

# Zeitmessung

Thomas Filk, Universität Freiburg

Im Jahre 1967 wurde beschlossen, die Sekunde über den Hyperfeinstrukturübergang von  $^{133}\text{Cs}$  im Grundzustand zu definieren: Eine Sekunde entspricht der Zeitdauer von 9 192 631 770 Schwingungen zu diesem Übergang. Damit erhebt sich die Frage, wie man die Zeit überhaupt messen kann. Die Geschichte der Zeitmessung ist eines der spannendsten Kapitel in der Geschichte der Physik.

## 1 Antike Zeitmesser

Für große Zeiträume dienten in der Antike immer die natürlichen Einheiten Tag und Monat, die sich leicht aus der Bewegung der Sonne (bzw. der Drehung der Erde) und des Mondes bestimmen ließen. Auch wenn der Zyklus eines Jahres etwas schwieriger festzustellen war, kannte man schon in den frühen Kulturen Verfahren, mit deren Hilfe man beispielsweise die Tag-und-Nacht-Gleiche oder die Sommersonnenwende und damit ein Kalendersystem festlegen konnte. Schon den Babyloniern war bekannt, dass die vier astronomischen Jahreszeiten - die Zeiten zwischen den Tag-und-Nacht-Gleichen (Frühling und Herbst) und den Sonnenwenden (Sommer und Winter) - nicht gleich lang waren. Heute wissen wir, dass dies an der elliptischen Umlaufbahn der Erde um die Sonne liegt: Beim sonnennächsten Punkt der Erdbahn (dem Perihel - derzeit zwischen dem 2. und 5. Januar) bewegt sich die Erde nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz etwas schneller um die Sonne als beim sonnenfernsten Punkt, dem Aphel (derzeit um den 3.-6. Juli). Und Ptolemäus wusste ebenfalls, dass sich die Sonne gleichmäßig entlang der Ekliptik bewegt und somit nicht gleichmäßig entlang der Projektion der Sonnenbahn auf den Äquator bzw. die Längengrade [5]. Die Korrekturen zwischen wahren und mittlerem Sonnentag - die Zeitgleichung - werden schon bei Ptolemäus beschrieben, auch wenn sie erst im 17. Jahrhundert mit den Kepler'schen Gesetzen erklärt werden konnten. Im Folgenden geht es jedoch eher um die Einteilung des Tages in Untereinheiten und die Messung von kurzen Zeiträumen.

### 1.1 Sonnenuhren

Ein wichtiges und natürliches Zeitmaß war seit jeher die Sonnenuhr. Schon in vorhistorischen Zeiten dürften die Schatten von Felsvorsprüngen, Bäumen oder Sträuchern und ähnlichen natürlichen Gegenständen beobachtet und dadurch eine Tageseinteilung vorgenommen worden sein. Man wird auch früh festgestellt haben, dass die Sonne zu verschiedenen Jahreszeiten eine unterschiedliche Höhe hat und somit die Schattenlänge an einer Sonnenuhr von der Jahreszeit abhängt.

An manchen Sonnenuhren wurde diese jahreszeitliche Abhängigkeit genutzt, um die angezeigte wahre Sonnenzeit über ein sogenanntes Analemma (eine Figur in Form einer verzerrten Acht, mit der die Zeitgleichung so auf die Uhr projiziert wird, dass man aus dem Schatten die mittlere Sonnenzeit ablesen kann) mit der mittleren Sonnenzeit in Bezug zu setzen (siehe Abb. 1).

Das Analemma ist gleichzeitig ein Bild der Sonnenstände am Himmel: Macht man täglich zur selben mittleren Uhrzeit ein Bild vom Sonnenstand, so ergibt sich im Verlauf eines Jahres die Form des Analemmas.

### 1.2 Wasseruhren und andere Zeitmesser des Altertums

Ein Hilfsmittel zur Reproduktion gleicher Zeiträume war auch die Klepshydra: ein mit Wasser gefülltes Gefäß mit einer kleinen Öffnung an der unteren Seitenwand oder im Boden, durch die das Wasser

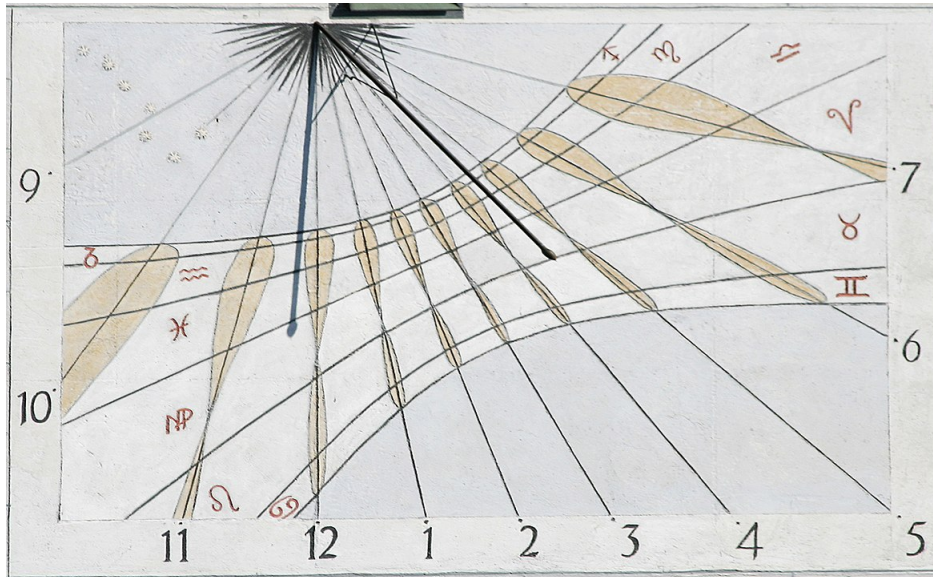


Abbildung 1: Sonnenuhr am Alten Rathaus in München. Anhand der Schattenlänge zu verschiedenen Jahreszeiten kann die wahre (angezeigte) Uhrzeit um die Zeitgleichung korrigiert werden, die durch die Analemmas an den Stundenlinien angegeben wird. Die Sternzeichen geben an, welcher Teil des Analemmas (linker oder rechter Rand) in einem bestimmten Monat zu verwenden ist. (aus [1])

