das Zentrum eines Schwarzen Lochs, bei dem die Gezeitenkräfte unendlich werden. Es ist nicht immer leicht, eine Koordinatensingularität von einer physikalischen Singularität zu unterscheiden.

In den kommenden ersten Abschnitten wird zunächst der Begriff der Metrik anhand eines ortsabhängigen Kartenmaßstabs erläutert. Der Rest des Kapitels besteht im Wesentlichen aus Beispielen.

1 Ortsabhängige Landkartenmaßstäbe

Eine Landkarte enthält gewöhnlich eine Maßstabsangabe, beispielsweise eine Wanderkarte 1:25 000 oder eine Straßenkarte 1:250 000. Das bedeutet, eine Längeneinheit auf der Karte (z.B. ein Zentimeter) entspricht 25 000 bzw. 250 000 dieser Längeneinheiten in Wirklichkeit, das sind somit 250 m bzw. 2,5 km. Eine Maßstabsangabe setzt somit eine Distanz auf der Karte mit einer Distanz auf der von der Karte dargestellten Mannigfaltigkeit in Beziehung. Nichts anderes macht der metrische Tensor in der Differentialgeometrie, allerdings kommt hier eine Komplikation hinzu, die man auch schon bei Landkarten findet: die Orts- und Richtungsabhängigkeit des Maßstabs.

Der Maßstab einer Landkarte kann nicht überall derselbe sein, und wenn diese Landkarte große Gebiete darstellt oder sehr präzise sein soll (z.B. eine Seekarte für die Schifffahrt), sollte angegeben sein, wie die Korrektur zum allgemeinen Maßstab aussieht. Bei groben Weltkarten werden diese Korrekturen oft nicht angegeben, obwohl sie offensichtlich vorhanden sind. Abbildung 1 zeigt eine Weltkarte in einer sogenannten quadratischen Zylinderprojektion. Die x - und y -Achse entsprechen den Längen- und Breitengraden. Der Abstand zwischen zwei eingezeichneten Längengraden am Äquator beträgt rund 556 km (die Karte ist in 5° -Abschnitte unterteilt). Dieser Abstand verringert sich mit dem Breitengrad θ (vom Äquator aus gerechnet) um einen Faktor $\cos \theta$, beträgt also am 60. Breitengrad (das entspricht der Höhe von Helsinki) nur noch die Hälfte.



Abbildung 1: Eine Weltkarte in rechteckiger Form. Gleiche Breiten- und Längengrade entsprechen gleichen Abständen auf der Karte. Es ist offensichtlich, dass sich der Maßstab in Ost-West-Richtung in der Nähe der Pole ändert. Die Netzeinteilung ist in 5° -Schritten. Am Äquator entspricht einer Einheit rund 556 km, beim 60. Breitengrad ist es nur noch die Hälfte. (Quelle [1])

Der Maßstab einer solchen Karte hängt also sowohl vom Ort ab, an dem man die Beziehung zwischen Karte und Erdoberfläche bestimmen möchte, als auch von der Richtung. Bei der in Abb. 1 verwendeten Darstellung ändert sich der Maßstab nicht für Punkte auf demselben Längengrad, also in Nord-Süd-Richtung: Gleiche Breitengraddifferenzen entsprechen auch gleichen Abständen. Es ändern sich lediglich die Abstände zwischen den Längengraden als Funktion vom Breitengrad.

In dieser Darstellung wirken somit Länder am nördlichen Rand oder auch die Antarktis am südlichen Rand sehr in die Breite gestreckt. Andere Darstellungen versuchen diese Problematik zu beheben: Beispielsweise findet man bei der Mercator-Projektion (Abschnitt 5.2) dieselbe Streckung auch in Nord-Süd-Richtung, sodass die Proportionen in der Form wieder stimmen, allerdings wirken nun Gebiete in Polnähe wesentlich größer als in Äquatornähe, d.h. diese Karten skalieren die Flächen ungleich. Andere Projektionen, beispielsweise die Lambert-Projektion (Abschnitt 5.1), behalten die Flächeninhalte bei, sie stauchen aber zusätzlich die Abstände in Nord-Süd-Richtung, sodass die Gebiete noch flacher aussehen. Wir behandeln diese Darstellungen in den späteren Abschnitten. Hier soll als wesentlicher Punkt festgehalten werden, dass bei Landkarten die Maßstäbe (a) vom Ort abhängen können und (b) richtungsabhängig sein können. Außerdem muss die Streckung bzw. Stauchung nicht in Ost-West- oder Nord-Südrichtung erfolgen, sondern kann auch „schräg“ verlaufen. Der folgende Abschnitt beschreibt, wie man diese Art von Verzerrung lokal beschreiben kann und wie der Maßstab mit dem metrischen Tensor zusammenhängt.

2 Beschreibung einer Ellipse

In einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem lässt sich eine Ellipse algebraisch beispielsweise durch die folgenden zwei Formen darstellen:

$$\mathbf{x}(\varphi) = r(a \cos \varphi, b \sin \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi) \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2. \quad (1)$$

Die Äquivalenz dieser beiden Darstellungen erkennt man sofort, wenn man für x und y in der rechten Darstellung die Ausdrücke der linken Darstellung ($x = ar \cos \varphi$ und $y = br \sin \varphi$) einsetzt. Aus beiden

Darstellungen wird deutlich, dass es sich bei einer Ellipse um einen gestauchten oder gestreckten Kreis handelt: Multipliziert man die y -Komponente mit a/b erhält man die Gleichung eines Kreises. Sofern $a > b$ gilt, sind ar und br die große und die kleine Halbachse der Ellipse. Der zusätzliche Parameter r hat folgenden Grund: x und y sollen die Dimension einer Länge haben (hier handelt es sich um Abstände auf einer Karte), ebenso soll r die Dimension einer Länge haben (hier handelt es sich um einen Abstand auf der Erdkugel); die beiden Parameter a und b sollen dimensionslose Skalierungsfaktoren sein. Beispielsweise wären bei einer normalen Karte mit dem Maßstab 1:25 000 diese Parameter $a = b = 1/25\,000$.

