

# SRT - Effekte

Thomas Filk; Universität Freiburg

In diesem Kapitel sollen einige Effekte beschrieben werden, die sich aus der Lorentz-Invarianz der Minkowski-Raumzeit ergeben. Dazu zählen die Zeitdilatation, die Lorentz-Kontraktion und der relativistische Doppler-Effekt (longitudinal und transversal). Dem sogenannten Zwillings-Paradoxon ist ein eigenes Kapitel gewidmet (Kapitel [Das Zwillingsparadoxon](#)).

Anschließend deuten wir an, wie sich der Lagrange-Formalismus auf die Relativitätstheorie verallgemeinern lässt und was der zum Ortsvektor kanonisch konjugierte Impuls ist. In diesem Zusammenhang definieren wir auch den Begriff der Eigenzeit. Den Abschluss bildet ein von Einstein erdachtes Gedankenexperiment, das eine elegante Herleitung der bekannten Beziehung  $E = mc^2$  erlaubt.

## 1 Zeitdilatation

Wir behandeln zunächst das Phänomen der Zeitdilatation. Schon bei der Pendelkette hatten wir gesehen, dass aus der Lorentz-Invarianz der Feldgleichungen folgt, dass eine relativ zum Äther bewegte Breather-Lösung langsamer schwingt bzw. eine größere Schwingungsperiode hat, als eine Breather-Lösung, die relativ zum Äther ruht. Doch aus dem Relativitätsprinzip sollte folgen, dass ein Beobachter in dem bewegten System umgekehrt ebenfalls den Eindruck hat, dass die Uhren in dem ruhenden System langsamer gehen. Wir wollen nun untersuchen, was genau damit gemeint ist und weshalb dieses Phänomen tatsächlich auftritt.

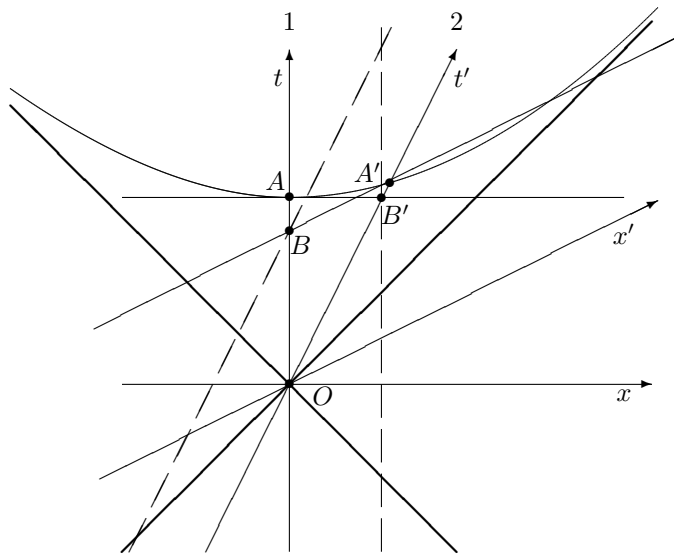


Abbildung 1: Für den ruhenden Beobachter 1 scheint die bewegte Uhr von Beobachter 2 langsamer zu gehen ( $B'$  liegt vor  $A'$ ). Denselben Eindruck hat umgekehrt auch der Beobachter 2 von der Uhr von Beobachter 1 ( $B$  liegt vor  $A$ ). Die gestrichelten Linien beziehen sich auf jeweils einen weiteren Beobachter in System 1 bzw. System 2. Diese Beobachter lesen ihre (mit 1 bzw. 2 synchronisierten) Uhren bei den Ereignissen  $B'$  und  $B$  ab.

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme mit den jeweiligen Koordinaten  $(x, t)$  und  $(x', t')$  (vgl. Abb. 1). Bei dem Ereignis  $O$  treffen sich die beiden Beobachter im Ursprung ihrer jeweiligen Systeme und synchronisieren ihre Uhren jeweils auf  $t_0 = 0$ . Wir betrachten nun die Situation zunächst aus der Perspektive des Inertialsystems von Beobachter 1. Für diesen Beobachter zeigt die Uhr bei Ereignis  $A$  auf die Zeit  $t$ . In seinem Inertialsystem ist das Ereignis  $B'$  gleichzeitig zu  $A$ , hat also

ebenfalls die Koordinate  $t$ , denn bei diesem Ereignis  $B'$  schneidet die Weltlinie von Beobachter 2 die (in der Zeichnung waagerechte) „Gleichzeitigkeitslinie“ von Beobachter 1 zur Zeitkoordinate  $t$ . Wir wissen jedoch, dass für Beobachter 2 erst im Ereignis  $A'$  dieselbe Zeit vergangen ist wie für Beobachter 1 zum Ereignis  $A$ . Das Ereignis  $A'$  ist aber später als  $B'$ . Das bedeutet, dass die Uhr von Beobachter 2 bei Ereignis  $B'$  noch nicht so viele Zeittakte anzeigt, wie zum Zeitpunkt  $A'$  (nämlich  $t$ ) und damit die Uhr von Beobachter 1 zum Zeitpunkt  $t$ . Beobachter 1 hat also den Eindruck, die Uhr von Beobachter 2 gehe langsamer.