auslaufen konnte, das dann in einem zweiten Gefäß aufgefangen wurde. Mit solchen Klepshydran wurden beispielsweise die Redezeiten bei politischen Versammlungen oder auch bei Gerichtsprozessen im alten Griechenland und Rom gemessen. Vermutlich geht hierauf der Begriff „seine Zeit ist abgelaufen“ zurück. Noch heute beruht die Sanduhr, gelegentlich zum Eierkochen oder auch bei Gesellschaftsspielen verwendet, auf diesem Prinzip.

Im frühen Mittelalter wurden die Klepshydran zu komplizierteren Wasseruhren abgewandelt. Dabei handelte es sich um teilweise sehr aufwendige Anlagen, durch die Wasser aus einem oberen Reservoir in ein tiefer gelegenes Reservoir floss und dabei komplexe Mechanismen in Gang setzte. Manche dieser Mechanismen glichen auch schon den späteren Hemmungen.

Insbesondere in Klöstern, wo teilweise auch zu Nachtstunden zum Gebet aufgerufen wurde, kamen später sogenannte Stundenkerzen - Kerzen genormter Dicke, bei denen Markierungen den groben Stundenverlauf anzeigten - hinzu. Einem ähnlichen Zweck dienten auch Ölkerzen, bei denen ein Docht in ein mit Öl gefülltes Gefäß ragte und am anderen Ende brannte. Die verflossene Zeit konnte an dem verbrauchten Öl abgelesen werden.

## 2 Uhren

Um 1300 erlaubte die Erfindung der sogenannten Hemmung die Konstruktion der ersten Räderuhren und damit von mechanischen Uhren, die auf oszillatorischen Prozessen beruhen. Wer den Mechanismus der Hemmung erfunden hat oder wann genau dieser Mechanismus erfunden wurde, ist nicht bekannt. Wir wissen heute lediglich, dass um 1300 die ersten Uhren entstanden sind, die auf diesem Prinzip beruhen.

## 2.1 Hemmungen

Eine Hemmung erlaubt es, eine mechanische Kraft (z.B. eine Gewichtskraft) in eine regelmäßige Bewegung umzuwandeln. Hängt beispielsweise ein Gewicht an einem langen Seil, aufgewickelt auf eine frei drehbare Rolle, so würde ungehemmt das Gewicht mit wachsender Geschwindigkeit absinken und die Rolle würde sich mit zunehmender Geschwindigkeit drehen. Eine Hemmung bewirkt, dass diese Drehung in eine meist abgehackte, konstant periodische Bewegung umgewandelt wird und somit für eine Zeitmessung verwendet werden kann. Die ältesten Hemmungen sind die sogenannten Spindelhemmungen mit einem Foliot - einem hin und her schwingenden Querbalken mit Gewichten, der über eine vertikale Achse mit zwei Plättchen in ein Zahnrad (das Kronrad) eingreift (siehe Abb. 2) - oder einer Unrast, einer rotierende Scheibe, die ansonsten nach einem ähnlichen Mechanismus wie das Foliot arbeitet.

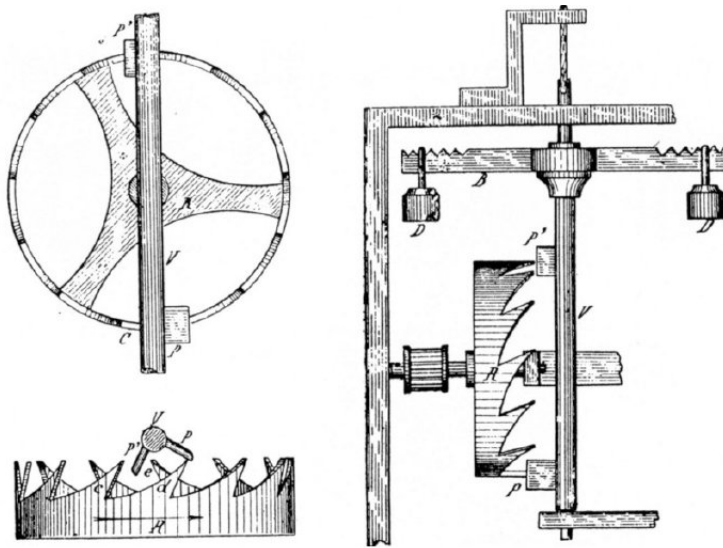


Abbildung 2: Eine Spindelhemmung mit Foliot. Das Kronrad  $R$  wird über ein Gewicht, das an einem über die Achse des Kronrads gewickelten Seil hängt (nicht dargestellt), angetrieben. Das Foliot  $B$  mit den Gewichten  $D$  besteht aus einem waagerechten Balken, der fest mit einer vertikalen Achse  $V$  verbunden ist. An dieser Achse befinden sich zwei Plättchen  $P$  und  $P'$ , die abwechselnd oben und unten in die Zähne ( $c$ ,  $d$  und  $e$ ) des Kronrads  $R$  einhaken. Dies führt zu einer Hin- und Herbewegung des Foliots und damit zu einer kontrollierten, langsamen, abgehackt gleichmäßigen Drehung des Kronrads. Über die Gewichte kann die Schwingungsfrequenz des Foliots und damit der Gang der Uhr reguliert werden. (aus [3])

Ein Video mit dem Mechanismus einer Spindelhemmung findet man unter [4]. Über Zahnradmechanismen, die im Mittelalter schon lange bekannt waren, kann die Drehung des Kronrads auf andere Räder übertragen und dabei beliebig verlangsamt werden. Bis zum 17. Jahrhundert erreichten Uhren mit Spindelhemmungen eine Genauigkeit von rund 15 Minuten pro Tag.