Die Halbachsen sind entlang der Koordinatenachsen ausgerichtet. Für eine allgemeine Darstellung einer Ellipse kann man die Koordinaten noch um den Winkel α drehen, d.h.

$$x \mapsto x \cos \alpha - y \sin \alpha \quad \text{und} \quad y \mapsto x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (2)$$

und erhält die Form:

$$\frac{x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha - 2xy \cos \alpha \sin \alpha}{a^2} + \frac{x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha + 2xy \cos \alpha \sin \alpha}{b^2} = r^2 \quad (3)$$

oder

$$g_{11}x^2 + (g_{12} + g_{21})xy + g_{22}y^2 = r^2 \quad (4)$$

mit

$$g_{11} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} \quad g_{22} = \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{b^2} \quad g_{12} = g_{21} = \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cos \alpha \sin \alpha. \quad (5)$$

Aus dieser Darstellung finden wir:

$$g_{11} + g_{22} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad \text{und} \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \frac{1}{a^2 b^2}. \quad (6)$$

Wir erkennen somit: Gleichung 4 lässt sich in der Form

$$\mathbf{x}^T \cdot g \mathbf{x} = (x, y) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r^2 \quad (7)$$

schreiben, wobei Gl. 6 zum Ausdruck bringt, dass die Matrix g die Eigenwerte $\lambda_1 = 1/a^2$ und $\lambda_2 = 1/b^2$ hat (in Gl. 6 steht links die Spur - also die Summe der Eigenwerte - und rechts die Determinante von g - also das Produkt der Eigenwerte). Die Bilinearform in Gl. 3 bzw. 4 wird durch eine Drehung um $-\alpha$ diagonalisiert und auf die Form in Gl. 1 gebracht - da kam sie schließlich einmal her.

3 Tissot-Indikatrix und die Metrik

Wie wir in Abschnitt 1 gesehen haben, benötigen die meisten Landkarten (insbesondere alle Landkarten, die ein großes Gebiet der Erdkugel darstellen) einen ortsabhängigen Maßstab. Dieser Maßstab bringt zum Ausdruck, wie ein Kreis auf der Erdkugel in der Karte wiedergegeben wird, wobei diese Darstellung in führender Ordnung (d.h., wenn dieser Kreis klein ist im Vergleich zu der Skala, auf der sich der Maßstab verändert) den Kreis zu einer Ellipse verformt. Einen ortsabhängigen Maßstab können wir also dadurch kennzeichnen, dass wir an jedem Punkt der Karte die Parameter g_{ij} angeben, die nach Gl. 4 eine Ellipse charakterisieren. Genau dies ist aber der metrische Feldtensor. Das soll in diesem Abschnitt erläutert werden.

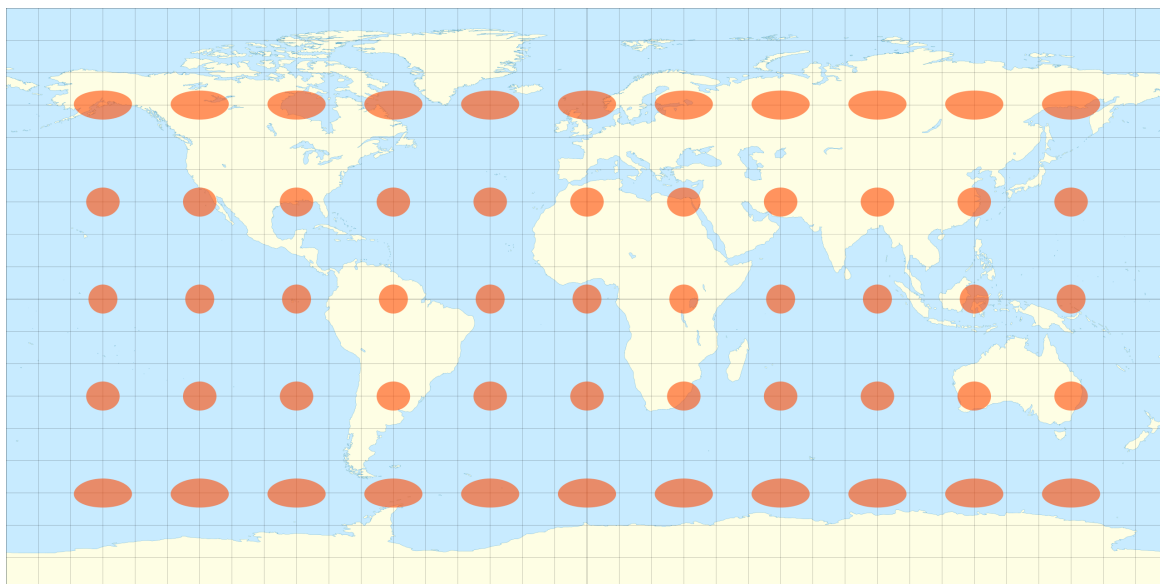


Abbildung 2: Tissot'sche Indikatrix zur quadratischen Zylinderprojektion. Die Ellipsen entsprechen den Darstellungen von Kreisen auf der Kugeloberfläche in der Karte (Quelle [2]).

Abbildung 2 zeigt nochmals eine quadratische Zylinderprojektion, bei der die Abschnitte entlang der Längengrade (also in Nord-Süd-Richtung) einen konstanten Abstand haben, d.h., hier werden die Längen- und Breitengrade in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Wie schon besprochen, führt diese Darstellung zu einer Verzerrung in Ost-West-Richtung in Abhängigkeit vom Breitengrad: Je näher der Breitengrad an den Polen ist, umso größer ist die Dehnung im Vergleich zum Äquator, wo der Maßstab in alle Richtungen derselbe ist. Ein hypothetischer Kreis auf der Erde (in diesem Fall ein Kreis mit einem Radius von rund $r = 500$ km) wird in der Karte durch eine Ellipse wiedergegeben. Diese Ellipse entartet am Äquator zu einem Kreis (dort sind die Maßstäbe in alle Richtungen gleich) und wird in Ost-West-Richtung gestreckt, je weiter man sich vom Äquator entfernt. Auf dem 60. Breitengrad ist die große Halbachse bereits doppelt so groß wie die kleine Halbachse. Beide Halbachsen entsprechen jedoch immer noch auf der Erdkugel einer Strecke von 500 km. Man bezeichnet diese Darstellung des ortsabhängigen Kartenmaßstabs auch als Tissot'sche Indikatrix. Wir nennen die Kartenabbildung von Kreisen auf der Kugeloberfläche dann Tissot-Ellipsen. Die Charakterisierung einer Tissot-Ellipse an einem bestimmten Ort auf der Karte durch die Parameter der Ellipse in Form der Matrix g_{ij} bezeichnet man als metrischen Feldtensor. „metrisch“ bedeutet, dass dieses Objekt die Maßstäbe zur Bestimmung von Entfernungen kodiert, „Feld-“ bedeutet, dass dieses Objekt an jedem Ort definiert und von Ort zu Ort verschieden sein kann, und „Tensor“ bedeutet, dass es sich um eine Matrix handelt, die die Richtungsabhängigkeit angibt.