Ich betone hier nochmals, dass Beobachter 1 die Uhr von Beobachter 2 nicht „sieht“ (außer vielleicht im Augenblick, wo sich beide Beobachter treffen, also bei Ereignis  $O$ ). Für den Vergleich der Uhren wählt er für sein Inertialsystem zwei gleichzeitige Ereignisse (z.B.  $A$  und  $B'$ ) und die Zeit auf der Uhr von Beobachter 2 wird von einem anderen Beobachter (dessen Weltlinie parallel zu der von 1 ist aber durch das Ereignis  $B'$  verläuft, dessen Uhr aber mit der von 1 synchronisiert wurde - in Abb. 1 die gestrichelt gezeichnete vertikale Weltlinie) abgelesen. Der Uhrenvergleich erfolgt in Inertialsystem 1 zu vollkommen anderen Ereignissen als in Inertialsystem 2 und der Grund dafür liegt in der unterschiedlichen Zuordnung von Gleichzeitigkeit für Ereignisse.

## 2 Lorentz-Kontraktion

Ähnlich wie im letzten Abschnitt die Zeitdilatation untersuchen wir nun das Phänomen der Lorentz-Kontraktion aus der Sichtweise der verschiedenen Inertialsysteme. Die Länge, beispielsweise eines Lineals, wird dabei als der räumliche Abstand von Anfangs- und Endpunkt des Lineals bestimmt, wobei die Augenblicke der Messung dieses Abstands in den jeweiligen Inertialsystemen gleichzeitig sein sollen.

Wir betrachten zunächst einen Beobachter 1 in dessen Inertialsystem das Lineal ruht (Abb. 2 (links)). Die von dem Lineal überstrichene Weltfläche ist in der Abbildung grau unterlegt. Wichtig sind für uns die Weltlinien der beiden Endpunkte des Lineals. Zu einem bestimmten Zeitpunkt in Inertialsystem 1 (beispielsweise  $t = 0$ ) befinden sich die beiden Endpunkte bei den Ereignissen  $O$  und  $A$ . Der räumliche Abstand  $l = OA$  dieser Ereignisse für Beobachter 1 definiert die Länge des Lineals. Im Inertialsystem von Beobachter 2 sind aber die Ereignisse  $O$  (linkes Ende des Lineals) und  $B$  (rechtes Ende) gleichzeitig, in seinem System ist die Länge also durch  $l' = OB$  gegeben. Diese Länge ist aber kürzer als  $l$ , da das Ereignis  $A'$ , das für Inertialsystem 2 von  $O$  denselben räumlichen Abstand hat wie  $A$  für Inertialsystem 1, außerhalb des Lineals liegt.

Wir betrachten nun die umgekehrte Situation: Das Lineal ist in System 2 in Ruhe, seine Anfangs- und Endpunkte bewegen sich also in System 1 mit einer bestimmten Geschwindigkeit (Abb. 2 (rechts)). In System 2 wird die Länge des Lineals beispielsweise bei den gleichzeitigen Ereignissen  $O$  und  $A'$  bestimmt, und der zugehörige räumliche Abstand ist  $l = OA'$ . In Inertialsystem 1 wird der Abstand bei den gleichzeitigen Ereignissen  $O$  und  $B'$  gemessen, und deren Abstand ist offensichtlich kleiner als  $l$ .

In beiden Fällen finden wir somit, dass die Länge des Lineals, gemessen von einem bewegten System aus, immer kleiner ist als seine Länge in seinem eigenen Ruhesystem.

## 3 Doppler-Effekte

Der Doppler-Effekt ist schon aus der nicht-relativistischen Mechanik bekannt: Ein Martinshorn klingt höher, wenn das Auto auf uns zukommt, und tiefer, wenn es sich von uns entfernt. Durch die Bewegung des Autos werden die Wellenberge in Fahrtrichtung gestaucht – treffen daher in kürzeren Zeitabständen beim Empfänger ein und klingen höher – und entgegen der Fahrtrichtung gestreckt –

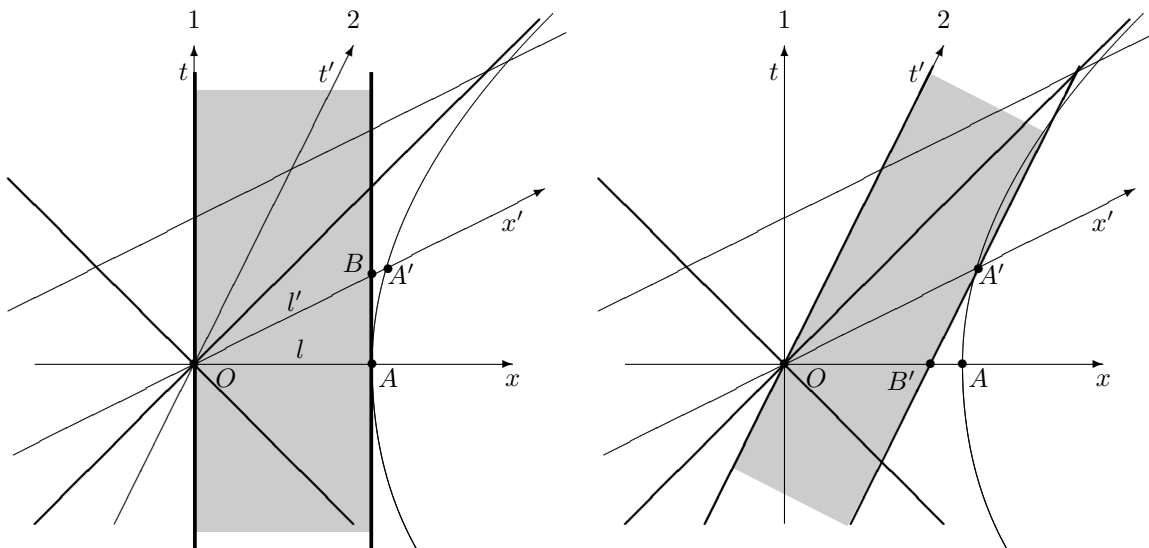


Abbildung 2: Das von einem Lineal überstrichene Raumzeitgebiet (grau unterlegt) erscheint in den verschiedenen Inertialsystemen unterschiedlich breit. (links) Für den bewegten Beobachter 2 scheint das in Inertialsystem 1 ruhende Lineal kürzer. (rechts) Umgekehrt erscheint ein bewegtes Lineal für den ruhenden Beobachter kürzer als für einen Beobachter, der sich mit dem Lineal bewegt.