## 2.2 Pendeluhren

Im 17. Jahrhundert wurde die Spindelhemmung durch die mit einem Pendel gekoppelte Ankerhemmung ersetzt (siehe Abb. 3). Nachdem Galileo um 1630 festgestellt hatte, dass die Periode eines Pendels für kleine Auslenkungen nahezu unabhängig von dieser Auslenkung ist, erkannte man, dass sich das Pendel im Vergleich zum Foliot besser als Taktgeber eignet. Durch das Drehmoment, das

über ein Gewicht auf das Kronrad übertragen wird, gibt das Kronrad bei seinem Weiterdrehen über den Anker umgekehrt dem Pendel regelmäßig einen kleinen Stoß, sodass dieses mit einer kleinen aber konstanten Auslenkung schwingt und nicht durch Reibungseffekte zur Ruhe kommt.

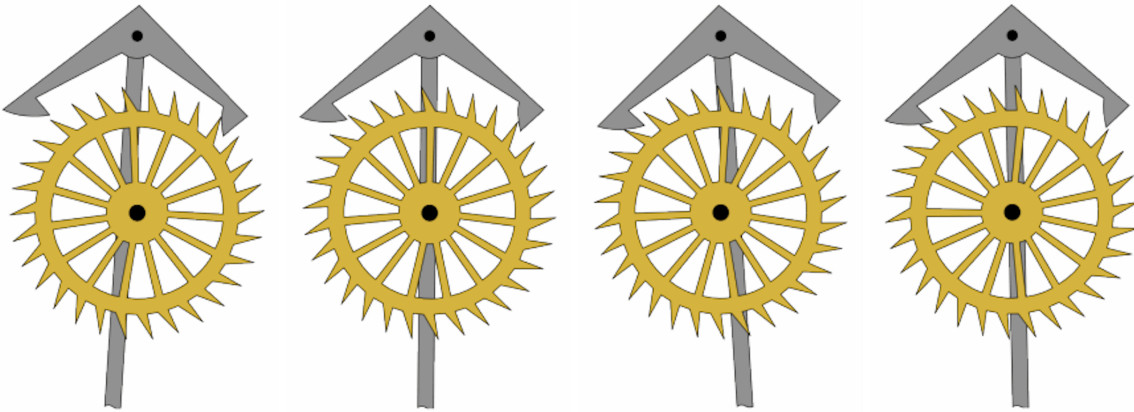


Abbildung 3: Eine Ankerhemmung. Der Anker ist fest mit einem Pendel verbunden, und wenn das Pendel schwingt, greift der Anker abwechselnd rechts und links in die Zacken des Kronrads. Das Kronrad dreht sich im Uhrzeigersinn und wird von einem Gewicht (nicht dargestellt) angetrieben. Bei jeder Vorwärtsbewegung überträgt es aufgrund der Zackenform und der Form des Ankerhakens einen kleinen Stoß auf den Anker und damit auf das Pendel. (aus [4])

Christiaan Huygens entwickelte um 1656 eine Uhr auf dem Prinzip der Pendeluhr. Nachdem Robert Hooke 1658 die Ankerhemmung erfunden hatte, die eine kleine Schwingungsauslenkung des Pendels ermöglichte und damit eine höhere Genauigkeit in der Pendelperiode, wurde die Pendeluhr zum Standard in der Uhrenkonstruktion. Hier zeigt sich das Grundprinzip der heutigen Uhren: Eine harmonische Schwingung dient einerseits als Standard für die Zeitmessung, andererseits wird sie durch den Mechanismus der Rückkopplung von einer äußeren Kraft (hier das Gewicht, welches das Kronrad antreibt) aufrecht erhalten.

### 3 Das Problem des Längengrads

Die Eroberung Konstantinopels im Jahre 1453 durch die osmanischen Truppen markiert einen entscheidenden Wendepunkt in der Geschichte des Abendlands. Oftmals wird in diesem Ereignis eine Ursache für den Wechsel vom Mittelalter zur Neuzeit gesehen. Diese Eroberung nach einer langen Belagerung löste zwei Bewegungen aus: (1) Nachdem der Landweg von Europa zu den attraktiven Handelsplätzen in Indien, Indonesien und China im Wesentlichen gesperrt bzw. unter islamischer Kontrolle war, was oft hohe Abgaben bzw. Zölle zur Folge hatte, suchte man nach anderen Wegen nach Indien. Dies führte nicht nur zur Umseglung Afrikas, sondern auf der Suche nach einem direkten Weg nach Indien auch zur Entdeckung Amerikas und des Pazifischen Ozeans. (2) Die Flucht vieler Gelehrter aus Konstantinopel in den Westen, die in ihrem Gepäck oft wertvolle Bücher mit sich führten, löste die Renaissance aus - auf diese Weise wurden viele antike Schriften, teilweise in ihren arabischen Übersetzungen, im Westen erst bekannt.

