

# Kapitel 7

## Verschränkung

Möchte man in der Quantentheorie Systeme beschreiben, die aus mehreren Teilsystemen, beispielsweise mehreren Teilchen, bestehen, so ergeben sich zwei Besonderheiten: (1) Der Zusammenhang zwischen dem Spin von Teilchen und ihrer Statistik (das Spin-Statistik-Theorem) für Systeme aus identischen Teilchen, was beispielsweise für Elektronen das Pauli'sche Ausschließungsprinzip impliziert, und (2) die sogenannten Quantenkorrelationen von verschränkten Systemen. Gerade die Möglichkeit solcher neuartiger Korrelationen, die sich nicht auf eine direkte kausale Beziehung und auch nicht im klassischen Sinn auf eine gemeinsame Vergangenheit mit einer durchgängigen Kette von Ursache-Wirkungs-Relationen zurückführen lassen, ist immer noch Gegenstand grundlegender Diskussionen. Auf das Spin-Statistik-Theorem wird an anderer Stelle eingegangen. In diesem Kurztext geht es in erster Linie um das Konzept der Verschränkung.

### 7.1 Das Phänomen der Verschränkung

Eine Voraussetzung, um überhaupt von Verschränkung sprechen zu können, sind zwei Systeme unabhängiger Freiheitsgrade. Nur dann ist es sinnvoll von Zuständen zu sprechen, für die diese beiden Freiheitsgrade miteinander verschränkt sind. „Unabhängig“ bedeutet hier, dass sämtliche Observablen des einen Systems von Freiheitsgraden mit allen Observablen des anderen Systems kommutieren, d.h., je zwei Observablen, von denen sich eine auf das eine System und die andere auf das andere System beziehen, lassen sich gleichzeitig messen.

Das typische Beispiel sind die Freiheitsgrade zu zwei verschiedenen Teilchen: Sämtliche Observablen, die sich an dem einen Teilchen messen lassen (Ort, Impuls, Spin, etc.) kommutieren mit allen Observablen, die sich an dem anderen Teilchen messen lassen. Aber auch die räumlichen Observablen (Ort, Impuls und Funktionen dieser beiden Observablen) eines Teilchens kommutieren mit seinen inneren Freiheitsgraden (z.B. den Spinkomponenten). Auch in solchen Fällen kann man von Verschränkung (z.B. zwischen dem Ort eines Teilchens und seinem Spin) sprechen. Zunächst beschränken wir uns jedoch auf den Fall von zwei Teilchen.

Da an jedem der beiden Teilchen gleichzeitig jeweils eine Observable gemessen werden kann, können wir auch nach Korrelationen zwischen den Ergebnissen solcher Messungen fragen. Betrachten wir als Beispiel zwei Elektronen in einem großen Abstand (sodass diese beiden Elektronen aufgrund ihrer verschiedenen Orte unterscheidbar sind), dann können wir an beiden Elektronen gleichzeitig eine beliebige Spin-Komponente messen (z.B. mit einem Stern-Gerlach-Experiment). Wir bezeichnen mit  $w(a, \mathbf{n}_1; b, \mathbf{n}_2)$  die Wahrscheinlichkeit, an Teilchen 1 den Wert  $a = \pm 1$  (in Einheiten von  $\hbar/2$ ) bei einer Messung des Spins in  $\mathbf{n}_1$ -Richtung zu erhalten und gleichzeitig an Teilchen 2 den Wert  $b = \pm 1$

bei einer Messung des Spins in  $\mathbf{n}_2$ -Richtung zu erhalten. Sind diese Wahrscheinlichkeiten unabhängig von einander, d.h. sind diese Wahrscheinlichkeiten das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten,

$$w(a, \mathbf{n}_1; b, \mathbf{n}_2) = w_1(a, \mathbf{n}_1)w_2(b, \mathbf{n}_2), \quad (7.1)$$

dann liegt keine Verschränkung vor. Sind die Wahrscheinlichkeiten nicht unabhängig, d.h., sind die konditionierten Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis an einem Teilchen abhängig von dem Ereignis, das an dem anderen Teilchen gemessen wurde, *und* handelt es sich um einen *reinen* Zustand der beiden Teilchen, dann liegt eine Verschränkung vor.

Das Phänomen konditionierter Wahrscheinlichkeiten gibt es auch in der klassischen Physik. Man denke an folgende Situation: Jeden Tag werden an zwei Personen zwei Emails verschickt, die einen identischen Inhalt haben – der Einfachheit halber nur entweder die Zahl +1 oder die Zahl –1. Sobald eine Person ihre Email liest und somit die Zahl in ihrer Email kennt, weiß sie, was die andere Person liest oder lesen wird. Das Lesen einer Email erlaubt eine neue Vorhersage für den Inhalt der anderen Email.