sie treffen in größeren Zeitabständen beim Empfänger ein und klingen daher tiefer. In der klassischen Mechanik gibt es nur einen *longitudinalen* Doppler-Effekt, d.h. dieser Effekt tritt nur auf, wenn sich der radiale Abstand eines Senders relativ zu einem Empfänger ändert.

In der Relativitätstheorie kommen wegen der Zeitdilatationen bzw. der Lorentz-Kontraktionen in relativ zueinander bewegten Systemen noch weitere Einflüsse hinzu, insbesondere gibt es nun auch den so genannten *transversalen* Doppler-Effekt.

### 3.1 Der Doppler-Effekt in der klassischen Mechanik

Abbildung 3 zeigt eine nicht-relativistische Raumzeit, d.h., die Gleichzeitigkeitslinien sind für alle Beobachter parallel zur  $x$ -Achse und die zeitlichen Abstände zwischen zwei Ereignissen entsprechen den Projektionen auf die  $t$ -Achse. Beobachter E (der Empfänger) sei in Ruhe (bei Schallwellen bedeutet dies im Ruhesystem des Schallträgers, also der Luft), Beobachter S (der Sender) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf E zu, trifft ihn bei Ereignis  $C$  und bewegt sich ab dann von E weg. In gleichen Zeitabständen  $\Delta t_S$  sendet Beobachter S bei den Ereignissen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  Signale an E. Solange sich der Abstand zwischen dem Sender S und dem Empfänger E mit konstanter Rate verkürzt, empfängt E die Signale in gleichen Zeitabständen  $\Delta t_E$ ; bewegt sich S von E weg, sind die Zeitabstände  $\Delta t'_E$ .

$\Delta t_E$  ist kürzer als  $\Delta t_S$  und zwar um die Zeitdauer, die das Signal braucht, um eine Strecke zurückzulegen, die Beobachter S in der Zeit  $\Delta t_S$  zurücklegt. Um diese Strecke bewegt sich S in der Zeit  $\Delta t_S$  auf E zu, und um diese Strecke ist der Weg für ein Signal kürzer als beim letzten Signal. Die Strecke ist  $\Delta l = v\Delta t_S$ , die Zeit, die das Signal für diese Strecke benötigt, ist  $\Delta T = \Delta l/c$ , also folgt:

$$\Delta t_E = \Delta t_S - \frac{v}{c}\Delta t_S = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t_S. \quad (1)$$

Also ist die Frequenz  $\nu_E$ , mit der E Signale empfängt, um den Faktor  $(1 - \frac{v}{c})^{-1}$  größer als die Frequenz

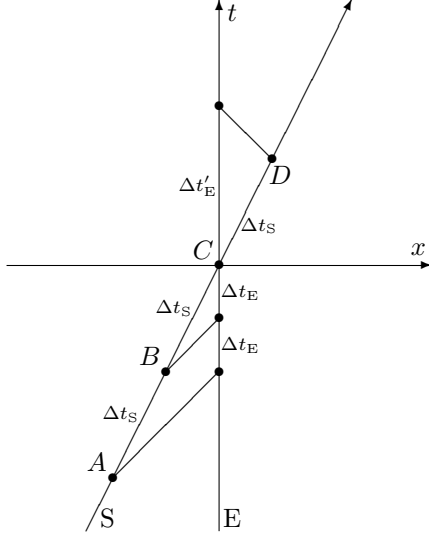


Abbildung 3: Doppler-Effekt in der nicht-relativistischen Mechanik. Die Gleichzeitigkeitslinien sind alle parallel zur  $x$ -Achse. In gleichen Zeitabständen  $\Delta t_S$  (bei den Ereignissen  $A, B, C, D$ ) sendet Beobachter S Signale an Beobachter E. Solange sich S auf E zubewegt, empfängt E die Signale im Abstand  $\Delta t_E$ , bewegt sich S von E weg, ist der zeitliche Abstand zwischen dem Empfang zweier Signale  $\Delta t'_E$ . Offensichtlich ist  $\Delta t_E$  kürzer als  $\Delta t_S$ , aber  $\Delta t'_E$  länger als  $\Delta t_S$ .

$\nu_S$ , mit der S die Signale abschickt:

$$\nu_E = \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \nu_S. \quad (2)$$

Entsprechend ist die zugehörige Wellenlänge kürzer:

$$\lambda_E = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \lambda_S. \quad (3)$$

Wenn sich S von E entfernt, nimmt der Abstand zwischen den beiden Beobachtern zu und das spätere Signal braucht die Zeit  $\Delta T$  länger als das vorhergehende, um von S zu E zu gelangen:

$$\Delta t'_E = \Delta t_S + \frac{v}{c} \Delta t_S = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \Delta t_S. \quad (4)$$