Insbesondere die Erkundungsfahrten zur See brachten einige Probleme auf: Bis zu Beginn des 15. Jahrhunderts beschränkten sich Seefahrten hauptsächlich auf den Mittelmeerraum oder aber auf Fahrten entlang der europäischen Küsten nach Norden (Frankreich, England, Norwegen) oder entlang der afrikanischen Küste nach Süden (bei dieser Gelegenheit wurden die Kanarischen Inseln

sowie später die Inselgruppe um Madeira und die Azoren entdeckt). Im Verlauf des 15. Jahrhunderts erkundete man hauptsächlich den Seeweg um Afrika nach Indien, der dann von Vasco da Gama im Jahre 1498 auch gefunden wurde und eine Route von Europa nach Indien und China eröffnete, die nicht durch islamisch kontrolliertes Gebiet führte. Eine solche Umsegelung Afrikas war möglich, ohne über einen längeren Zeitraum hinweg die Küste als Anhaltspunkt für die Ortsbestimmung aus dem Blickfeld zu verlieren. Allerdings war diese Schiffroute sehr lang und wegen der vielen Piraten in der Nähe des Horns von Afrika auch recht gefährlich.

Die andere Möglichkeit sah man in einer direkten Route von Europa nach Indien auf einem Weg in Richtung Westen. Diesen Weg wollte Columbus finden und entdeckte auf diese Weise 1492 das heutige Amerika (genauer entdeckte er eine Insel der Bahamas). Während eine Umfahrung Afrikas noch mit visuellem Küstenkontakt möglich war, musste man für die Westroute die vertrauten Küsten Europas und Afrikas verlassen. Nachdem Columbus die Bahamas entdeckt hatte und in der Folgezeit auch Länder auf dem amerikanischen Festland (sowohl in Nord- als auch Südamerika) entdeckt wurden, und nachdem Ferdinand Magellan um 1520 die erste Umsegelung Südamerikas und die Überquerung des Pazifischen Ozeans gelang, wurde das Problem der genauen Ortsbestimmung der neu entdeckten Länder und Inseln wichtig. Zum Einen wollten die Herrscher, die solche Erkundungsfahrten der Seefahrer finanzierten und die dabei entdeckten Länder für sich in Anspruch nahmen, wissen, wo genau sich diese Länder befanden, d.h. es kam die Frage auf, wie man diese Länder wiederfinden kann. Zum Anderen war es auch für Seefahrer wichtig zu wissen, wo genau man sich befand, um beispielsweise bei Unwetter oder in der Nacht zu vermeiden, auf Felsen oder Land aufzulaufen.

Eine Bestimmung des Breitengrads war auch auf See mit hinreichender Genauigkeit möglich, sofern das Wetter es zuließ. Entweder konnte man bei Tag den Sonnenhöchststand oder bei Nacht die Sterne beobachten und ausmessen. Der Höchststand der Sonne bei Tag oder beispielsweise die Höhe des Polarsterns bei Nacht erlaubten eine direkte Messung des Breitengrads. Problematischer war die Bestimmung des Längengrads: Hierzu musste man entweder eine direkte Messung vornehmen, d.h. man bestimmte die zurückgelegte Strecke aus der Geschwindigkeit des Schiffs und der Reisedauer - auf See war das nur bei ruhigem Wetter und ruhiger See (ohne Strömungen) möglich - oder man musste die genaue Uhrzeit an einem Referenzpunkt, dessen Längengrad bekannt war, kennen.

Eine dritte Möglichkeit, die vermutlich bei den ersten Pazifiküberquerungen verwendet wurde, bestand darin, unter einem konstanten Winkel zum Längengrad (im 16. Jahrhundert gab es schon recht gute Magnetkompassse sowie Kenntnisse zu den Abweichungen zwischen magnetischem und geographischen Nordpol) zu segeln und dann aus der Änderung des Breitengrads auf die Änderung im Längengrad zu schließen. Dieses Verfahren funktioniert nicht bei einer reinen Ost-West-Fahrt, also entlang eines konstanten Breitengrads. Solche Routen wurden gerne verwendet, da sich der Breitengrad leicht bestimmen ließ und diese Routen somit gut reproduzierbar waren.

Direkte Messungen waren schwierig, da der Fehler kumulativ ist (d.h., kleine Fehler in den Messungen - insbesondere systematische Fehler - addieren sich über einen längeren Zeitraum hinweg zu einem großen Fehler) und daher sehr anfällig für Ungenauigkeiten, beispielsweise bei nicht idealen Wetterverhältnissen oder Meeresströmungen, die es schwer bis unmöglich machten, die Geschwindigkeit des Schiffs zu bestimmen. Daher sah man die Lösung nur in einer genauen Zeitmessung: Wenn man an einem bestimmten Ort den genauen Zeitpunkt des Sonnenhöchststands misst und mit der gleichzeitigen lokalen Zeit an einem Referenzort (z.B. dem Heimathafen) vergleicht, kann man aus der Zeitdifferenz den Längengrad des momentanen Orts bestimmen.

Da sich die Erde in 24 Stunden einmal um ihre Achse dreht, ein Ort am Äquator in dieser Zeit somit 40 000 km „zurücklegt“, entspricht dies pro Minute einer Strecke von  $27,7\bar{7}$  km. Ein Längengrad am Äquator entspricht rund 111,11 km, und eine Längenminute rund 1 852 m, einer nautischen Meile. Für eine angestrebte Genauigkeit im Bereich von 5 bis 10 Kilometern bzw. eine Längengradmessung

mit einem Fehler zwischen 3 und 5 Bogenminuten musste die Zeit also auf rund 15 Sekunden bekannt sein. Das war mit den Uhren im späten Mittelalter oder der frühen Neuzeit kaum möglich. Selbst unter idealen Bedingungen auf festem Boden in abgeschlossenen Räumen erreichte man mit den Pendeluhr im 17. Jahrhundert bestenfalls eine Genauigkeit von 15 Sekunden am Tag. Auf hoher See, wo das Schiff Stürmen ausgesetzt war oder auch extremen Temperatur- und Feuchtigkeitsschwankungen, eine Genauigkeit von 15 Sekunden über einen längeren Zeitraum (von z.B. 10–14 Tagen) zu erreichen, schien Anfang des 18. Jahrhunderts noch unmöglich. Nachdem bei einem großen Seeunglück der englischen Flotte im Jahre 1707 bei den Scilly Islands fast 2000 Seeleute ums Leben gekommen waren und vier Schiffe zerstört wurden, was auf eine fehlerhafte Ortsbestimmung des Kapitäns zurückging, setzte die britische Regierung im sogenannten *Longitude Act* 1714 eine Belohnung von letztendlich insgesamt 20 000 englischen Pfund (das entspricht heute rund 1,5–2 Millionen Euro) aus für denjenigen, der das Problem der Messung des Längengrads auf eine einfache und praktische Weise lösen konnte.