Zur Bestimmung der Parameter a und b können wir folgendermaßen vorgehen (ein allgemeines Verfahren, wie man aus einer Parameterdarstellung der Kugeloberfläche diese Parameter gewinnt, beschreiben wir in Abschnitt 4). Die Karte habe eine Breite B (hier ungefähr $B = 150$ mm) und eine Höhe $H = B/2$ (da die Ost-West-Richtung in 360 Grade, die Nord-Süd-Richtung aber nur in 180 Grade unterteilt ist, und beide Richtungen dieselbe Skala haben sollen). Der Erdumfang am Äquator beträgt $U = 40\,000$ km (wir gehen hier von einer idealen Kugel mit dieser Länge eines Großkreises aus). Allgemein: Wenn eine Strecke auf einer Kugel (hier der Umfang) die Länge U hat und auf einer Karte im Abstand B (hier der Breite der Karte) dargestellt wird, dann hat die Karte einen Maßstab von $1 : U/B$.

Entfernt man sich nun vom Äquator in Richtung der Pole ändert sich dieser Maßstab in Ost-West-Richtung (d.h. für Punkte auf demselben Breitengrad) und der Abstand zwischen zwei Längengraden bei einem Breitengrad θ wird um den Faktor $\cos \theta$ kürzer. Wir erhalten also für den Maßstab in Ost-West-Richtung am Breitengrad θ den Wert $(U/B) \cos \theta$. Damit folgt:

$$a(\theta, \varphi) = \frac{B}{U \cos \theta} \approx \frac{1}{266\,666\,667 \cos \theta} \quad \text{und} \quad b(\theta, \varphi) = \frac{B}{U} \approx \frac{1}{266\,666\,667}. \quad (8)$$

Diese Parameter hängen nicht von φ (dem Längengrad) ab sondern nur vom Breitengrad. Der Maßstab am Äquator für obige Karte (mit der Breite 150 mm) wäre somit 1 : 266 666 667. Der metrische Feldtensor wäre

$$g = \begin{pmatrix} \left(\frac{U}{B}\right)^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & \left(\frac{U}{B}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Man erkennt, dass g_{11} bei $\theta = \pm 90^\circ$ (also an den Polen) verschwindet. Hierbei handelt es sich um eine typische Koordinatensingularität, bei der ein einzelner Punkt (der Nord- bzw. der Südpol) auf eine ganze Achse (den oberen bzw. unteren Rand der Karte) abgebildet wird. Der Nord- bzw. Südpol sind auf der Kugel natürlich vollkommen reguläre Punkte.

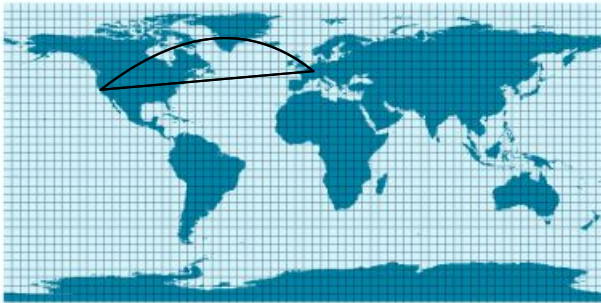


Abbildung 3: Die kürzeste Verbindung auf der Kugeloberfläche zwischen zwei Punkten (z.B. Frankfurt und San Francisco) erscheint auf einer Weltkarte als gekrümmte Linie. Allerdings bedarf es weniger Tissot-Ellipsen, um diese gekrümmte Linie zu überdecken als bei der geraden Verbindungslinie. (Abbildungsquelle [1])

4 Parameterdarstellungen

Unter einer Parameterdarstellung einer (offenen Teilmenge einer) 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit (z.B. einer Kugeloberfläche), eingebettet in den 3-dimensionalen Raum, versteht man eine Abbildung der Form $(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v)$, wobei diese Abbildung lokal bijektiv sein soll. Wir betrachten zunächst nochmals das Beispiel der Kugeloberfläche, die durch die Längen- und Breitengrade parametrisiert wird.

Eine Kugel lässt sich in Kugelkoordinaten durch die beiden Winkel θ und φ beschreiben:

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (R \cos \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \theta). \quad (10)$$

Im Gegensatz zur üblichen Wahl von Kugelkoordinaten wurde hier die Parametrisierung so gewählt, dass der Winkel $\theta = 0$ dem Äquator entspricht und $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ dem Nord- bzw. Südpol. φ kann die Werte $-\pi$ bis $+\pi$ annehmen, wobei $\varphi = 0$ den 0-Meridian bezeichnet. Damit entsprechen θ und φ dem Breiten- bzw. Längengrad. R ist der Radius der Kugel, bei der Erde ist somit $R = 40\,000$ km.