### 3.2 Der longitudinale relativistische Doppler-Effekt

Wie zuvor emittiert ein Sender S in regelmäßigen Zeitabständen  $\Delta \tau_S$  Signale (vgl. Abb. 4). Diese Zeitabstände  $\Delta \tau_S$  beziehen sich nun auf die Eigenzeit des Beobachters. Handelt es sich z.B. dabei um Licht einer bestimmten Frequenz  $\nu_S$ , so bezieht sich diese Frequenz natürlich auf die Eigenzeit in dem System des Senders. Zwei Ereignisse im zeitlichen Abstand  $\Delta \tau_S$  für den Sender haben jedoch im Inertialsystem E des Empfängers eine Zeitdifferenz  $\Delta t_S$ , die um einen Faktor  $\gamma$  größer ist als die Eigenzeit (der „ruhende“ Beobachter sieht die Zeit in einem relativ zu ihm bewegten System langsamer verstreichen):

$$\Delta t_S = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta \tau_S. \quad (5)$$

Abgesehen von diesem Unterschied bleibt die Argumentation dieselbe: In dem System E bewegt sich der Sender im Zeitraum  $\Delta t_S$  um die Strecke  $v \Delta t_S$  und das Lichtsignal benötigt daher bei zwei aufeinanderfolgenden Signalen für das zweite Signal die Zeit  $\Delta T = \left(\frac{v}{c}\right) \Delta t_S$  weniger. Insgesamt ergibt sich damit folgende Beziehung:

$$\Delta t_E = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t_S = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta \tau_S = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \Delta \tau_S. \quad (6)$$

Die Vorzeichen für  $v$  drehen sich entsprechend um, wenn sich der Sender vom Empfänger entfernt.

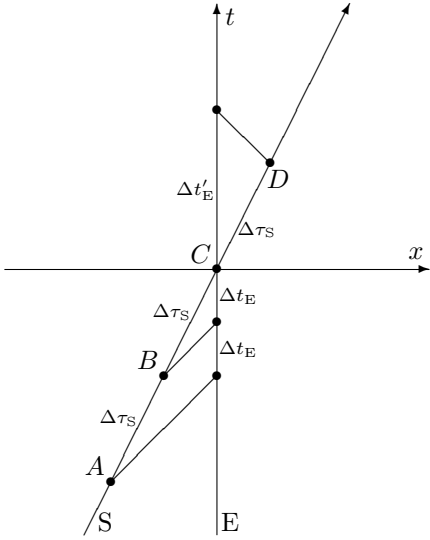


Abbildung 4: Longitudinaler Doppler-Effekt in der relativistischen Mechanik. Die Eigenzeiten  $\Delta\tau_S$  im System des Senders sind nun um einen Faktor  $1/\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  kleiner als der zeitliche Abstand  $\Delta t_S$  derselben Ereignisse im System von Beobachter E. Man beachte, dass die Beziehung der Ereignisse identisch ist, wie im nicht-relativistischen Fall. Geändert hat sich lediglich die Beziehung zwischen der Eigenzeit  $\Delta\tau$  und der entsprechenden Zeit im System des Signalempfängers.

Bewegt sich der Sender auf den Empfänger zu und handelt es sich bei dem ausgetauschten Signal um Licht (was wir beim relativistischen Effekt angenommen haben), so erscheint das Licht für den Empfänger mit einer höheren Frequenz als für den Sender, daher spricht man auch von einer *Blauverschiebung*. Entfernt sich der Sender vom Empfänger, kommt es entsprechend zu einer *Rotverschiebung*.

### 3.3 Der transversale Doppler-Effekt

In der nicht-relativistischen Mechanik gibt es keinen transversalen Doppler-Effekt, da sich der Abstand zwischen Sender und Empfänger nicht ändert und die Zeitdifferenzen für beide Beobachter gleich sind. In der relativistischen Mechanik bleibt bei einer transversalen Bewegung (d.h. der Sender bewegt sich in einem gewissen Abstand senkrecht zum Abstandsvektor) der Abstand ebenfalls konstant, es bleibt aber noch der Faktor der Zeitdilatation. Dieser bewirkt, dass es nun auch zwischen Sender (S) und Empfänger (E) eine Frequenzverschiebung des Lichts gibt:

$$\Delta\nu_S = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta\nu_S. \quad (7)$$

## 4 „Einparken“

Die Längenkontraktion und die Zeitdilatation geben Anlass zu einer Vielfalt an Scheinparadoxa, die mit der speziellen Relativitätstheorie assoziiert werden. In fast allen Fällen liegt die Ursache der scheinbaren Widersprüche in den unterschiedlichen Ereignismengen, die von den beiden Beobachtern als gleichzeitig empfunden werden.

Das folgende Beispiel bezieht sich auf die Lorentz-Kontraktion und wird in verschiedenen Varianten in der Literatur behandelt. Wir formulieren es hier als ein Problem des Einparkens.

Gegeben sei eine Garage der Länge  $L$  und ein Auto der Länge  $l > L$ . Offensichtlich passt das Auto nicht in die Garage, d.h., wenn die Frontstoßstange die Garagenhinterwand (gegenüber dem Garagentor) berührt, lässt sich das Garagentor nicht schließen. Wenn das Auto aber mit einer genügend großen Geschwindigkeit in die Garage fährt, ist seine Länge kürzer als die Länge der Garage und man sollte das Tor schließen können. Andererseits könnte man sich aber auch in das Inertialsystem des Fahrers versetzen, in dem das Auto in Ruhe ist und sich die Garage mit großer Geschwindigkeit

auf das Auto zubewegt. Nun ist die Garage verkürzt, die Situation ist noch ungünstiger und das Tor sollte sich erst Recht nicht schließen lassen. Ob aber ein Garagentor geschlossen werden kann oder nicht ist eine physikalische Tatsache und kann nicht vom Inertialsystem eines Beobachters abhängen.

