

Kapitel 7

Die Bra-Ket-Notation

Die Bra-Ket-Notation von Dirac [1] hat sich mittlerweile in der Quantentheorie als außerordentlich hilfreich etabliert. Ihre Nützlichkeit erweist sich besonders dann, wenn Zustände oder Operatoren basisunabhängig oder aber in wechselnden Basissystemen ausgedrückt werden sollen. Gerade in vielen modernen Zweigen der Quantentheorie, beispielsweise in der Quanteninformatik, sind solche Basiswechsel wichtig.

Physikalisch repräsentiert ein Ket-Vektor $|\psi\rangle$ einen Zustand (wobei der Buchstabe ψ zunächst rein symbolisch den Zustand beschreibt oder charakterisiert), mathematisch repräsentiert $|\psi\rangle$ einen normierten Vektor in einem Hilbert-Raum (d.h. einem komplexen Vektorraum mit einem Skalarprodukt). Der zugehörige Bra-Vektor $\langle\psi|$ ist ein Element des Dualraums, das wegen des Skalarprodukts einem Element des Vektorraums zugeordnet werden kann: Sei $|\psi\rangle$ ein Vektor im Hilbert-Raum und $g(\cdot, \cdot)$ das Skalarprodukt auf diesem Hilbert-Raum (wobei \cdot jeweils durch einen Vektor zu ersetzen ist), dann ist $\langle\psi| = g(|\psi\rangle, \cdot)$ der zugehörige Vektor im Dualraum.

Diese rein mathematischen Beziehungen sind vielen Lehrkräften nicht sehr vertraut, zum einen, weil sie in der Schule keine Verwendung finden und daher nie benötigt werden, zum anderen aber auch, weil sie in Physikvorlesungen, besonders in früheren Zeiten, nicht sehr präzise verwendet oder eingeführt wurden. Konzepte wie der Dualraum eines Vektorraums sind ohnehin vielen Studierenden der Physik eher „suspekt“.

Die Bra-Ket-Notation kann aber auch symbolisch für verschiedene physikalische Operationen verstanden werden – unabhängig von ihrer mathematischen Bedeutung in der linearen Algebra. Dabei sind meist nur sehr wenige und einfache Regeln zu beachten, denen man außerdem eine anschauliche Deutung geben kann. Um diese symbolische Bedeutung soll es in diesem Kurztexzt gehen.

Zur Notation: Wenn man von einem „Zustand“ spricht, ist oftmals nicht klar, was gemeint ist. Insbesondere sollte man zwischen der mathematischen Repräsentation und der physikalischen Realisierung unterscheiden. Bei der physikalischen Realisierung ist wiederum zwischen der Realisierung durch ein einzelnes System und der Realisierung durch ein Ensemble von Systemen zu unterscheiden (siehe auch den Kurztexzt Axiomatischer Zugang zur Physik). Da im Folgenden viel von Wahrscheinlichkeiten die Rede ist, repräsentiert $|\psi\rangle$ (sofern nicht explizit anders erwähnt) in diesem Kurztexzt immer ein Einzelsystem, das in dem Zustand ψ präpariert wurde.

Ähnliches gilt für den Begriff der Observablen. Hier unterscheidet man zwischen der physikalischen Realisierung einer Observablen in Form eines Messprotokolls, ausgedrückt durch das Symbol \mathcal{A} , und der mathematischen Repräsentation der Observablen durch einen selbst-adjungierten Operator, A . Für den physikalischen Zustand, der dem Zustand zu einem Eigenwert λ_n einer Observablen entspricht, schreibe ich oft ψ_n ; $|\lambda_n\rangle$ bezeichnet den zugehörigen normierten Vektor.

7.1 Ket- und Bra- als „Präparation“ und „Messung“

Rein symbolisch kann ein normierter Ket-Vektor $|\psi\rangle$ folgendermaßen interpretiert werden: Ein physikalisches System wird in dem Zustand ψ präpariert und befindet sich nun in diesem Zustand. Der Ket-Vektor $|\psi\rangle$ repräsentiert somit die Präparation eines Systems in einem bestimmten Zustand ψ .

Entsprechend repräsentiert ein normierter Bra-Vektor $\langle\phi|$ die Messung an einem System, die das System auf den Zustand ϕ testet. $\langle\phi|$ repräsentiert somit den Prozess, bei dem ein Detektor anzeigt, dass der Zustand ϕ registriert wurde. Man kann einen solchen Detektor dadurch realisieren, dass man zunächst einen Filter für den Zustand ϕ aufstellt, d.h., wenn dieser Filter das System durchgelassen hat, befindet es sich anschließend im Zustand $|\phi\rangle$. Dahinter steht ein Detektor, dessen „Klick“ anzeigt, dass das System den Filter passiert hat.