Allerdings handelt es sich hier um ein Gemisch von Emailpaaren: ein Gemisch aus Emailpaaren, bei denen beide Emails den Inhalt „+1“ haben, und Emailpaaren, bei denen beide Emails den Inhalt „–1“ haben. Hätten alle Emails immer denselben Inhalt, wüsste man schon im Voraus, was die andere Person lesen wird. Durch das Lesen der eigenen Email würde in diesem Fall diese Vorhersage nicht geändert. Nur weil es sich um Emails mit potenziell verschiedenen Inhalten handelt (entweder beide +1 oder beide –1), kommt es zu einer wirklichen Vorhersage, nachdem die eine Email gelesen wurde.

Betrachten wir ganz konkret einen sogenannten  $\Phi^+$  Bell-Zustand, der ein verschränkter reiner Zustand ist:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2 + |\downarrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2). \quad (7.2)$$

Hierbei bezeichnet  $|\uparrow_z\rangle_1$  einen Eigenzustand von Teilchen 1 zum Spin in  $z$ -Richtung mit Eigenwert  $+\hbar/2$ . Entsprechend bezeichnet  $\downarrow_z$  den Eigenwert  $-\hbar/2$  bezüglich der  $z$ -Richtung. Das Gleiche gilt für Teilchen 2, gekennzeichnet durch den Index an der Klammer.

Nimmt man an einem der beiden Teilchen, die von diesem Zustand beschrieben werden, eine Spinmessung entlang der  $z$ -Richtung vor, kann man vorhersagen, dass eine entsprechende Spinmessung am anderen Teilchen denselben Wert ergibt. Die konditionierten Wahrscheinlichkeiten sind also gleich +1 für gleiche Spinrichtungen und 0 für entgegengesetzte. Die ursprüngliche Wahrscheinlichkeit, 0,5 für jede der beiden Spinrichtungen, wird also durch die Kenntnis des Ergebnisses der ersten Messung revidiert, indem man nun den Spin für das andere Teilchen mit Sicherheit vorhersagen kann.

Dasselbe Ergebnis erhält man allerdings auch, wenn ein gleiches Gemisch aus Zuständen  $|\uparrow_z\rangle_1|\uparrow_z\rangle_2$  und  $|\downarrow_z\rangle_1|\downarrow_z\rangle_2$  vorliegt. In diesem Fall würde man den Zustand allerdings durch eine Dichtematrix ausdrücken. Dieser Fall ist vergleichbar mit einer klassischen Korrelation, die eine gemeinsame Ursache hat. Er entspricht den beiden Arten von Emails (beide mit Inhalt +1 oder beide mit Inhalt –1).

Wie kann man diese beiden Fälle experimentell unterscheiden? Eine Unterscheidung ist nur möglich, indem man auch andere Observablen an dem System aus zwei Teilchen misst. Beispielsweise ist der  $\Phi^+$ -Zustand ein Zustand, der sich unter reellen Koordinatentransformationen (Drehungen des Koordinatensystems um die Ausbreitungsachse der Teilchen) nicht ändert. Die Korrelation gilt bezüglich jeder beliebigen Richtung in der  $xz$ -Ebene, in welcher der Spin gemessen wird ([Herleitung](#)). Diese Aussage gilt nicht für das Gemisch. Misst man dort die Spin-Komponenten beispielsweise in  $x$ -Richtung, erhält man auch Ergebnisse, bei denen die Werte auf beiden Seiten verschieden sind. Dies zeigt auch eine einfache Rechnung, wenn man die  $z$ -Eigenzustände nach  $x$ -Eigenzuständen entwickelt

(Herleitung 2). Eine Korrelation bezüglich aller (reellen) Richtungen lässt sich nicht durch ein echtes Gemisch realisieren.

## 7.2 Das Tensorprodukt von Vektorräumen

In der klassischen Mechanik ist der Phasenraum von  $N$  Teilchen das kartesische Produkt der Einteilchenphasenräume, d.h., ein reiner  $N$ -Teilchenzustand entspricht einem Punkt in einem  $6N$ -dimensionalen Phasenraum: jeweils drei Orts- und Impulskomponenten für jedes Teilchen. In der Quantentheorie wird der Zustandsraum über einen Hilbert-Raum definiert. Bei zwei Vektorräumen ist der Produktraum das sogenannte *Tensorprodukt* der beiden einzelnen Vektorräume: Dazu bildet man zunächst das kartesische Produkt von zwei Basen der Teilräume; dies definiert eine Basis des Produktraums. Der Produkt-Vektorraum besteht aus sämtlichen Linearkombinationen, die von dieser Basis aufgespannt werden.

In diesem Abschnitt wird das Tensorprodukt auf vergleichsweise abstraktem Niveau beschrieben. Wer zunächst ein konkretes Beispiel möchte, kann Abschnitt 7.4 vorziehen.

Seien  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  zwei Vektorräume über demselben Körper mit jeweiligen Basisvektoren  $\{|e_i\rangle\}_{i \in I}$  und  $\{|f_j\rangle\}_{j \in J}$  (die Indexmengen  $I$  für  $i$  und  $J$  für  $j$  müssen nicht gleich sein). Das *Tensorprodukt*  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  ist definiert als der Vektorraum, der durch die Paare von Basisvektoren  $\{|e_i, f_j\rangle\}_{i \in I, j \in J}$  aufgespannt wird. Ein beliebiger Vektor  $|x\rangle \in \mathcal{H}$  lässt sich somit immer in der Form

$$|x\rangle = \sum_{i,j} x_{ij} |e_i, f_j\rangle \quad (7.3)$$

darstellen.