Eine sehr kleine (infinitesimale) Verschiebung $\Delta \mathbf{x}$ auf der Erdkugel, bedeutet für die Längen- und Breitengrade:

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \Delta \varphi, \quad (11)$$

bzw.

$$(\Delta \mathbf{x})^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right) (\Delta \theta)^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right) \Delta \theta \Delta \varphi + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right) (\Delta \varphi)^2. \quad (12)$$

Durch Vergleich mit Gl. 4 erkennen wir die folgenden Beziehungen:

$$g_{\theta\theta} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right) \quad g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right) \quad g_{\varphi\varphi} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right). \quad (13)$$

Berechnen wir die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = R(-\cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi \sin \theta, \cos \theta) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = R(-\sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \cos \theta, 0) \quad (14)$$

so folgt:

$$g_{\theta\theta} = R^2 \quad g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0 \quad g_{\varphi\varphi} = R^2 \cos^2 \theta. \quad (15)$$

Damit haben wir bezüglich der Parametrisierung durch die Längen- und Breitengrade den metrischen Feldtensor gefunden. Allerdings haben wir in Abschnitt 3 die Parametrisierung durch einen Maßstab auf unserer Karte angeben, d.h. die x - und y -Koordinaten auf der Karte. Wir müssen also noch die Beziehungen zwischen den Längen- und Breitengraden und den x - und y -Koordinaten der Karte finden. Die Breite B der Karte entspricht einem Vollkreis von 360° oder 2π , daher folgt

$$\varphi = \frac{2\pi}{B} x \quad \text{und} \quad \theta = \frac{2\pi}{B} y \quad \text{bzw.} \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{B} \Delta x \quad \text{und} \quad \Delta \theta = \frac{2\pi}{B} \Delta y. \quad (16)$$

Setzen wir diese Beziehungen in Gl. 12 ein und nutzen aus, dass $U = 2\pi R$, folgen die Beziehungen aus Abschnitt 3.

Parametrisieren wir die Kugeloberfläche (oder ganz allgemein eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit im 3-D-Raum) in der Form (u, v) , dann folgt

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \Delta v, \quad (17)$$

bzw.

$$(\Delta \mathbf{x})^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right) (\Delta u)^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \Delta u \Delta v + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) (\Delta v)^2 \quad (18)$$

und somit:

$$g_{uu} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right) \quad g_{uv} = g_{vu} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right) \quad g_{vv} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right). \quad (19)$$

Die beiden Vektoren $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ spannen eine Fläche auf. Für das Quadrat dieser Fläche gilt:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right)^2 = \sum_m \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right)_m \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right)_m \quad (20)$$

$$= \sum_{m,i,j,k,l} \epsilon_{mij} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \epsilon_{mkl} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_l}{\partial v} \quad (21)$$

$$= \sum_{i,j,k,l} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_l}{\partial v} \quad (22)$$

$$= \sum_{ij} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_j}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right) \quad (23)$$

$$= \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) \left(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_j}{\partial v} \right) - \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v} \right) \left(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial v} \frac{\partial x_j}{\partial u} \right) \quad (24)$$

$$= g_{uu} g_{vv} - g_{uv} g_{vu} = \det g. \quad (25)$$

Das bedeutet, $\sqrt{\det g}$ gibt den Faktor zwischen einer Fläche auf der Kugeloberfläche und einer Fläche auf der Karte an: Seien $\Delta \mathbf{x}_u$ und $\Delta \mathbf{x}_v$ zwei infinitesimale Verschiebungen auf der Kugeloberfläche, dann gilt:

$$\Delta \mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \Delta u \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \Delta v \quad (26)$$

und somit:

$$|\Delta \mathbf{x}_u \times \Delta \mathbf{x}_v| = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v = \sqrt{\det g} \Delta u \Delta v. \quad (27)$$

Wenn $\sqrt{\det g}$ konstant ist (also nicht von dem Ort u, v auf der Karte abhängt), bezeichnet man die Karte als flächentreu. In diesem Fall haben gleiche infinitesimale Flächen $\Delta u \Delta v$ auf der Karte auch gleiche Flächen auf der Kugeloberfläche (und umgekehrt). Eine Karte heißt winkeltreu oder formtreu bzw. konform, wenn

$$g = a(u, v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

In diesem Fall werden Kreise wieder auf Kreise abgebildet (vgl. Gl. 4), die allerdings um den möglicherweise ortsabhängigen Faktor $a(u, v)$ skaliert sind.

5 Zylinder-Projektionen

Unter einer Zylinderprojektion versteht man eine Abbildung der Kugeloberfläche auf einen Zylinder, der am Äquator (gelegentlich auch an anderen Großkreisen) um die Kugel gelegt wird. Die x -Achse entspricht immer den Längengraden und auf der y -Achse sind die Breitengrade aufgetragen. Verschiedene Zylinderprojektionen unterscheiden sich im Wesentlichen in der Skala, die für die Breitengrade gewählt wird. Die quadratische Zylinderprojektion wählt die y -Achse direkt proportional zu den Breitengraden und zwar mit derselben Skala, wie die Längengrade. Daher hat eine solche Karte immer das Verhältnis Breite:Höhe=2:1.

Der Nachteil einer solchen Karte ist, dass die Umrissse von Flächen verzerrt werden - die Flächen erscheinen an den Polen in die Breite gezogen - und dass die Flächen zu den Polen hin größer erscheinen. Beide „Fehler“ lassen sich nicht gleichzeitig beheben. Es gibt aber zwei bekannte Zylinderprojektionen, bei denen die Fehler einzeln behoben werden: Die Mercator-Projektion ist „formtreu“ oder auch konform, d.h., die Form der Flächen bleibt erhalten, allerdings werden die Flächen zu den Polen hin immer größer; die Lambert-Projektion ist „flächentreu“, d.h., der Flächeninhalt bleibt erhalten, allerdings werden die Formen der Flächen zu den Polen hin verzerrt.