Wenn man einen Ket-Vektor $|\psi\rangle$ im \mathbb{C}^n bezüglich einer Orthonormalbasis durch einen Spaltenvektor mit Komponenten x_1, \dots, x_n darstellt, dann entspricht dem Bra-Vektor der Zeilenvektor mit den jeweils komplex konjugierten Komponenten:

$$|\psi\rangle \simeq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \langle\psi| \simeq (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*). \quad (7.1)$$

Aus der linearen Algebra ist vermutlich die Notation \mathbf{x} für den Spaltenvektor und $\bar{\mathbf{x}}^T$ für den komplex konjugierten Zeilenvektor vertrauter. Mathematisch haben Ket- und Bra-Vektoren die gleiche Bedeutung.

Die Hintereinanderausführung dieser beiden Operationen – Präparation und Messung – liefert eine komplexe Zahl, die man als Wahrscheinlichkeitsamplitude zu diesem Prozess – System wurde im Zustand ψ präpariert und anschließend im Zustand ϕ gemessen – interpretiert. Das Absolutquadrat dieser Wahrscheinlichkeitsamplitude ist die Wahrscheinlichkeit $w(\psi \rightarrow \phi)$, dass dieser Prozess auftritt. Dies ist die Born'sche Regel:

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\phi\rangle \simeq \langle\phi|\psi\rangle \quad w(\psi \rightarrow \phi) = |\langle\phi|\psi\rangle|^2. \quad (7.2)$$

Wichtig ist, dass man das Skalarprodukt $\langle\phi|\psi\rangle$ als eine Amplitude auffasst, die dem Prozess $\psi \rightarrow \phi$ zugeordnet werden kann. Die mathematische Schreibweise hat für diese symbolische Interpretation den Nachteil, dass mathematische Ausdrücke von rechts nach links zu lesen sind. Die „Zeit“-Achse, in der die Bra-Ket-Ausdrücke als Prozesse interpretiert werden können, verläuft also waagrecht von rechts nach links.

Aus dieser Interpretation ergeben sich die wichtigsten Regeln für den Umgang mit der Bra-Ket-Notation. Gewöhnlich leitet man diese Regeln aus den Eigenschaften des Skalarprodukts ab. Wenn ein System im Zustand $|\psi\rangle$ präpariert wurde und die Wahrscheinlichkeit, an diesem System den Zustand $|\phi\rangle$ zu messen, verschwindet, ist $\langle\phi|\psi\rangle = 0$. Man bezeichnet diese beiden Zustände dann als orthogonal. Diese Bezeichnung darf man beispielsweise bei linearen Polarisationszuständen durchaus wörtlich nehmen: Eine horizontale Polarisation ist orthogonal zu einer vertikalen Polarisation und es gilt $\langle v|h\rangle = 0$, wobei $|h\rangle$ und $|v\rangle$ jeweils eine horizontale bzw. vertikale Polarisation eines Photons bezeichnen. Das Gleiche gilt für die Polarisierungen $+45^\circ$ und -45° , d.h., $\langle -|+\rangle = 0$. Sind andererseits die beiden Zustände $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ identisch, sodass die Wahrscheinlichkeit, an einem im Zustand $|\psi\rangle$ präparierten System den Zustand $|\phi\rangle$ zu messen, gleich eins ist, gilt $\langle\phi|\psi\rangle = 1$ ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$ ist die Normierungsbedingung für Vektoren $|\psi\rangle$, die Zustände repräsentieren). Allgemein gilt das verallgemeinerte Gesetz von Malus: $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = \cos^2 \alpha$, wobei α in reellen Vektorräumen der Winkel zwischen den beiden Strahlen zu $|\phi\rangle$ und $|\psi\rangle$ ist.

Als Beispiel betrachten wir die Wellenfunktion $\psi(x)$, die in der Bra-Ket-Notation folgende Darstellung hat:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle. \quad (7.3)$$

Im Sinne unserer symbolischen Interpretation hat die Wellenfunktion also folgende Bedeutung: Ein System wird im Zustand ψ präpariert und anschließend wird getestet, ob eine Messung das System am Ort x registriert. Das Absolutquadrat dieser Größe, $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\psi(x)|^2$, ist die Wahrscheinlichkeit(-sdichte), bei einer Ortsmessung das System am Ort x vorzufinden.