Zwei Ansätze wurden in diesem Zusammenhang verfolgt: (1) Die Erstellung sehr genauer Ephemeridentafeln (z.B. auch von den Jupitermonden) und (2) die Konstruktion einer Uhr, die über einen längeren Zeitraum auch unter den Bedingungen auf See eine Ortsbestimmung auf wenige Kilometer ermöglichte. Der erste Ansatz führte im 18. Jahrhundert zur Einrichtung vieler Sternwarten, unter anderem auch der Sternwarte von Greenwich. Auch die Arbeiten Newtons zur Himmelsmechanik können vor dem Hintergrund des Längengradproblems gesehen werden. Der zweite, letztendlich erfolgreiche Ansatz war die Konstruktion von Chronometern, also sehr genauen und gegen äußere Einflüsse weitgehend unempfindlichen Uhren, insbesondere der sogenannten H4 und H5 von John Harrison, der nach langem Kampf um 1775 einen Großteil des Preisgelds in Empfang nehmen durfte. Eine ausführliche und sehr lesbare Schilderung des Längengradproblems und seiner Lösung findet man in dem Buch von Dava Sobel [6].

## 4 Moderne Uhren

Da es hier nicht um eine ausführliche Darstellung der Geschichte der Zeitmessung gehen soll, seien nur die wichtigsten Entwicklungen im 19. und 20. Jahrhundert erwähnt.

Um 1850 entstanden die ersten elektrischen Uhren, bei denen die Anregung der Schwingung nicht mehr mechanisch über das langsam herabsinkende Gewicht gesteuert wurde, sondern durch einen elektrischen Strom, beispielsweise aus einer Batterie. Zwei Entwicklungen führten dabei zu den heutigen Atomuhren: (1) die Einführung des „Master-Slave-Prinzips“, bei dem Taktgeber - der Mechanismus, über den die Uhrzeit gemessen wird - und Takthalter - der Mechanismus, der für eine möglichst gleichmäßige Schwingung sorgt - getrennt wurden, was zu einer besseren Genauigkeit führte, und (2) die Ausnutzung von zunächst Kristallschwingungen (die Quarzuhr) und später atomaren Schwingungen (die Atomuhr).

### 4.1 Das Master-Slave-Prinzip

In den alten mechanischen Uhren, beispielsweise den Pendeluhrn der frühen Neuzeit, diente der periodische Prozess - das Schwingen des Pendels - sowohl zur Vorgabe einer möglichst gleichmäßigen Taktzeit, als auch zum Ablesen der Uhrzeit. Die Hemmung, beispielsweise die Ankerhemmung, übertrug dem Pendel bei jedem Takt eine minimale Energie von dem Kronrad, das durch ein Gewicht in Drehung versetzt wurde, sodass das Pendel nicht zur Ruhe kam. Gleichzeitig diente das sich drehende Kronrad aber auch als Ausgangspunkt für die rotierenden Zeiger der Uhr. Dieser Mechanismus war anfällig für Störungen und minimale Schwankungen.

Bei Master-Slave-Prinzip (zum ersten Mal umgesetzt in einer sogenannten Shortt-Uhr, benannt nach dem englischen Ingenieur William Hamilton Shortt) gibt es einen Takthalter, ein sogenanntes Primärpendel, das möglichst störungsfrei dieselbe Schwingungsperiode hält, und einen für das Ablesen der Uhrzeit bestimmten Taktgeber, in diesem Fall ein sogenanntes Sekundärpendel, über dessen Bewegung ein Zeigerwerk in Gang gesetzt wird, an dem die Uhrzeit abgelesen werden kann. Das Primärpendel befand sich bei der Shortt-Uhr in einem Vakuumzylinder, es erhielt in regelmäßigen (aber seltenen) Abständen einen wohldefinierten Impuls und sandte, ebenfalls in regelmäßigen nicht zu häufigen Abständen ein elektrisches Signal an das Sekundärpendel, das auf diese Weise gesteuert wurde und im selben Takt wie das Primärpendel schwang. Durch den Ablesemechanismus und andere äußere Einflüsse konnte das Sekundärpendel zwar in seiner Bewegung gestört werden, durch die regelmäßigen Pulse des Primärpendels wurde es aber immer wieder in Phase zum Primärpendel gebracht.

Dieses Prinzip - es wird nicht die Schwingung des Primäroszillators ausgelesen sondern die Schwingung eines Sekundäroszillators, der von dem Primäroszillator gesteuert wird - findet sich auch in späteren Präzisionsuhren, beispielsweise auch den heutigen Atomuhren. Die Shortt-Uhren waren die ersten mechanischen Uhren, mit denen um 1930 Schwankungen in der Erdrotation und damit Schwankungen in der mittleren Tageslänge nachgewiesen werden konnten.