5.1 Die Lambert-Projektion

Bei der Lambert-Projektion (genauer sollte man von der zylindrischen Lambert-Projektion sprechen, da Lambert dieses Darstellungsverfahren auch auf Kegelmäntel erweitert hat) handelt es sich um eine rechteckige Zylinderprojektion, bei der ein Punkt der Kugeloberfläche senkrecht, ausgehend von der Erdachse, auf die Zylinderfläche projiziert wird. Seine Höhe auf der Zylinderfläche entspricht also seiner z -Koordinate in Kugelkoordinaten. Die Gleichungen 16 werden nun abgewandelt zu:

$$\varphi = \frac{2\pi}{B} x \quad \text{und} \quad \sin \theta = \frac{2\pi}{B} y \quad \text{bzw.} \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{B} \Delta x \quad \text{und} \quad \cos \theta \Delta \theta = \frac{2\pi}{B} \Delta y. \quad (29)$$

Damit folgt nun:

$$g_{yy} = \frac{U^2}{B^2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad g_{xy} = g_{yx} = 0 \quad g_{xx} = \frac{U^2}{B^2} \cos^2 \theta. \quad (30)$$

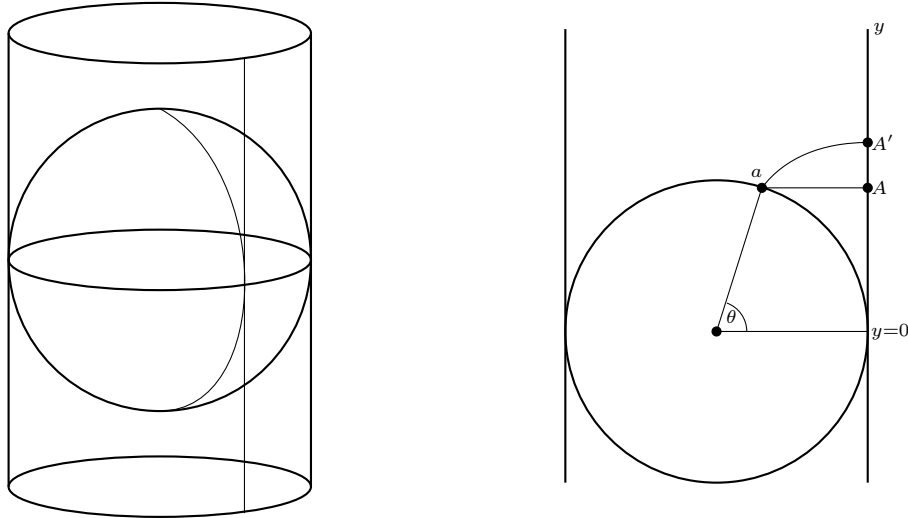


Abbildung 4: Zylinderprojektionen. (links) Bei einer Zylinderprojektion wird eine Kugeloberfläche auf einen Zylinder projiziert, der um einen Großkreis (meist den Äquator) der Kugel gelegt wird, sodass Längengrade in äquidistante senkrechte Geraden und Breitengrade in Graden parallel zu der Projektion des Großkreises abgebildet werden. (rechts) Die einzige Freiheit besteht in den Abständen der Breitengrade, d.h. in der Beziehung zwischen θ und der y -Achse. Die Lambert-Projektion ($a \mapsto A$) projiziert Punkte senkrecht auf die Zylinderfläche, d.h. sie behalten ihre Höhe. Bei der quadratischen Zylinderprojektion ($a \mapsto A'$) wird der Längengrad „abgerollt“.

Wir erkennen, dass die Wurzel aus der Determinante von g , die in zwei Dimensionen die Änderung in der Skala für infinitesimale Flächen angibt (vgl. Gl.27), konstant ist (Faktor U^2/B^2).¹ Das bedeutet, eine infinitesimale Fläche df auf der Erdkugel ist um den konstanten Faktor R^2/B^2 größer, als die entsprechende Fläche auf der Karte. Infinitesimal gleiche Flächen auf der Erdkugel werden somit durch gleiche Flächen auf der Karte wiedergegeben. In diesem Sinne sagt man, die Lambert-Projektion ist flächenerhaltend oder flächentreu.

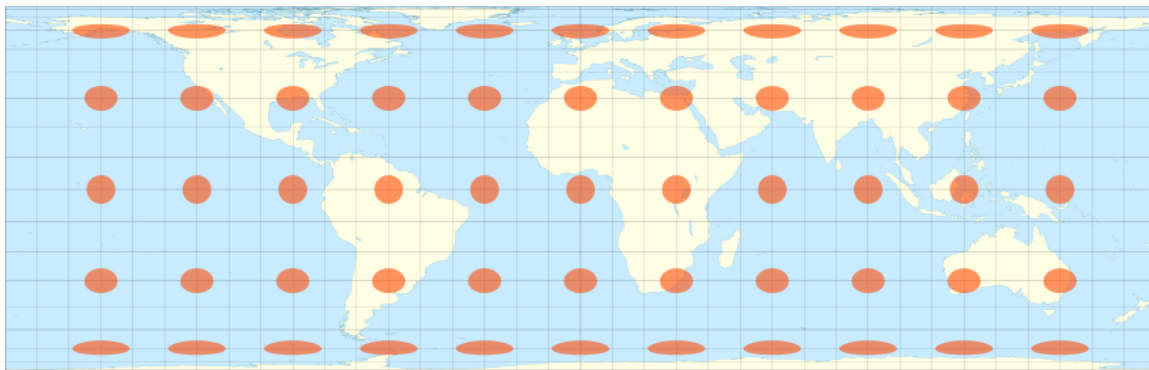


Abbildung 5: Tissot-Darstellung der zylindrischen Lambert-Projektion. (Abbildungsquelle [3])

Abbildung 5 zeigt eine zylindrische Lambert-Projektion der Erdkugel mit Tissot-Ellipsen. Im Vergleich zu Abb. 2 fällt auf, dass die Ellipsen in Polnähe nun flacher sind. Die Ellipsen nehmen in der

¹Die Beziehung zwischen der Wurzel der Determinante und dem Skalenfaktor eines infinitesimalen (Hyper-)Volumens gilt in allen Dimensionen. Daher findet man bei invarianten Volumenintegralen in d Dimensionen auch immer $\sqrt{\det g} d^d x$ als Integrationsmaß.

Höhe um denselben Faktor ab, um den sie in der Breite zunehmen. Dadurch bleibt der Flächeninhalt der Ellipsen überall derselbe. Allerdings werden die Gebiete in Polnähe auch stärker in der Höhe zusammengepresst und im Vergleich zu einer formgetreuen Darstellung verzerrt. Nun werden beide diagonalen Komponenten im metrischen Tensor an den Polen singular.