Statt  $|e_i, f_j\rangle$  schreibt man manchmal auch  $|e_i\rangle |f_j\rangle$  oder  $|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$ . Seien  $|a\rangle = \sum_i a_i |e_i\rangle \in \mathcal{H}_1$  und  $|b\rangle = \sum_j b_j |f_j\rangle \in \mathcal{H}_2$  Vektoren aus den einzelnen Vektorräumen, dann ist

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = \left( \sum_i a_i |e_i\rangle \right) \otimes \left( \sum_j b_j |f_j\rangle \right) = \sum_{i,j} a_i b_j |e_i, f_j\rangle \quad (7.4)$$

das Tensorprodukt dieser beiden Vektoren. Haben  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  jeweils die Dimensionen  $d_1$  bzw.  $d_2$ , so hat  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  die Dimension  $d_1 \cdot d_2$ .

Man unterscheide zwischen dem Tensorprodukt von zwei Vektorräumen und dem kartesischen Produkt der Vektorräume (das man auch als direkte Summe  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  schreibt). Das kartesische Produkt besteht aus allen Paaren  $(x, y)$  von Vektoren  $x \in \mathcal{H}_1$  und  $y \in \mathcal{H}_2$  mit komponentenweiser Addition und hat die Dimension  $d_1 + d_2$ . Für eine Basis  $\{|e_i\rangle\}$  von  $\mathcal{H}_1$  und eine Basis  $\{|f_j\rangle\}$  von  $\mathcal{H}_2$  ist die mengentheoretische Vereinigung  $\{|e_i\rangle\} \cup \{|f_j\rangle\}$  eine Basis in  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  und jeder Vektor  $z$  in  $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$  lässt sich in der Form

$$z = \sum_{i=1}^{d_1} x_i |e_i\rangle + \sum_{j=1}^{d_2} y_j |f_j\rangle \quad (7.5)$$

schreiben. Diese beiden Konstruktionen eines Vektorraums aus zwei gegebenen Vektorräumen sollten nicht verwechselt werden.

Ist auf den beiden Vektorräumen jeweils ein Skalarprodukt definiert, so kann man auch auf dem Produktraum ein Skalarprodukt definieren: Für zwei Vektoren des Tensorproduktraums

$$|x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}; \quad |x\rangle = \sum_{i,j} x_{ij} |e_i, f_j\rangle; \quad |y\rangle = \sum_{k,l} y_{kl} |e_k, f_l\rangle \quad (7.6)$$

gilt:

$$\langle y | x \rangle = \sum_{i,j,k,l} y_{kl}^* x_{ij} \langle e_i | e_k \rangle \langle f_j | f_l \rangle \quad (7.7)$$

und, sofern es sich bei  $\{|e_k\rangle\}$  und  $\{|f_l\rangle\}$  um Orthonormalbasen handelt

$$\langle y|x\rangle = \sum_{i,j} y_{ji}^* x_{ij}. \quad (7.8)$$

Auf diese Weise wird auch der Produktraum von zwei Hilbert-Räumen wieder zu einem Hilbert-Raum.

Diese Definition des Tensorprodukts von Vektorräumen (bzw. von Hilbert-Räumen) ist nicht sehr elegant, da sie explizit auf Basissysteme in den jeweiligen Vektorräumen Bezug nimmt. Es gibt in der Mathematik zwar elegantere Möglichkeiten, das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen ohne Bezug auf eine Basis zu definieren, diese Definitionen sind aber für konkrete Berechnungen sehr unhandlich. Der Nachteil der obigen Definition ist, dass man von relevanten Konzepten (beispielsweise dem Konzept der Verschränkung, s.u.) eigentlich beweisen muss, dass sie nicht von der Wahl der Basisvektoren bei der Konstruktion des Tensorraums abhängen. Für das Folgende sollte man diese Aussage einfach glauben oder ein entsprechendes Mathematikbuch konsultieren.

Seien  $A_1$  ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}_1$  und  $A_2$  ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}_2$ , dann ist  $A_1 \otimes A_2$  ein linearer Operator auf  $\mathcal{H}$ , der folgendermaßen auf die Basisvektoren wirkt:

$$(A_1 \otimes A_2)(|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle) = A_1|e_i\rangle \otimes A_2|f_j\rangle \quad (7.9)$$

Wegen der Linearität der Abbildung ist durch diese Definition festgelegt, wie ein solcher Operator auf einen beliebigen Vektor im Tensorproduktraum wirkt. Insbesondere kann man sich leicht überzeugen, dass zwei Operatoren, die auf verschiedene Vektorräume wirken, im Tensorprodukt immer kommutieren:

$$(A_1 \otimes \mathbf{1}_2)(\mathbf{1}_1 \otimes A_2) = (\mathbf{1}_1 \otimes A_2)(A_1 \otimes \mathbf{1}_2) \quad (7.10)$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{1}_i$  die Identitätsabbildung in Vektorraum  $\mathcal{H}_i$ . Oft findet man dafür vereinfacht die Schreibweise

$$[A_1, A_2] = 0, \quad (7.11)$$

wobei aber betont werden muss, dass sich die Indizes auf verschiedene Vektorräume beziehen und mit  $A_1$  eigentlich  $A_1 \otimes \mathbf{1}_2$  gemeint ist und entsprechend  $A_2$  für  $\mathbf{1}_1 \otimes A_2$  steht.