Was passiert im Ruhesystem der Garage, wenn das Auto mit hoher Geschwindigkeit hereinfährt? Tatsächlich ist das Auto im Augenblick der Einfahrt kürzer und passt in die Garage – das Garagentor kann geschlossen werden. Doch nun wird das Auto abgebremst und dehnt sich aus, dabei stößt es vorne und hinten gegen die Garagenwand bzw. das Garagentor und wird physikalisch gestaucht.

Wie erfährt der Autofahrer dieselbe Situation? Für ihn ist die Garage wesentlich kürzer als das Auto. Wenn er mit seiner Frontstange gegen die Garagenwand fährt, ist der hintere Teil des Wagens noch weit außerhalb der Garage. Doch wenn der Wagen bezüglich des Systems der Garage vorne und hinten gleichzeitig abgebremst wird, wird er im Ruhesystem des Autofahrers von vorne abgebremst. D.h., der Wagen fährt vorne gegen die Garagenwand und wird dadurch gestaucht, während der hintere Teil des Wagens sich weiter nach vorne bewegt und schließlich ebenfalls ganz in der Garage ist, sodass das Tor geschlossen werden kann. Erst dann erreicht die Stauchung des Wagens auch den hinteren Teil.

In beiden Fällen fährt der Wagen in die Garage und das Tor kann geschlossen werden, aber der Wagen wurde durch das Abbremsen bzw. die Garagenwände derart gestaucht, dass er nicht mehr seine ursprüngliche Länge hat.

Eine wichtige Erkenntnis können wir aus diesem Beispiel festhalten: Es gibt keinen idealen starren Körper! Darunter würde man einen Körper verstehen, der jede Beeinflussung (z.B. Verschiebung) an seinem einen Ende instantan auf den gesamten Körper überträgt. Aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht kann sich auch in einem Körper kein Signal mit einer größeren Geschwindigkeit ausbreiten. Ein Stoß auf der einen Seite führt notwendigerweise zu einer Stoßwelle, die sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit durch den Körper ausbreitet und daher jede Einwirkung an einem Ende verzögert zu dem anderen Ende überträgt.

## 5 Das Zwillingsparadoxon

Dem Zwillingsparadoxon ist ein eigenes Kapitel gewidmet (siehe Kapitel [Das Zwillingsparadoxon](#)), daher wird es hier nur sehr kurz behandelt. Das Zwillingsparadoxon bezeichnet das folgende Phänomen: Wenn sich zwei Zwillinge (die nach unserer Vorstellung immer dasselbe Alter haben) treffen, und einer von beiden auf der Erde verbleibt während der andere mit großer Geschwindigkeit in den Weltraum hinausfliegt und nach vielen Jahren zurückkommt, dann haben die beiden nicht mehr dasselbe biologische Alter. Der auf der Erde verbliebene Zwilling ist älter als derjenige, der durch den Weltraum gereist ist.

Betrachten wir dazu die Weltlinien der beiden Zwillinge. Bis Ereignis  $A_0 = B_0$  haben beide dieselbe Weltlinie. Dann kommt es zur Trennung. Während Zwilling 1 seinen bisherigen Bewegungszustand beibehält (und die Ereignisse  $A_1, A_2, A_3$  durchläuft), bewegt sich Zwilling 2 sehr rasch zu Ereignis  $B_2$ , dort bremst er ab und beschleunigt in die umgekehrte Richtung, fliegt also wieder auf seinen Zwillingspartner zu. Bei  $A_4 = B_4$  treffen sich die beiden Zwillinge wieder.

Die Zeitdauern lassen sich leicht berechnen: Die Zeitdauer für Zwilling 1 von  $A_0$  bis  $A_1$  ist genauso lang wie die für Zwilling 2 von  $A_0$  bis  $B_2$ . Entsprechend ist die Zeitdauer  $A_3A_4$  dieselbe wie die von Ereignis  $B_2$  bis  $B_4$  für Zwilling 2. Insgesamt hat die Weltlinie von Zwilling 2 von Ereignis  $B_0$  bis  $B_4$  also dieselbe Länge wie die Summe der beiden Abschnitte  $A_0A_1$  und  $A_3A_4$  für Zwilling 1. Die Zwischenzeit - von  $A_1$  bis  $A_3$  - ist die Zeitdauer, um die Zwilling 1 älter ist.

Man könnte auf die Idee kommen, dass das unterschiedliche Alter der beiden Zwillinge darauf

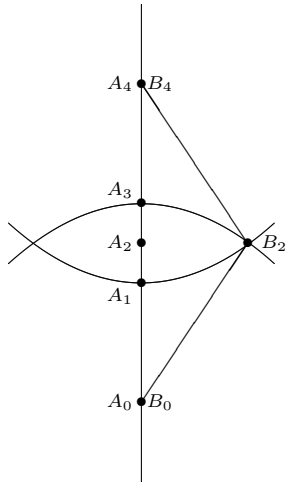


Abbildung 5: Zum Zwillingsparadoxon: Die Weltlinie von Zwilling 1 verläuft entlang der Ereignisse  $A_0 = B_0$ ,  $A_1, A_2, A_3$ ,  $A_4 = B_4$ , die von Zwilling 2 entlang  $B_0, B_2, B_4$ . Die Weltlinie von Zwilling 1 ist länger als die von Zwilling 2, d.h., Zwilling 1 ist bei der Wiedervereinigung in Ereignis  $A_4 = B_4$  älter als sein Bruder. Bei  $B_2$  hat Zwilling 2 dasselbe Alter wie Zwilling 1 bei  $A_1$ . Insgesamt ist Zwilling 1 um die Zeitspanne zwischen  $A_1$  und  $A_3$  älter.