5.2 Die Mercator-Projektion

Obwohl man die Mercator-Projektion als rechteckige Zylinderprojektion bezeichnet, handelt es sich im strengen Sinne nicht um eine Projektion, da die Abbildung eines Punkts auf der Kugeloberfläche auf einen Punkt auf der Zylinderoberfläche keine geometrische Konstruktion ist. Trotzdem besteht auch hier die einzige Veränderung zur quadratischen Zylinderprojektion in der Beziehung zwischen der y -Achse und dem Breitengrad.

Die Mercator-Projektion ist lokal winkel- und formtreu. Diese beiden Begriffe sind insofern äquivalent, als aus lokaler Winkeltreue die lokale Formtreue folgt und umgekehrt: Wenn zwei Dreiecke dieselben Winkel haben, haben sie auch die gleiche Form bzw. sind sich ähnlich, d.h., die Verhältnisse von je zwei Seitenlängen sind gleich. Die Mercator-Projektion ist nach Gerhard Mercator (1512-1597) benannt, der diese Projektionen um 1570 zum ersten Mal für Weltkarten verwendete. Die lokale Winkeltreue der Karte war früher in der Seefahrt von Vorteil, da ein bestimmter Kurs nach dem Kompass (der den Winkel zu einem Längengrad angibt) einer geraden Linie entspricht. Über große Abstände ist das aber nicht die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Großkreise (die die kürzeste Verbindung darstellen) werden auf Mercator-Karten nicht als Geraden dargestellt.

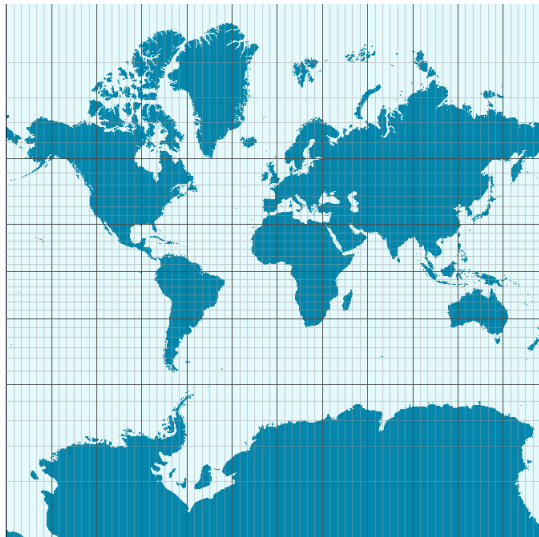


Abbildung 6: Eine Weltkarte in Mercator-Darstellung. In Äquatornähe gleicht diese Karte der quadratischen Zylinderprojektion (Abb. 1). Allerdings wird der Maßstab in Polnähe nicht nur in die Breite sondern auch in die Höhe gestreckt. Dadurch erscheinen die Umrisse von kleineren Ländern zwar ähnlich wie auf einer lokalen Projektion, also entsprechend ihrer lokalen Form, doch wirken die Länder im Vergleich zu Gebieten am Äquator übertrieben groß. Afrika ist in Wirklichkeit über fünfzehnmal größer als Grönland, Australien ist viermal größer. Afrika ist mehr als doppelt so groß wie das Landgebiet der Antarktis. (Quelle [4])

Damit eine Karte formtreu ist, müssen lokal die Abstände in x -Richtung und in y -Richtung um denselben Maßstab verändert werden, d.h., die beiden diagonalen Komponenten in der Metrik sind gleich (aber ortsabhängig). Da wir bei der Parametrisierung nur die Beziehung zwischen dem Breitengrad θ und der Höhe y verändern können, ist eine Beziehung gesucht, sodass

$$g = \frac{U^2}{B^2} \cos^2 \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\theta = \frac{2\pi}{B} \cos \theta \Delta y. \quad (31)$$

Zur Bestimmung von $y(\theta)$, der y -Koordinate auf der Karte als Funktion des Breitengrads, haben wir somit das Integral

$$y(\theta) = \frac{B}{2\pi} \int_0^\theta \frac{1}{\cos \theta'} d\theta' \quad (32)$$

zu lösen. Die Lösung lautet:

$$y(\theta) = \frac{B}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}. \quad (33)$$

Zur Lösung des Integrals: Man erweitere den Integranden im Zähler und Nenner um $\cos \theta'$, ersetze im Zähler $\cos \theta' d\theta' = d \sin \theta'$ und im Nenner $\cos^2 \theta' = 1 - \sin^2 \theta'$. Mit einer Partialbruchzerlegung, $\frac{1}{(1 - \sin^2 \theta')} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta'} + \frac{1}{1 + \sin \theta'} \right)$ kann man das Integral leicht lösen.

Für kleine Werte von θ , also in Polnähe, verhält sich obige Beziehung wie in Gl. 16, aber für $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ divergiert dieser Ausdruck, d.h., der Nord- bzw. Südpol sind auf einer Mercator-Karte im Unendlichen. Daher hören die meisten Mercator-Karten auch etwas oberhalb des 80. Breitengrads auf (Abb. 6 endet ungefähr beim 83. Breitengrad)

6 Das UNO-Emblem



Abbildung 7: Das Logo der Vereinten Nationen. In diesem Fall handelt es sich um eine sogenannte Azimutalprojektion. Es wird eine Ebene an einen Punkt der Kugel gelegt (in diesem Fall den Nordpol) und die Erdkugel wird in Polarkoordinaten um diesen Punkt herum dargestellt. Im vorliegenden Fall sind die Breitengrade von 90° -Nord bis rund 50° -Süd wiedergegeben. Die Einteilung der Breitengrade ist in 30° -Schritten und die Breitengrade sind äquidistant dargestellt. (Quelle [5])