## 4.2 Quarzuhren

1927 wurde die erste Quarzuhr vorgestellt. Nachdem um 1880 von den Brüdern Jacques und Pierre Curie die Piezoelektrizität entdeckt worden war - also dass die Anlegung einer Spannung an manche Kristalle zu einer leichten Verformung dieser Kristalle führt, und umgekehrt, dass eine mechanische Verformung der Kristalle eine Spannung erzeugt - gelang es in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts, diese im Hochfrequenzbereich zur Erzeugung von Quarzschwingungen und zum Auslesen dieser Schwingungen zu nutzen und damit die ersten Quarzuhren zu konstruieren. Den größten Einfluss auf die Genauigkeit hatte ihre Temperaturempfindlichkeit, die in den nächsten Jahren zunehmend unter Kontrolle gebracht werden konnte.

## 4.3 Atomuhren

Atomuhren nutzen die harmonischen Schwingungen im Zusammenhang mit Übergängen zwischen atomaren Zuständen. Bei den älteren Atomuhren, einschließlich den Cäsium-Uhren, handelt es sich dabei um Übergänge im Radiowellenbereich, meist Übergänge zur Hyperfeinstruktur. Sowohl bei Wasserstoff-Uhren als auch Cäsium-Uhren betrachtet man den Hyperfeinstrukturübergang zwischen zwei elektronischen Spinzuständen relativ zum Kernspin: Die Atome haben ein einzelnes Elektron in der äußeren Schale, dessen Spin parallel oder antiparallel zum Kernspin sein kann. Die Energie zwischen diesen beiden Zuständen unterscheidet sich nur minimal und entspricht langwelligen Strahlungen: Bei Wasserstoff handelt es sich um die in der Astronomie bekannte 21-cm-Strahlung - der Übergang entspricht einer Frequenz von 1 420 MHz bzw. einer Energie von  $5,87 \mu\text{eV}$  und somit hat die Strahlung im Vakuum eine Wellenlänge von 21 cm - und bei Cäsium handelt es sich um die zu Beginn dieses Kapitels angegebenen Werte.

Cäsium hat mehrere Vorteile: Einerseits gibt es von Cäsium nur ein stabiles Isotop (Cs-133), sodass der Einfluss unterschiedlicher Isotope in einer Probe vernachlässigt werden kann, Cäsium hat ein einzelnes Elektron in seiner äußeren Schale und sein Siedepunkt ist mit rund  $690^\circ\text{C}$  vergleichsweise niedrig. Schon bei rund  $100^\circ\text{C}$  gibt es thermisch verdampfende Atome, die sich für den Betrieb einer Atomuhr eignen.

In einem Resonator werden die Cäsiumatome zu Übergängen angeregt (Abb. 4), wobei der

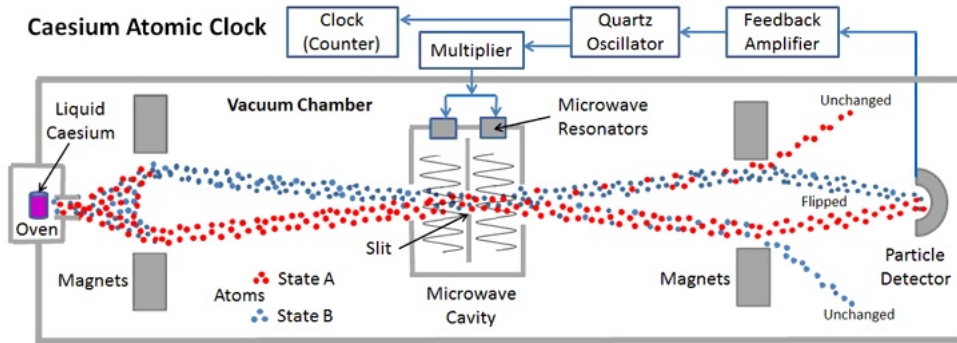


Abbildung 4: Prinzip einer Cäsium-Uhr: Aus einem Ofen strömen Cäsium-Atome nahezu gleichverteilt im Grundzustand und im angeregten Hyperfeinstrukturzustand. In einem Magnetfeld werden die Atome im Grundzustand von denen im angeregten Zustand getrennt (sie haben unterschiedliche magnetische Momente) und treten dann unter einem unterschiedlichen Winkel in einen Resonator. In diesem Resonator werden sie einem oszillierenden Feld ausgesetzt, dessen Frequenz über eine Rückkopplung auf die Eigenfrequenz des Übergangs eingestellt wird. Dadurch werden die Atome zu Übergängen angeregt. In einem Detektor hinter dem Resonator wird die Anzahl der Atome gemessen, die einen Übergang gemacht haben - je genauer die Resonatorfrequenz auf die Übergangsfrequenz eingestellt ist, umso mehr Atome werden zu einem Übergang angeregt. Der Detektor steuert über die Rückkopplung die Frequenz des Resonators, sodass möglichst viele Atome den Detektor erreichen. Abgelesen wird die Frequenz des Resonators. (aus [2])

Anteil der Atome, die einen Übergang machen, umso höher ist, je näher die Frequenz des Resonatorfeldes an der Übergangsfrequenz liegt. Die Frequenz des Resonatorfeldes wird von einem Quarzkristall gesteuert, der wiederum von einem Detektor hinter dem Resonator gesteuert wird. Dieser Detektor misst die Anzahl der Atome, die einen Übergang gemacht haben, und er steuert den Quarzkristall so, dass diese Anzahl maximal bleibt. An dem Quarzkristall wird dann auch die jeweilige Frequenz abgelesen und in eine Uhrzeit umgewandelt.

Moderne Atomuhren arbeiten bei optischen Frequenzen und erreichen damit nochmals eine um einen Faktor 1000 bis 10 000 höhere Genauigkeit. Sie befinden sich derzeit in der Testphase, es wird aber nicht ausgeschlossen, dass in einigen Jahren die Sekunde über solche Opticlocks neu festgelegt wird.