Allgemein lässt sich ein Operator  $B$  auf  $\mathcal{H}$  immer als eine Linearkombination solcher „Produktoperatoren“ schreiben, d.h.

$$B = \sum_{ij} b_{ij} (A_i \otimes A_j). \quad (7.12)$$

Nun wird auch die Bra-Ket-Notation für Operatoren einsichtiger: Lineare Abbildungen von einem Vektorraum  $V$  in einen Vektorraum  $W$  kann man abstrakt als Elemente von  $W \otimes V^*$  auffassen, wobei  $V^*$  der Dualraum von  $V$  ist. Ein solches Element aus  $W \otimes V^*$  hat die Eigenschaft, dass man es auf ein Element auf  $V$  anwenden muss (das ist der  $V^*$ -Anteil, er liefert zunächst eine Zahl) und das Ergebnis ist ein Vektor in  $W$  (der  $W$ -Anteil, der mit der vorher erhaltenen Zahl multipliziert wird). Diese sehr abstrakte Sichtweise steckt implizit hinter der Bra-Ket-Notation für Operatoren.

### 7.3 Separable Zustände und verschränkte Zustände

Ist ein Vektorraum  $\mathcal{H}$  das Tensorprodukt von zwei Vektorräumen  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$ , kann man für Vektoren in dem Tensorproduktraum folgende Eigenschaften definieren:

Ein Vektor  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  heißt *separabel*, wenn es Vektoren  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$  und  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_2$  gibt, sodass

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle, \quad (7.13)$$

andernfalls heißt der Vektor  $|\Psi\rangle$  (bezüglich des vorgegebenen Tensorprodukts) *verschränkt*.

Hierzu ein paar Anmerkungen:

1. Die Begriffe *separabel* bzw. *verschränkt* sind nur in Bezug auf eine Tensorproduktdarstellung eines Vektorraums definiert. Es macht keinen Sinn, von einem verschränkten Vektor bzw. Zustand *per se* zu sprechen. Ein Vektor kann immer nur *verschränkt in Bezug auf eine Partitionierung* (d.h. Aufteilung des Gesamtsystems in Teilsysteme) sein.
2. Die Eigenschaften „separabel“ und „verschränkt“ wurden zwar für Vektoren definiert, aber man kann sich leicht davon überzeugen, dass sie auch für die Darstellung reiner physikalischer Zustände (also Strahlen bzw. 1-dimensionale lineare Unterräume im Hilbert-Raum) sinnvoll sind: Ist ein Vektor separabel (bzw. verschränkt), dann ist auch ein beliebiges komplexes Vielfaches dieses Vektors separabel (bzw. verschränkt). Die Produktzerlegung von Strahlen ist sogar eindeutig, wohingegen die Zerlegung eines separablen Vektors nicht eindeutig ist, da z.B.  $\vec{x} \otimes \vec{y}$  und  $(\frac{1}{\alpha}\vec{x}) \otimes (\alpha\vec{y})$  denselben Produktvektor definieren.

Ein reiner Zustand eines aus zwei Teilsystemen zusammengesetzten Gesamtsystems heißt verschränkt, wenn er durch einen verschränkten Zustandsvektor in dem zugehörigen Produkt-Hilbert-Raum beschrieben wird. Entsprechend heißt ein solcher Zustand separabel, wenn der zugehörige Zustandsvektor separabel ist.

3. Es ist wichtig zu betonen, dass die Konzepte der Separabilität und Verschränktheit nicht von den gewählten Basissystemen in den Hilbert-Räumen abhängen. Auch die Definition des Tensorprodukts hängt nicht von der Wahl der Basen ab.
4. Auch wenn die Definitionen für einen separablen bzw. verschränkten Vektor sehr einfach sind, kann es in einem konkreten Fall durchaus schwierig sein zu entscheiden, ob ein gegebener Vektor in Bezug auf eine Tensorproduktzerlegung separabel oder verschränkt ist. In Abschnitt 7.6 wird ein Kriterium eingeführt, mit dem sich diese Entscheidung zumindest im Prinzip treffen lässt.
5. Ein Problem im Zusammenhang mit verschränkten Vektoren ist, dass weder die separablen noch die verschränkten Vektoren einen Unterraum (also Vektorraum) von  $\mathcal{H}$  bilden. Die Linearkombination zweier separabler Vektoren ist meist verschränkt und die Linearkombination verschränkter Vektoren kann separabel sein.