Die Flagge der Vereinten Nationen (Abb. 7) verwendet eine Darstellung der Erdkontinente in Polarkoordinaten - eine sogenannte Azimutalprojektion. In diesem Fall wird eine Ebene tangential an einen Punkt der Kugel gelegt (sehr häufig, wie auch bei dem UN-Logo, an den Nordpol) und die Kugeloberfläche wird in Polarkoordinaten auf diese Fläche projiziert. Diese Darstellung (Nordpol als zentraler Punkt) wird auch hier gewählt. Der Polarwinkel φ entspricht dem Längengrad (allerdings wird im UN-Logo der Längengrad 0 nach unten projiziert). Die Breitengrade sind dann konzentrische Kreise um den Nordpol. Der Abstand zwischen Breitengraden ist der einzige Freiheitsgrad, der hier gewählt werden kann. Im UN-Logo sind die Breitengrade äquidistant angeordnet. Es gibt auch flächentreue Darstellungen, bei denen der Abstand zwischen Breitengraden von Nord nach Süd abnimmt. Theoretisch gibt es auch eine konforme Abbildung, bei der die Flächenform erhalten bleibt, diese würde sich aber nach Unendlich erstrecken und die Länder südlich des Äquators wären übertrieben groß dargestellt. Azimutale Projektionen sind nur an einem Punkt der Kugeloberfläche singulär, in diesem Fall am Südpol.

Polarkoordinaten sind 2-dimensionale Koordinaten in der Ebene, gegeben durch

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \quad (34)$$

(Wir wählen hier die übliche Konvention, bei der $\varphi = 0$ dem Punkt $(x, y) = (1, 0)$ entspricht. Die UN-Darstellung erhält man aus der Koordinatenwahl $(x, y) = (r \sin \varphi, -r \cos \varphi)$.) Der Winkel φ entspricht direkt dem Längengrad. Der Breitengrad θ auf der Kugeloberfläche entspricht hier dem Radius, d.h. je nach Wahl der Darstellung ist $r = r(\theta)$ eine andere Funktion.

Für Polarkoordinaten gilt die Beziehung:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta r)^2 + r^2(\Delta\varphi)^2. \quad (35)$$

Damit ist

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (\Delta s)^2 = g_{rr}(\Delta r)^2 + (g_{r\varphi} + g_{\varphi r})\Delta r\Delta\varphi + g_{\varphi\varphi}(\Delta\varphi)^2. \quad (36)$$

Wir erhalten diese Metrik wieder aus der Forderung

$$g_{uu} = \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial u} \quad g_{uv} = g_{vu} = \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial v} \quad g_{vv} = \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(u,v)}{\partial v} \quad (37)$$

mit den Tangentialvektoren:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(r,\varphi)}{\partial r} = (\cos \varphi, \sin \varphi) \quad \frac{\partial \mathbf{x}(r,\varphi)}{\partial \varphi} = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi). \quad (38)$$

Wir müssen nun noch die Beziehung zwischen r auf unserer Karte (in Polarkoordinaten) und den Breitengraden θ auf der Kugeloberfläche herstellen. Die Winkel φ sind in beiden Fällen gleich. Wenn wir den Durchmesser der Karte mit D bezeichnen, entspricht D einem Vollkreis, sodass $r = D/(2\pi)\theta$. Umgekehrt entspricht auf der Erdkugel der Differenz von Breitengraden $\Delta\theta$ eine Strecke von $\Delta l = R\Delta\theta = (U/2\pi)\Delta\theta$. Insgesamt erhalten wir somit:

$$\Delta r = \frac{D}{2\pi}\Delta\theta = \frac{D}{2\pi} \frac{2\pi}{U}\Delta l = \frac{D}{U}\Delta l, \quad (39)$$

und misst man die Länge l vom Nordpol aus zu einem Punkt auf der Erdkugel, gilt auch $r = \frac{D}{U}l$.

7 Kuriositäten

7.1 Tissot-Figuren in höheren Dimensionen

In drei Dimensionen wird eine Tissot-Figur zu einem Ellipsoid. Ein Ellipsoid ist gekennzeichnet durch die drei Hauptachsen sowie die Lage im Raum (nochmals drei Winkel, d.h. sechs Parameter). Dies lässt sich durch eine symmetrische 3×3 -Matrix g_{ij} charakterisieren, sodass die Ellipsoid-Gleichung die Form

$$(\Delta s)^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}\Delta x_i\Delta x_j \quad (40)$$

annimmt. Diese Gleichung bleibt unverändert auch in höheren Dimensionen, lediglich die Indizes durchlaufen eine größere Indexmenge. Da g symmetrisch (und damit selbst-adjungiert) ist, kann man es durch eine Rotation diagonalisieren. Die Eigenwerte sind $\lambda_i = 1/a_i^2$, wobei a_i die Hauptachsen des verallgemeinerten Ellipsoids sind, und die Rotation charakterisiert die Lage dieser Hauptachsen im Raum.

7.2 Tissot-Hyperbeln in Minkowski-Räumen

In $(1 + 1)$ -Raumzeit-Dimensionen handelt es sich bei den Tissot-Figuren um Hyperbeln und die Vorgabe der Lichtkegelstruktur. Die Kreisgleichung wird ersetzt durch

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = \text{const.} \quad (41)$$

Ist die Konstante positiv, spricht man von zeitartigen Ereignissen (die sich in ihrer Lage um Δt und Δx unterscheiden). Ist sie negativ nennt man die Ereignisse raumartig, und ist sie null, sind die Ereignisse lichtartig. In diesen Koordinaten werden die Lichtkegel durch Diagonalen dargestellt und die Skala ist in zeitartige und raumartige Richtungen dieselbe. In einer allgemeinen Karte können die Lichtkegel lokal gedreht sein und die Skalen auch unterschiedlich. In höher dimensional Räumen werden die Lichtkegel zu verallgemeinerten Kegelmantelflächen, die zeitartigen „Hyperbeln konstanter Eigenzeiten“ werden zu „Hyperbelschalen konstanter Eigenzeiten“, die raumartigen Hyperbeln konstanter Abstände werden zu Rotationskörpern, die durch Drehung um die Zeitachse entstehen.