#### 4.4 Fountain-Clocks

Das bisher beschriebene Verfahren beruht auf Ideen von Isidor Isaac Rabi Mitte des letzten Jahrhunderts. Diese Ideen wurden von seinem „Schüler“ Norman Ramsey nochmals erweitert und zu größerer Präzision geführt. Eine wesentliche Verbesserung besteht darin, die Cs-Atome zweimal für einen kurzen Augenblick durch einen Resonator zu schicken, wobei die Präzession der Uhr umso größer ist, je mehr Zeit zwischen diesen beiden Augenblicken liegt. In sogenannten Fountain-Clocks („Springbrunnen-Uhren“) werden die Cäsiumatome zunächst abgekühlt (d.h. verlangsamt, dies geschieht mit Laserkühlung) und dann mit wenigen Metern pro Sekunde senkrecht nach oben gestoßen. Sie durchlaufen in einem freien Fall eine Parabelkurve, wobei sie zu Beginn und am Ende kurz durch einen Resonator fliegen. Auf diese Weise befinden sich die Cäsiumatome wesentlich länger in der Phase zwischen den Resonatoreinflüssen und die Genauigkeit der Frequenz kann besser reguliert werden.



## 5 Kuriositäten

### 5.1 Die tautochrone Kurve - Zykloide

Nachdem Galilei erkannt hatte, dass bei einem Pendel die Periode bei kleinen Auslenkungen nahezu unabhängig von der Amplitude des Pendels ist, hatte Christiaan Huygens 1656 die Idee, ein Pendel als Taktgeber einer Uhr zu verwenden. Ihm war jedoch bewusst, dass bei einem realen Pendel die Periode nicht vollkommen unabhängig von der Auslenkung ist und bei großen Auslenkungen doch deutliche Abhängigkeiten von der Amplitude auftreten. Huygens stellte sich daraufhin die Frage, wie man erreichen kann, dass die Periodendauer eines Pendels vollkommen unabhängig von der Auslenkung ist.

Das theoretische Problem besteht zunächst darin, die Bahnkurve zu bestimmen, die ein Massenpunkt durchlaufen muss, sodass die Periode der Schwingung unabhängig von der Auslenkung ist. Eine solche Bahnkurve bezeichnet man als tautochrone oder auch isochrone Bahnkurve. Eine Kreiskurve, wie sie bei einem Pendel konstanter Pendellänge durchlaufen wird, hat diese Eigenschaft nur bis auf Terme 4. Ordnung in der Auslenkung (z.B. im Auslenkungswinkel) und daher nur für kleine Auslenkungen. Das zweite, eher praktische Problem besteht in der Konstruktion eines Aufhängemechanismus, sodass die Masse an einem Fadenpendel tatsächlich die tautochrone Bahnkurve durchläuft.

Man kann analytisch mit Variationsrechnung die Form dieser Bahnkurve herleiten. Wir geben hier jedoch das Ergebnis an und beweisen, dass diese Bahnkurve die gewünschten Eigenschaften hat. Es handelt sich um eine sogenannte Zykloide, wie sie in Abb. 5 dargestellt ist. Eine Zykloide wird von einer Markierung am Rand eines Kreises beschrieben, wenn dieser Kreis an einer Geraden entlang rollt.

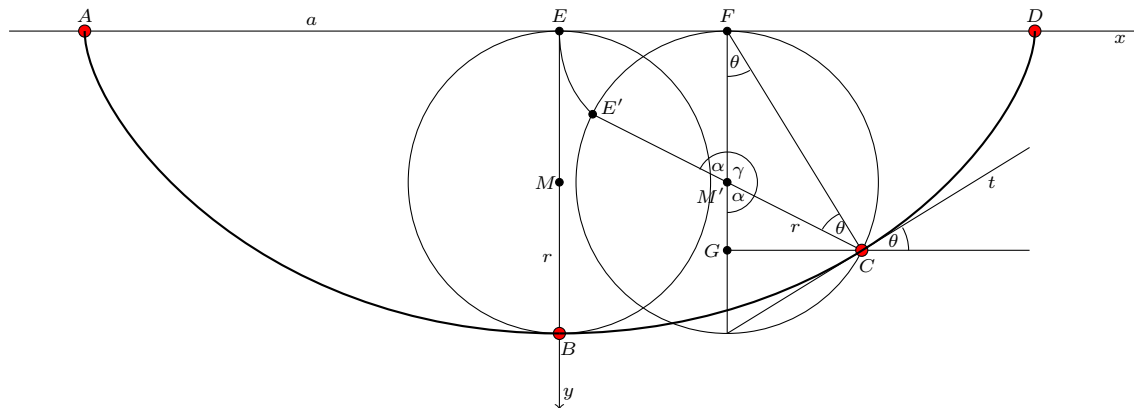


Abbildung 5: Die Zykloide. Wenn ein Kreis (Radius  $r$ ) auf einer geraden Linie  $a$  (gleichzeitig die  $x$ -Achse) abrollt, beschreibt ein Punkt  $B$  auf dem Rand des Kreises (rot eingezeichnet) den Bogen einer Zykloide. Es gilt immer  $\alpha = 2\theta$ , da sowohl  $\alpha + \gamma$  als auch  $\gamma + 2\theta$  einem Winkel von  $180^\circ$  entsprechen. Die Tangente  $t$  im Punkt  $C$  steht senkrecht auf der Verbindungslinie  $\overline{FC}$  und schließt mit einer Waagerechten einen Winkel  $\theta$  ein. Der Nullpunkt des Koordinatensystems sei der Punkt  $E$ . Wenn der Kreis in diesem Punkt die Achse  $a$  berührt, sei  $B$  am Minimum der Kurve, also auf dem Kreis dem Punkt  $E$  gegenüber.