## 7.4 Beispiel: Der Produktraum $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

Sehr viele Beispiele beziehen sich auf Zwei-Zustandssysteme, die durch den komplexen zweidimensionalen Hilbert-Raum  $\mathbb{C}^2$  beschrieben werden. Das Tensorprodukt von zwei solchen Vektorräumen beschreibt zwei Zwei-Zustandssysteme. Dieses besteht aus den Vektoren mit Komponenten  $x_{ij}$  mit  $i, j = 1, 2$ . Das Tensorprodukt von zwei Vektoren  $\mathbf{x}$  mit Komponenten  $x_i$  und  $\mathbf{y}$  mit Komponenten  $y_i$  ist

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

Davon zu unterscheiden ist die direkte Summe bzw. das kartesische Produkt der beiden Vektoren:

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Für den Spezialfall von zwei zweidimensionalen Vektorräumen ist die Dimension der Summe und des Produkts der Vektorräume gleich ( $2 + 2 = 2 \times 2 = 4$ ), sodass in diesem Fall eine Verwechslung nochmals leichter möglich ist.

Nicht jeder Vektor im  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  lässt sich als Produkt von zwei Vektoren im  $\mathbb{C}^2$  schreiben. Für solche Vektoren muss offensichtlich gelten  $x_{11}x_{22} = x_{12}x_{21}$ , d.h., das Produkt der beiden äußeren Komponenten ist gleich dem Produkt der beiden mittleren Komponenten. Es zeigt sich, dass beim  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  diese Bedingung nicht nur notwendig sondern sogar hinreichend ist, damit ein Vektor separabel ist, sich also als Tensorprodukt von zwei Vektoren darstellen lässt. Ist bei einem Vektor im  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$  diese Bedingung nicht erfüllt, ist der Vektor verschränkt.

Der eingangs erwähnte  $\Phi^+$  Bell-Zustand hat in dieser Schreibweise die Form

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.16)$$

und für den sogenannten EPR-Zustand (benannt nach Einstein, Podolsky und Rosen, wobei man auch Bohm hinzunehmen sollte), den man auch als  $\Psi^-$  Bell-Zustand bezeichnet, folgt:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

In beiden Fällen ist offensichtlich, dass das Produkt der beiden mittleren Komponenten nicht gleich dem Produkt der beiden äußeren Komponenten ist.

## 7.5 Beispiele für Tensorprodukte und Verschränkungen

### 7.5.1 Zwei Teilchen

Wie schon erwähnt ist das Standardbeispiel für ein System, bei dem eine Verschränkung auftreten kann, ein Zwei-Teilchensystem. Sämtliche Observablen an dem einen Teilchen vertauschen mit sämtlichen Observablen an dem anderen Teilchen. Das gilt für die räumlichen Freiheitsgrade (meist beschrieben durch Wellenfunktionen) ebenso wie für diskrete Freiheitsgrade wie den Spin.

Wird der räumliche Anteil eines Ein-Teilchensystems durch den Hilbert-Raum  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3, d^3x)$  beschrieben, so ist der Hilbert-Raum für ein Zwei-Teilchensystem das Tensorprodukt dieses Hilbert-Raums mit sich selbst, und das ist der Hilbert-Raum  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^6, d^6x)$ , also der Hilbert-Raum der Funktionen  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 d^3x d^3y = 1. \quad (7.18)$$

Es ist also

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3, d^3x) \otimes \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3, d^3x) = \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, d^6x). \quad (7.19)$$

Etwas vereinfacht kann man sagen, dass das Tensorprodukt eines Funktionenraums in  $n$  Variablen mit dem Funktionenraum in  $m$  Variablen der Funktionenraum in  $n + m$  Variablen ist.

Eine Funktion  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  heißt verschränkt, wenn es keine Funktionen  $\phi(\mathbf{x})$  und  $\varphi(\mathbf{y})$  gibt, sodass  $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})$ .

Dies lässt sich auf beliebige Systeme verallgemeinern, die in natürlicher Weise in Subsysteme unterteilt werden können.

### 7.5.2 Ort und Spin

Auch die räumlichen Observablen Ort und Impuls kommutieren mit den Observablen zum Spin, beispielsweise bei einem Elektron oder bei einem Photon (wo der Spin der Polarisation entspricht). Damit kann es auch zu einer Verschränkung zwischen Orts- und Spin-Freiheitsgraden kommen.

Ein typisches Beispiel ist das Stern-Gerlach-Experiment. Tritt ein Spin-1/2-Teilchen durch einen Stern-Gerlach-Magneten, wird es nach oben oder unten (relativ zur Richtung des inhomogenen Magnetfelds) abgelenkt. Elektronen, die nach oben abgelenkt wurden, haben Spin  $+\frac{1}{2}\hbar$ , Elektronen, die nach unten abgelenkt wurden, haben Spin  $-\frac{1}{2}\hbar$ . Der Zustand nach dem Durchtritt durch den Magneten aber vor dem Auftreffen auf dem Schirm ist somit

$$|e\rangle = |\psi_+\rangle|\uparrow\rangle + |\psi_-\rangle|\downarrow\rangle \simeq \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{x}) \\ \psi_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^3} (|\psi_+(\mathbf{x})|^2 + |\psi_-(\mathbf{x})|^2) d^3x = 1, \quad (7.20)$$

wobei  $\psi_+(\mathbf{x})$  seinen Träger entlang der Ablenkungsrichtung nach oben und  $\psi_-(\mathbf{x})$  seinen Träger entlang der Ablenkungsrichtung nach unten hat. Formal handelt es sich hierbei um ein Tensorprodukt aus einem Funktionenraum (beispielsweise dem Hilbert-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ ) und dem  $\mathbb{C}^2$ . Man gelangt so zu zweikomponentigen Spinoren.