7.3 Die Lambert-Karte und ein Theorem von Archimedes

Eines der drei bekannten mathematischen Probleme der Antike war die geometrische Konstruktion - nur mit Zirkel und Lineal - eines Quadrats mit derselben Fläche wie ein vorgegebener Kreis bzw. letztendlich die Konstruktion der Zahl π aus einer Einheitslänge. Der Beweis, dass dies nicht möglich ist, erfolgte erst 1882 durch Ferdinand Lindemann. Genauer hat Lindemann bewiesen, dass π transzendent ist (also keine Lösung einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist); dass sich transzendente Zahlen nicht geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen, war schon vorher bekannt.

Archimedes konnte jedoch sehr viele Theoreme beweisen, bei denen krummlinige Flächen mit Quadraten oder Rechtecken in Beziehung gebracht wurden. Eines dieser Theoreme besagt, dass die Oberfläche einer Kugel genauso groß ist wie die Mantelfläche eines Zylinders, der am Äquator um die Kugel gewickelt ist und dieselbe Höhe wie die Kugel hat. Heute würden wir das folgendermaßen beweisen: Die Oberfläche einer Kugel vom Radius R ist $4\pi R^2$, ein um die Kugel gewickelter Zylinder hat die Grundseite $U = 2\pi R$ (der Umfang der Kugel) und die Höhe $2R$ und damit die Fläche $2R \cdot 2\pi R = 4\pi R^2$. Manchmal heißt es auch, dass die Gesamtfläche des umschriebenen Zylinders gleich $3/2$ mal die Kugeloberfläche ist: Die beiden Deckel haben zusammen eine Fläche von $2 \cdot \pi R^2$; womit man auch dieses Ergebnis leicht erhält.

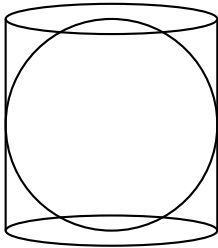


Abbildung 8: Die Archimedes-Figur. Angeblich wollte Archimedes, dass diese Figur auf seinem Grabstein abgebildet wird. Dargestellt ist eine Kugel, die einem Zylinder gleicher Höhe eingeschrieben ist. Archimedes konnte beweisen, dass die Oberfläche der Kugel gleich der Mantelfläche des Zylinders ist.

Angeblich wollte Archimedes auf seinem Grabstein die Figur aus Abb. 8 abgebildet haben, weil er die Beziehung zwischen der Kugeloberfläche und der Mantelfläche des Zylinders als seine größte Entdeckung ansah. Eigentlich hat Archimedes sogar mehr bewiesen, als dass die Gesamtflächen gleich sind; er hat bewiesen, dass kleine Ausschnitte der Kugeloberfläche, die man im Sinne der Lambert-Projektion von der Zylinderachse aus auf die Zylinderfläche projiziert, auf Flächen derselben Größe abgebildet werden. Damit hat er die Flächentreue der Lambert-Projektion bewiesen.

Archimedes hat bei vielen seiner mathematischen Beweise sehr physikalisch gedacht und oft infinitesimale Flächen in Gedanken auf eine Balkenwaage gelegt und die Hebelgesetze genutzt, um Beziehungen zwischen diesen Flächen abzuleiten. Sehr oft kann man solche Operationen mit dem Strahlensatz und dem Satz von den gleichen Verhältnissen von sich entsprechenden Seitenlängen in ähnlichen Dreiecken in Verbindung bringen. Der folgende Beweis nutzt nur diese beiden Sätze.

In Abbildung 9 (rechts) sind die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C$ ähnlich. Das bedeutet:

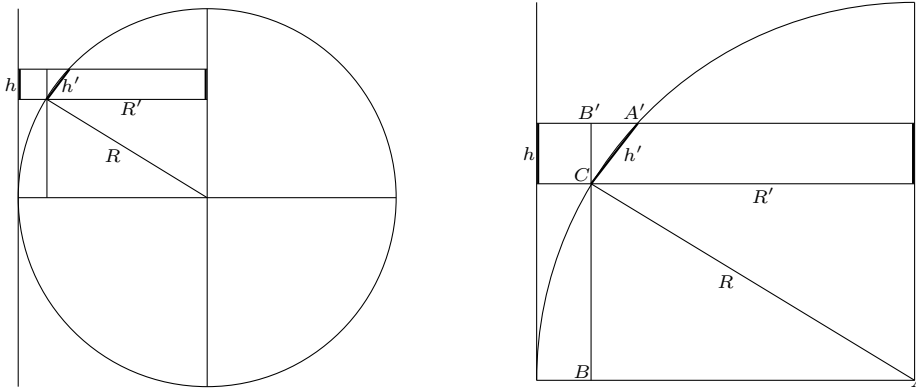


Abbildung 9: Zum geometrischen Beweis der Flächentreue der Lambert-Projektion. Die rechte Seite zeigt den Ausschnitt links-oben vergrößert. Da die Strecke $A'C$ senkrecht auf AC steht, sind die Dreiecke ABC und $A'B'C$ ähnlich. Daraus folgt $R'/R = h/h'$.

$h/h' = R'/R$. Stellen wir uns nun vor, die infinitesimale Strecke h auf dem Zylinder wird einmal um die zentrale Zylinderachse rotiert, dann ist die überstrichene Fläche gleich $2\pi Rh$. Die entsprechende Fläche für das Streckenstück h' ist $2\pi h'R'$. Doch wegen $h/h' = R'/R$ folgt, dass diese beiden Flächen gleich sind. Diese Aussage gilt nicht nur für den vollen Rotationskörper, sondern auch für die überstrichenen Flächen bei beliebig kleinen Rotationswinkel.

Literatur

- [1] Wikipedia „Kartennetzentwurf“:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zylinderprojektion_quadratische_plattkarte_kl.jpg
- [2] Wikipedia „Tissot'sche Indikatrix“:
https://de.wikipedia.org/wiki/Tissotsche_Indikatrix
- [3] Wikipedia „Projection équivalente cylindrique de Lambert“;
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/cb/Tissot_indicatrix_world_map_Lambert_cyl_equal-area_proj.svg/880px-Tissot_indicatrix_world_map_Lambert_cyl_equal-area_proj.svg.png
- [4] Wikipedia „Gerhard Mercator“;
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/fa/Mercator-proj.png>
- [5] UN-Logo:
https://pngimg.com/uploads/un/un_PNG20.png