zurückzuführen ist, dass Zwilling 2 mehrfach beschleunigt wurde, insbesondere auch bei Ereignis  $B_2$ . Um zu verdeutlichen, dass dieses Argument nicht richtig ist, betrachten wir Abb. 3. Die Weltlinien der drei Drillinge (der erste bleibt in Ruhe, der zweite macht eine kurze Reise über Ereignis  $C_2$ , der dritte macht die große Reise über  $B_2$ ) sind unterschiedlich lang. Drilling 1 ist am meisten gealtert, Drilling 2 etwas weniger und Drilling 3 noch weniger. Insbesondere haben Drilling 2 und Drilling 3 dieselben Beschleunigungsphasen erlebt, sind aber trotzdem bei  $A_4 = B_4$  unterschiedlich alt. Es handelt sich um einen Effekt, der auf der Geometrie der Minkowski-Raumzeit beruht und nicht auf unterschiedlichen Beschleunigungsphasen.

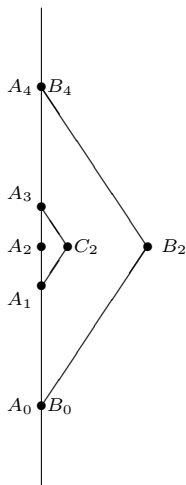


Abbildung 6: Erweiterung des Zwillingsparadoxons für Drillinge. Die drei Weltlinien –  $(A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4)$  für Drilling 1,  $(A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow C_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4)$  für Drilling 2 und  $(B_0 \rightarrow B_2 \rightarrow B_4)$  für Drilling 3 – sind unterschiedlich lang. Insbesondere ist die Weltlinie von Drilling 3 kürzer als die von Drilling 2, obwohl beide dieselben Beschleunigungsphasen erlebt haben.

## 6 Die Eigenzeit

Wie wir gesehen haben, können ganz allgemein Uhren, die entlang unterschiedlicher Weltlinien transportiert wurden, unterschiedliche Zeitauern anzeigen, selbst wenn die Weltlinien dieselben Ereignisse verbinden. Im letzten Abschnitt hat es sich um stückweise gerade Weltlinien gehandelt, bei denen wir zur Bestimmen der Zeitdauer die Anteile der einzelnen Teilstücke addiert haben. Dies können wir für

stetige Weltlinien verallgemeinern.

Für zwei zeitartige Ereignisse  $B$  und  $A$  ( $B$  zeitlich nach  $A$ ), mit den Differenzkoordinaten  $\Delta t = t_B - t_A$  und  $\Delta \vec{x} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$  in einem beliebigen Inertialsystem, definieren wir die *Eigenzeit*  $\tau_{AB}$  durch

$$\tau_{AB}^2 = (\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta \vec{x})^2. \quad (8)$$

$\tau_{AB}$  ist die Zeitdifferenz zwischen den beiden Ereignissen, die von einer Uhr angezeigt wird, die mit konstanter Geschwindigkeit (also in einem Inertialsystem) von Ereignis  $A$  zu Ereignis  $B$  transportiert wird. In dem Inertialsystem dieser Uhr finden beide Ereignisse im räumlichen Koordinatenursprung statt. Für zwei Ereignisse ist  $\tau$  eine Invariante und es spielt keine Rolle, in welchem Inertialsystem  $\tau$  nach Gl. 8 berechnet wird, da die rechte Seite dieser Gleichung invariant unter Lorentz-Transformationen ist (siehe Kapitel [Grundlagen der SRT](#)).

Handelt es sich um infinitesimal benachbarte Ereignisse, deren Raum- und Zeitkoordinaten sich in einem beliebigen Inertialsystem um  $d\vec{x}$  und  $dt$  unterscheiden, erhalten wir

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (9)$$

als die Eigenzeit zwischen den beiden Ereignissen. Wir können nun einer beliebigen Weltlinie  $\gamma$  (die natürlich an jedem ihrer Punkte eine zeitartige Tangente haben muss) zwischen zwei Ereignissen  $A$  und  $B$  eine Eigenzeit zuordnen:

$$\tau(\gamma) = \int_{t_B;\gamma}^{t_A} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt. \quad (10)$$

Diese Zeit wird von einer Uhr angezeigt, die entlang der Weltlinie  $\gamma$  von  $A$  nach  $B$  transportiert wird. Wie schon erwähnt spielt es dabei keine Rolle, in welchem Inertialsystem die momentane Geschwindigkeit  $v(t)$  gemessen und das Integral ausgewertet wird. Die Eigenzeit zwischen zwei Ereignissen entlang eines Weges  $\gamma$  ist am größten, wenn es sich bei  $\gamma$  um eine gerade Verbindungslinie handelt. Wir werden später in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr von Geraden sprechen können, wohl aber von geodätischen Verbindungswegen. Diese zeichnen sich durch eine maximale Eigenzeit aus.

## 7 Der kanonische Formalismus

In der klassischen, Newton'schen Mechanik hat sich der Lagrange-Formalismus als sehr nützlich erwiesen. Auch in der speziellen Relativitätstheorie lassen sich eine Lagrange-Funktion und eine zugehörige Wirkung angeben, aus der nicht nur die Bewegungsgleichungen sondern auch die kanonisch konjugierten Variablen folgen.