Ein ähnlicher Fall tritt auf, wenn ein Lichtstrahl auf einen Doppelspalt trifft, der „markiert“ ist, z.B. indem hinter dem linken Spalt ein Polarisationsfilter in  $h$ -Richtung (horizontal) und hinter dem rechten Spalt ein Polarisationsfilter in  $v$ -Richtung (vertikal) platziert ist, sodass der Lichtstrahl hinter dem Doppelspalt eine Superposition aus einem horizontal polarisierten Strahl, der durch den linken Spalt getreten ist, und einem vertikal polarisierten Strahl, der durch den rechten Spalt getreten ist, darstellt. Der Zustand ist somit:

$$|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle|h\rangle + |R\rangle|v\rangle), \quad (7.21)$$

Hierbei stehen  $|L\rangle$  und  $|R\rangle$  symbolisch für den räumlichen Zustand eines Photons, das durch den linken bzw. rechten Spaltgetreten ist, und  $|h\rangle$  bzw.  $|v\rangle$  für eine Polarisation in horizontaler bzw. vertikaler Richtung.

### 7.5.3 Verschiedene Koordinatenrichtungen

Eine Wellenfunktion  $\Psi(\mathbf{x})$  im  $\mathbb{R}^3$  ist ein Element des dreifachen Tensorprodukts von Wellenfunktionen über  $\mathbb{R}$ , also entlang der  $x$ -,  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung. Wenn eine solche Wellenfunktion nicht in ihre Anteile entlang verschiedener Koordinatenachsen faktorisiert, kann man hier theoretisch von einer Verschränkung zwischen den Anteilen zu verschiedenen Koordinatenrichtungen sprechen. Damit sind alle Wellenfunktionen im Wasserstoffatom, die Eigenfunktionen zu den Quantenzahlen  $n$ ,  $l$  und  $m$  sind, verschränkt. Dies zeigt eine gewisse Willkür in der Wahl der Partition eines Systemes. Offenbar kann man auch Partitionen vornehmen, die physikalisch im Allgemeinen nicht sinnvoll sind.

### 7.5.4 Der Messprozess

Eine besondere Form der Verschränkung, die ebenfalls immer noch Anlass zu Diskussionen gibt, ist der Messprozess. Gegeben sei ein Quantensystem  $S$ , an dem mit einem Messinstrument  $M$  eine Messung vorgenommen werden soll. Man kann dies als ein Gesamtsystem ( $Q + M$ ) auffassen, das in natürlicher Weise in zwei Teilsysteme  $Q$  und  $M$  partitioniert werden kann. Vor der Messung sei die Messapparatur in einem neutralen Zustand  $|\varphi_0\rangle$  und das Quantensystem  $S$  befinde sich in einem Superpositionszustand bezüglich der Eigenzustände der Messapparatur  $|s\rangle = \sum_i a_i |s_i\rangle$ .

Durch den Messprozess geht das Gesamtsystem in einen verschränkten Zustand über, bei dem die Zustände  $|s_i\rangle$  des Quantensystems korreliert sind mit den Zeigerstellungen  $|\varphi_i\rangle$  des Messinstruments:

$$|s\rangle|\varphi_0\rangle = \sum_i a_i |s_i\rangle|\varphi_0\rangle \xrightarrow{\text{Messprozess}} \sum_i a_i |s_i\rangle|\varphi_i\rangle. \quad (7.22)$$

Wir nutzen dann diesen verschränkten Zustand, um an dem Messapparat eine Messung vorzunehmen: Wir lesen die Zeigerstellung  $\varphi_i$  am Messapparat ab und schließen aus dem Ergebnis auf den Zustand  $|s_i\rangle$  des Quantensystems. Dieser erste Schritt des Messprozesses – die Verschränkung zwischen Quantensystem und Messapparatur – lässt sich mit einer Schrödinger-Gleichung beschreiben und ist meist recht gut verstanden. Der anschließende Schritt – die Reduktion der Superposition zu einem reinen Zustand, bei dem das Messinstrument eine wohldefinierte Zeigerstellung hat – lässt sich nicht durch eine Schrödinger-Gleichung beschreiben und bildet das eigentliche Problem des Messprozesses.