Wir wählen den Nullpunkt unseres Koordinatensystems als den Berührungspunkt  $E$  des Kreises mit der Geraden an der Stelle, wo die Markierung (Punkt  $B$ ) im Minimum ist. Rollt der Kreis um einen Winkel  $\alpha$  nach rechts, ist der Berührungspunkt mit der Geraden der Punkt  $F$ . Die Distanz

zwischen  $E$  und  $F$  ist genau gleich der Bogenlänge zwischen dem ehemaligen Berührungspunkt (jetzt  $E'$ ) und dem Punkt  $F$ , also  $\overline{EF} = \alpha r$ , wobei der Winkel  $\alpha$  in Radianten ausgedrückt wird. Der Punkt  $B$  hat sich bis zum Punkt  $C$  weiterbewegt und dabei den Bogenabschnitt der Zykloide überstrichen.

Wir geben zunächst eine Parametrisierung der Zykloide an: Die  $x$ - und die  $y$ -Koordinate werden als Funktion des Winkels  $\alpha \in [-\pi, +\pi]$  beschrieben:

$$x(\alpha) = r(\alpha + \sin \alpha) \quad , \quad y(\alpha) = -r(1 + \cos \alpha) . \quad (1)$$

Die  $x$ -Koordinate ergibt sich aus der Summe von zwei Beiträgen:  $\overline{EF} + \overline{GC} = r\alpha + r \sin \alpha$ , und die  $y$ -Koordinate ergibt sich aus:  $\overline{FM'} + \overline{M'G} = r + r \cos \alpha$  (in die negative  $y$ -Richtung).

Zum Beweis, dass die Zykloide tatsächlich die Lösung des Problems darstellt, ist zu zeigen, dass die Kraft proportional zur Bogenlänge der Auslenkung ist, dass es sich also um einen idealen harmonischen Oszillator handelt. Dies unterscheidet die Zykloide von einer Parabel: Bei einer Parabel ist die Kraft proportional zur Auslenkung in  $x$ -Richtung (oder, was äquivalent ist, das Potenzial ist proportional zum Quadrat der Auslenkung in  $x$ -Richtung), bei einer Zykloide ist die Kraft proportional zur Bogenlänge. Die Richtung der Kraft ist tangential zur Kurve und somit ist

$$F = mg \sin \theta = mg \sin \frac{\alpha}{2} . \quad (2)$$

Die Bogenlänge entlang der Zykloide (also zwischen  $B$  und  $C$ ) erhalten wir aus

$$ds^2 = \left( \left( \frac{dx}{d\alpha} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\alpha} \right)^2 \right) (d\alpha)^2 \quad (3)$$

$$= (r^2(1 + \cos \alpha)^2 + r^2(\sin \alpha)^2) (d\alpha)^2 \quad (4)$$

$$= 2r^2(1 + \cos \alpha)(d\alpha)^2 . \quad (5)$$

Mit der trigonometrischen Beziehung

$$1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad (6)$$

folgt

$$ds = 2r \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) d\alpha \quad (7)$$

und damit

$$s = 2r \int_0^\alpha \cos \left( \frac{\alpha'}{2} \right) d\alpha' = 4r \sin \frac{\alpha'}{2} \Big|_0^\alpha = 4r \sin \frac{\alpha}{2} . \quad (8)$$

Für die Zykloide gilt also tatsächlich, dass die Bogenlänge proportional zur rüctreibenden Kraft ist und damit handelt es sich um einen idealen harmonischen Oszillator mit einer von der Auslenkung unabhängigen Periode.

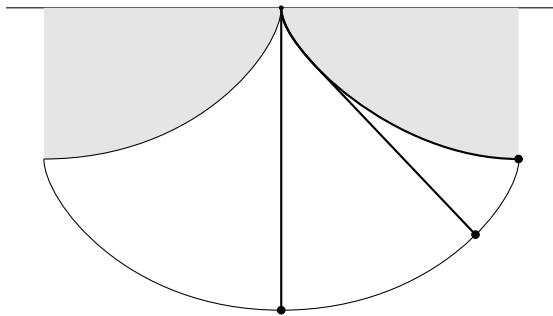


Abbildung 6: Die Huygens'sche Aufhängung. Die Zykloide löst gleichzeitig das zweite Problem bezüglich eines von der Auslenkung unabhängigen Pendels: Wenn das schwingende Pendel an seiner Aufhängung durch eine Zykloide begrenzt ist, sodass der obere Teil des Pendelseils an der Zykloide entlang läuft, folgt die Masse am Ende des Pendels einer Zykloide.

Das zweite Problem des Huygens'schen Pendels, die Aufhängung, wird ebenfalls durch die Zykloide gelöst. Abbildung 6 zeigt, wie man die Aufhängung eines Pendels durch eine Zykloide eingrenzen kann, sodass die Pendelmasse tatsächlich die Trajektorie einer Zykloide durchläuft. Dies bezeichnet man auch als die Huygens'sche Pendelaufhängung.

Huygens erhoffte sich durch einen solchen Mechanismus eine tautochrone Schwingung des Pendels auch unter extremen Bedingungen (z.B. auf einem dem Wind und Wellen ausgesetzten Schiff). Letztendlich war diese Idee nicht erfolgreich, statt dessen wurden bessere Hemmungen, die unter anderem kleinere Auslenkungen ermöglichten, entwickelt.

## Literatur

- [1] Till Niermann - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21792620>
- [2] aus: Electropaedia "Clock and Watch Movements", <https://mpoweruk.com/timekeepers.htm>
- [3] aus Wikipedia "Foliot". <https://de.wikipedia.org/wiki/Foliot#/media/Datei:Foliot.jpg>.
- [4] Spindel-Hemmung; <https://www.youtube.com/watch?v=UhFPb-ZZTyI>
- [5] O. Neugebauer; *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 1; Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1975.
- [6] Dava Sobel; *Longitude*, Fourth Estate, Second Printing 1995. Deutsch: *Längengrad*; Malik, National Geographic, 2013.