Die Wirkung ordnet jeder Trajektorie  $t \mapsto \vec{x}(t)$  eine Zahl zu. Ein großer Vorteil des Lagrange-Formalismus ist, dass diese Zahl nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt. Daher sollte diese Zahl auch für die relativistische Wirkung eine Invariante sein. Statt diese Invariante abzuleiten, geben wir die Lagrange-Funktion und ihre Wirkung einfach an und zeigen, dass sie im klassischen Grenzfall mit den bekannten Größen übereinstimmen, aber relativistisch invariant sind. (Durch diese beiden Forderungen sind die Größen im Allgemeinen bereits festgelegt.)

Als Lagrange-Funktion eines freien Teilchens definieren wir für ein beliebiges Inertialsystem mit Koordinaten  $(t, \vec{x})$  (und der Geschwindigkeit  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$ ):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}, \quad (11)$$



und die zugehörige Wirkung ist

$$S = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} dt. \quad (12)$$

Ausgedrückt durch die Eigenzeit entlang einer Bahnkurve ergibt sich für die Wirkung:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau. \quad (13)$$

Zu integrieren ist jeweils entlang der Bahnkurve. Aus der letzteren Darstellung wird die Invarianz der Wirkung offensichtlich, d.h.  $S$  ist für jedes Inertialsystem gleich.

Entwickeln wir in einem festen Inertialsystem die Quadratwurzel, so erhalten wir für die Lagrange-Funktion in führender Ordnung:

$$L = -mc^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2} + \dots \right) \approx -mc^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}(t)^2, \quad (14)$$

also bis auf den konstanten Term  $-mc^2$  (der, wie wir gleich sehen werden, der Ruheenergie eines Teilchens entspricht) die klassische Wirkung.

Die zu  $\vec{x}$  kanonisch konjugierte Variable  $\vec{p}$  ist definiert als

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial v_i(t)} = \frac{mv_i(t)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}(t) = \frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}. \quad (15)$$

Entsprechend ist die Energie (die eine Erhaltungsgröße ist, da  $L$  nicht explizit von der Zeit abhängt) definiert als:

$$E = \vec{v} \cdot \vec{p} - L(\vec{v}), \quad (16)$$

woraus wir erhalten:

$$E = \frac{m\vec{v}(t)^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \left( 1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}. \quad (17)$$

In einem kanonischen Formalismus sollte die Energie allerdings als Funktion von Ort und kanonisch konjugiertem Impuls aufgefasst werden. Wir lösen daher Gl. 15 nach  $\vec{v}^2$  auf und erhalten schließlich:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}. \quad (18)$$

## 8 Die Äquivalenz von Masse und Energie

Eine weitere Folgerung aus der speziellen Relativitätstheorie ist nicht nur besonders bekannt geworden sondern auch von fundamentaler Bedeutung, nämlich die Äquivalenz von träger Masse und Energie.

Allgemein schreibt man die Formel

$$E = mc^2 \quad (19)$$

Einstein zu, der sie 1905 in der Arbeit *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* ([1]) für den Sonderfall eines strahlenden Körpers hergeleitet und ihre allgemeine Richtigkeit vermutet hatte. Abgesehen davon, dass die Herleitung dieser Formel als falsch gilt (siehe [3]; Farbtafel XXIV, Zitat aus Jammer), findet man Überlegungen über eine Trägheit von Energie auch schon bei Poincaré 1900.

Die folgende „Elementare Ableitung der Äquivalenz von Masse und Energie“ stammt ebenfalls von Einstein aus dem Jahre 1946, und ist in seinem Buch *Aus meinen späten Jahren* ([2], S. 121) entnommen.

Die vorstehende Ableitung des Äquivalenzgesetzes, die bisher nicht publiziert ist, hat zwei Vorteile. Sie bedient sich zwar des speziellen Relativitätsprinzips, setzt aber die technisch-formalen Hilfsmittel der Theorie nicht voraus, sondern bedient sich nur dreier vorbekannter Gesetzmäßigkeiten:

1. des Satzes von der Erhaltung des Impulses,
2. des Ausdrucks für den Strahlungsdruck beziehungsweise für den Impuls eines in bestimmter Richtung sich ausbreitenden Strahlungs-Komplexes,
3. der wohlbekannte Ausdruck für die Aberration des Lichts (Einfluß der Bewegung der Erde auf den scheinbaren Ort der Fixsterne (Bradley)).

Wir fassen nun folgendes System ins Auge. Bezüglich eines Koordinatensystems  $K_0$  (Abb. 7) schwebe der Körper  $B$  frei im Raum. Zwei Strahlungskomplexe  $S$ ,  $S'$ , je von der Energie  $\frac{E}{2}$  breiten sich längs der positiven bzw. negativen  $x_0$ -Richtung aus und werden dann von  $B$  absorbiert. Bei der Absorption wächst die Energie von  $B$  um  $E$ . Der Körper  $B$  bleibt bei diesem Prozess aus Symmetrie-Gründen in Ruhe.