## 7.6 Die Teilreduktion von Zuständen

In der Quantentheorie lässt sich jeder Zustand durch eine Dichtematrix darstellen, wobei reine Zustände den Projektionsoperatoren entsprechen. Sämtliche Eigenschaften allgemeiner Dichtematrizen gelten natürlich auch in Tensorprodukträumen. Eine besondere Konstruktion ist jedoch, dass man „Teilreduktionen“ vornehmen kann. Man bildet dabei die Spur über nur einen der beiden Hilbert-Räume. Physikalisch kann man das so deuten, dass man alle Information über den ausreduzierten Teilraum (bzw. alle Korrelationen mit diesem Teilraum) „vergisst“ und sich nur auf die Informationen beschränkt, die man durch lokale Messungen an dem verbliebenen Teilsystem gewinnen kann.

Sei  $A$  eine Matrix in einem Produkt-Hilbert-Raum, dann lässt sich (in Bezug auf beliebige orthonormale Basen  $\{|e_i\rangle\}$  für  $\mathcal{H}_1$  und  $\{|f_j\rangle\}$  für  $\mathcal{H}_2$ ) die Matrix folgendermaßen schreiben:

$$A = \sum_{i,j,k,l} a_{ijkl} |e_i\rangle|f_j\rangle\langle f_k|\langle e_l| \quad (7.23)$$

Wir definieren nun die *Spur* (oder auch *Teilspur*) über den Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_1$  durch

$$A_2 = \text{Sp}_1 A = \sum_n \langle e_n | A | e_n \rangle \quad (7.24)$$

$$= \sum_{ijkl} a_{ijkl} \sum_n \langle e_n | e_i \rangle |f_j\rangle\langle f_k| \langle e_l | e_n \rangle \quad (7.25)$$

$$= \sum_{jk} \left( \sum_n a_{njk n} \right) |f_j\rangle\langle f_k|. \quad (7.26)$$

$A_2$  ist ein Operator auf  $\mathcal{H}_2$ , der auf  $\mathcal{H}_1$  wirkende Anteil von  $A$  wurde „ausgespurt“.

Ganz entsprechend kann die Spur über  $\mathcal{H}_2$  gebildet werden und man erhält einen Operator auf  $\mathcal{H}_1$ :

$$A_1 = \text{Sp}_2 A = \sum_m \langle f_m | A | f_m \rangle \quad (7.27)$$

$$= \sum_{ijkl} a_{ijkl} \sum_m \langle f_m | f_j \rangle |e_i\rangle\langle e_l| \langle f_k | f_m \rangle \quad (7.28)$$

$$= \sum_{il} \left( \sum_m a_{imml} \right) |e_i\rangle\langle e_l| \quad (7.29)$$

Diese Operationen des teilweisen Ausspurens kann man auch für Dichtematrizen vornehmen. Handelt es sich um die Dichtematrix zu einem separablen reinen Zustand, also um das Tensorprodukt

von zwei Projektionsoperatoren,

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| |\phi\rangle\langle\phi| = P_\psi \otimes P_\phi, \quad (7.30)$$

dann erhält man durch die Teilspuren wieder Projektionsoperatoren zu reinen Zuständen:

$$\rho_1 = \text{Sp}_2 \rho = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi \quad \text{und} \quad \rho_2 = \text{Sp}_1 \rho = |\phi\rangle\langle\phi| = P_\phi \quad (7.31)$$

Handelt es sich jedoch bei  $\rho$  um die Dichtematrix zu einem verschränkten Zustand (d.h.,  $\rho$  ist zwar ein Projektionsoperator in Gesamt-Hilbert-Raum, aber es gibt keine Projektionsoperatoren  $P_\phi$  und  $P_\psi$ , sodass  $\rho = P_\phi \otimes P_\psi$ ), dann beschreiben  $\rho_1$  und  $\rho_2$  gemischte Zustände. Auf diese Weise erhält man ein praktisches Kriterium zur Überprüfung, ob ein Zustand separabel oder verschränkt ist: Handelt es sich bei den Dichtematrizen der ausreduzierten Teilräume um Projektionsoperatoren, ist der Zustand separabel; sind es Dichtematrizen zu gemischten Zuständen, ist der Zustand verschränkt. Die *von Neumann-Entropie* der reduzierten Dichtematrizen

$$S = \sum_i p_{\alpha,i} \ln p_{\alpha,i} = \text{Sp} \rho_\alpha \ln \rho_\alpha \quad (\alpha = 1,2) \quad (7.32)$$

wird oft als ein Verschränkungsmaß angesehen (für reine Zustände ist die von Neumann-Entropie null). Man kann beweisen, dass die von null verschiedenen Eigenwerte  $\{p_{\alpha,i}\}$  der beiden reduzierten Dichtematrizen gleich sind, sodass auch die beiden von Neumann-Entropien gleich sind.

Physikalisch lässt sich die teilreduzierte Dichtematrix folgendermaßen verstehen: Durch lokale Messungen an einem Teilsystem (z.B. Teilsystem 1) kann man den verschränkten Zustand  $|\Psi\rangle$  nicht von einem gemischten Zustand zu der ausreduzierten Dichtematrix unterscheiden. Anders ausgedrückt: Für alle Observablen der Form  $A \otimes \mathbf{1}$  sind die Erwartungswerte in einem verschränkten Zustand dieselben wie für die Observable  $A$  bezüglich der reduzierten Dichtematrix  $\rho_1 = \text{Sp}_2 P_\Psi A$ , d.h., es gilt:

$$\langle\Psi|A \otimes \mathbf{1}|\Psi\rangle = \text{Sp}(\rho_1 A) \quad (7.33)$$

Man kann  $\rho_1$  sogar über diese Forderung definieren; das oben angegebene Verfahren ist aber konstruktiver. Eine entsprechende Beziehung gilt für die Dichtematrix, die man für das Teilsystem 2 durch Ausreduktion von Teilsystem 1 erhält.

Man kann auch Verschränkungsmaße für gemischte Zustände formulieren, allerdings handelt es sich hier um ein sehr komplexes Thema, das immer noch Teil der aktuellen Forschung ist. Ebenfalls ein schwieriges und noch nicht abgeschlossenes Forschungsgebiet ist die Untersuchung von Verschränkungsmaßen von (reinen und gemischten) Zuständen in Hilbert-Räumen, die das Tensorprodukt von mehr als zwei Zustandsräumen sind, d.h. bezüglich einer Partition des Gesamtsystems in mehr als zwei Teilsysteme. Ein guter Übersichtsartikel zu Verschränkungsmaßen ist [1].

## Anmerkungen

### Die Richtungsunabhängigkeit des $\Phi^+$ -Zustands (Herleitung)

Eine allgemeine unitäre Transformation in einem 2-dimensionalen reellen Vektorraum hat die Form einer Drehung

$$R = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a^2 + b^2 = 1. \quad (7.34)$$

(Typischerweise parametrisiert man eine solche Transformation durch  $a = \cos \alpha$  und  $b = \sin \alpha$ .) Auf eine beliebige Basis  $\{|\mathbf{e}_1\rangle, |\mathbf{e}_2\rangle\}$  wirkt diese Transformation in der Form:

$$|\mathbf{f}_1\rangle = a|\mathbf{e}_1\rangle + b|\mathbf{e}_2\rangle \quad , \quad |\mathbf{f}_2\rangle = -b|\mathbf{e}_1\rangle + a|\mathbf{e}_2\rangle. \quad (7.35)$$

Für den korrelierten verschränkten Zustand  $\Phi^+$  (ausgedrückt in der  $\mathbf{f}$ -Basis) folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{f}_1\rangle \otimes |\mathbf{f}_1\rangle + |\mathbf{f}_2\rangle \otimes |\mathbf{f}_2\rangle) = \quad (7.36)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((a|\mathbf{e}_1\rangle + b|\mathbf{e}_2\rangle) \otimes (a|\mathbf{e}_1\rangle + b|\mathbf{e}_2\rangle) + (-b|\mathbf{e}_1\rangle + a|\mathbf{e}_2\rangle) \otimes (-b|\mathbf{e}_1\rangle + a|\mathbf{e}_2\rangle)\right) \quad (7.37)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^2 + b^2)(|\mathbf{e}_1\rangle \otimes |\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle \otimes |\mathbf{e}_2\rangle) \quad (7.38)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathbf{e}_1\rangle \otimes |\mathbf{e}_1\rangle + |\mathbf{e}_2\rangle \otimes |\mathbf{e}_2\rangle) \quad (7.39)$$

## Die Richtungsabhängigkeit des gemischten Zustands (Herleitung 2)

Auf die beiden Zustände des Gemischs wirkt die Drehung in der Form

$$|\mathbf{f}_1\rangle \otimes |\mathbf{f}_1\rangle = (a|\mathbf{e}_1\rangle + b|\mathbf{e}_2\rangle) \otimes (a|\mathbf{e}_1\rangle + b|\mathbf{e}_2\rangle) \quad (7.40)$$

$$= (a^2|\mathbf{e}_1\rangle \otimes |\mathbf{e}_1\rangle + ab|\mathbf{e}_1\rangle \otimes |\mathbf{e}_2\rangle + ba|\mathbf{e}_2\rangle \otimes |\mathbf{e}_1\rangle + b^2|\mathbf{e}_2\rangle \otimes |\mathbf{e}_2\rangle) \quad (7.41)$$

$$|\mathbf{f}_2\rangle \otimes |\mathbf{f}_2\rangle = (-b|\mathbf{e}_1\rangle + a|\mathbf{e}_2\rangle) \otimes (-b|\mathbf{e}_1\rangle + a|\mathbf{e}_2\rangle) \quad (7.42)$$

$$= (b^2|\mathbf{e}_1\rangle \otimes |\mathbf{e}_1\rangle - ba|\mathbf{e}_1\rangle \otimes |\mathbf{e}_2\rangle - ab|\mathbf{e}_2\rangle \otimes |\mathbf{e}_1\rangle + a^2|\mathbf{e}_2\rangle \otimes |\mathbf{e}_2\rangle) \quad (7.43)$$

Man erkennt, dass in beiden Fällen auch antikorrelierte Ergebnisse möglich sind.

# Literaturverzeichnis

- [1] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., Horodecki, K.; *Quantum entanglement*; Rev. Mod. Phys. **81** (2009) 865–942.