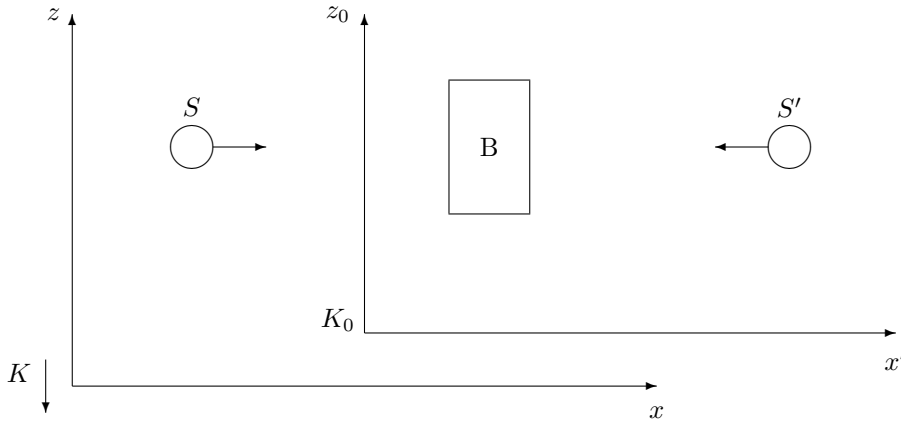


Abbildung 7: Das System  $B$  absorbiert die Energie von  $S$  und  $S'$  - aus dem Inertialsystem von  $B$  aus betrachtet.

Nun betrachten wir diesen selben Prozess von einem System  $K$  aus, welches sich gegenüber  $K_0$  mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  in der negativen  $z_0$ -Richtung bewegt. In bezug auf  $K$  ist dann die Beschreibung des Vorganges [folgende] (siehe Abb. 8).

Der Körper  $B$  bewegt sich in der positiven  $z$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $v$ . Die beiden Lichtkomplexe haben in bezug auf  $K$  eine Fortpflanzungsrichtung, welche einen Winkel  $\alpha$  mit der  $x$ -Achse bildet. Das Aberrationsgesetz besagt, dass in erster Näherung  $\alpha = \frac{v}{c}$  ist, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Aus der Betrachtung in bezug auf  $K_0$  wissen wir, dass die Geschwindigkeit  $v$  von  $B$  durch die Absorption von  $S$  und  $S'$  keine Änderung erfährt.

Nun wenden wir auf den Prozess in bezug auf  $K$  das Gesetz von der Erhaltung des Impulses in bezug auf die Richtung  $z$  des betrachteten Gesamtsystems an.

I. *Vor der Absorption* sei  $M$  die Masse von  $B$ ;  $Mv$  ist dann der Ausdruck des Impulses von  $B$  (gemäß der klassischen Mechanik). Jeder der Strahlungskomplexe hat die Energie  $\frac{E}{2}$  und deshalb gemäß einer wohlbekannten Folgerung aus Maxwells Theorie den Impuls

$$\frac{E}{2c} \tag{20}$$

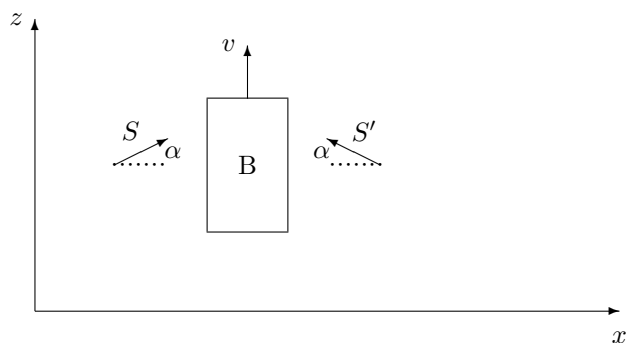


Abbildung 8: Dieselbe Situation wie in Abb. 7, allerdings aus dem bewegten System  $K$  heraus betrachtet.

Dies ist streng genommen zunächst der Impuls von  $S$  in bezug auf  $K_0$ . Wenn aber  $v$  klein ist gegen  $c$ , so muss der Impuls in bezug auf  $K$  bis auf die Größe von zweiter Ordnung  $\frac{v^2}{c^2}$  dieselbe sein. Von diesem Impuls fällt in die  $z$ -Richtung die Komponente  $\frac{E}{2c} \sin \alpha$ , sind aber genügend genau (bis auf Größen höherer Ordnung)  $\frac{E}{2c} \alpha$  oder  $\frac{E}{2} \cdot \frac{v}{c^2}$ .  $S$  und  $S'$  zusammen haben also in der  $z$ -Richtung den Impuls  $E \frac{v}{c^2}$ . Der Gesamtimpuls des Systems vor der Absorption ist also

$$Mv + \frac{E}{c^2}v. \quad (21)$$

II. *Nach der Absorption* sei  $M'$  die Masse von  $B$ . Wir antizipieren hier die Möglichkeit, dass die Masse bei der Aufnahme der Energie  $E$  eine Zunahme erfahren könnte (dies ist nötig, damit das Endresultat unserer Überlegungen widerspruchsfrei sei). Der Impuls des Systems nach der Absorption ist dann

$$M'v. \quad (22)$$

Nun setzen wir den Satz von der Erhaltung des Impulses als richtig voraus und wenden ihn in bezug auf die  $z$ -Richtung an. Dies ergibt die Gleichung

$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v \quad (23)$$

oder

$$M' - M = \frac{E}{c^2}. \quad (24)$$

Diese Gleichung drückt den Satz der Äquivalenz von Energie und Masse aus. Der Energiezuwachs  $E$  ist mit dem Massenzuwachs  $\frac{E}{c^2}$  verbunden. Da die Energie ihrer üblichen Definition gemäß eine additive Konstante freilässt, so können wir nach der Wahl der letzteren stattdessen auch kürzer schreiben

$$E = Mc^2. \quad (25)$$

## Literatur

- [1] Albert Einstein; *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* (Ann. Phys., Leipzig, 18 (1905) 639.
- [2] Albert Einstein; *Aus meinen späten Jahren*; Ullstein Sachbuch, Verlag Ullstein, Frankfurt, Berlin, 1993.
- [3] Károly Simonyi; *Kulturgeschichte der Physik*; Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1990.