Eine ganz ähnliche Interpretation hat die Fourier-Transformierte der Ortswellenfunktion, die Funktion

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle. \quad (7.4)$$

(Dass es sich hierbei um die Fourier-Transformierte von $\psi(x)$ handelt, wird in Abschnitt 7.2.6 gezeigt.) Sie beschreibt die Amplitude für den Prozess, bei dem ein System im Zustand ψ präpariert wurde und anschließend bei einer Impulsmessung der Impuls p gefunden wird. Das Absolutquadrat $|\langle p|\psi\rangle|^2 = |\tilde{\psi}(p)|^2$ ist wieder die Wahrscheinlichkeit(-sdichte), an einem System, das im Zustand ψ präpariert wurde, bei einer Impulsmessung den Impuls p vorzufinden.

Hier wird auch ein kleiner Vorteil der Bra-Ket-Notation deutlich: Die beiden Funktionen $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ und $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$ beziehen sich auf denselben Zustand ψ , an dem lediglich eine andere Messung (Ort x bzw. Impuls p) vorgenommen wird. Die funktionale Abhängigkeit von x bzw. p ist natürlich eine andere, deshalb handelt es sich um verschiedene Funktionen, was durch die $\tilde{}$ ausgedrückt wird, doch dadurch entsteht auch leicht der Eindruck, als ob es sich um verschiedene Zustände handelte. Würde man jedoch einfach $\psi(x)$ und $\psi(p)$ schreiben, würde dasselbe Funktionssymbol für verschiedene mathematische Funktionen verwendet.

7.2 Projektionsoperatoren als „Filter“

Projektionsoperatoren sind lineare Abbildungen – in endlich dimensionalen Vektorräumen mit vorgegebener Basis also darstellbar als Matrizen –, die einen beliebigen Vektor auf einen linearen Unterraum projizieren. Eindimensionale Projektionsoperatoren kann man mit einem eindimensionalen Unterraum identifizieren, sie beschreiben somit einen reinen Zustand. Andererseits kann man (auch mehrdimensionale) Projektionsoperatoren als Filter interpretieren, die nur bestimmte Zustände durchlassen.

7.2.1 Die Projektion als lineare Abbildung

Hat eine Projektion eines Vektors auf einen linearen Unterraum einmal stattgefunden, ändert eine erneute Projektion nichts, da der projizierte Vektor schon in dem betreffenden Unterraum liegt. Die definierende Gleichung eines Projektionsoperators ist somit $P^2 = P$ (und damit gilt natürlich auch $P^n = P$ für $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, d.h., man kann eine Projektion beliebig oft anwenden, es zählt nur das erste Mal). Aus dieser Bedingung folgt, dass die Eigenwerte von P selbst nur 0 oder 1 sein können, da die Eigenwerte einer linearen Abbildung dieselbe Gleichung erfüllen müssen, wie diese Abbildung selbst.

Da auf Hilbert-Räumen immer ein Skalarprodukt definiert ist, können wir auch entscheiden, was eine orthogonale Projektion ist. In diesem Fall sind die Vektoren, die auf die Null (den Nullvektor) projiziert werden, orthogonal zu den Vektoren, die bereits in dem durch den Projektionsoperator ausgezeichneten Unterraum liegen und daher durch die Projektion nicht mehr verändert werden. Für diese Bedingung muss P selbst-adjungiert sein, es muss also $P^\dagger = P$ gelten (P^\dagger bedeutet bezüglich einer Orthonormalbasis die komplex konjugierte transponierte Matrix: $(P^\dagger)_{ij} = (P_{ji})^*$). Diese beiden

Bedingungen $P^\dagger = P$ und $P^2 = P$ – werden im Folgenden für Projektionsoperatoren immer vorausgesetzt. Die Spur eines Projektionsoperators ist gleich der Anzahl der Eigenwerte, die den Wert 1 haben und somit gleich der Anzahl der Dimensionen des Unterraums, auf den der Projektionsoperator projiziert.

Wenn es nicht explizit erwähnt wird, betrachten wir in diesem Kurztext eindimensionale Projektionsoperatoren, also Projektionsoperatoren, die auf eindimensionale Unterräume (Strahlen) projizieren. Projektionsoperatoren auf höher-dimensionale Unterräume lassen sich immer als Summe von paarweise orthogonalen eindimensionalen Projektionsoperatoren darstellen.

7.2.2 Projektionsoperatoren als Darstellung von Zuständen

In der Quantentheorie sind die Projektionsoperatoren auf einen eindimensionalen Unterraum von besonderer Bedeutung. Sie charakterisieren diesen eindimensionalen Unterraum und somit einen quantenmechanischen Zustand. Im Gegensatz zur Repräsentation eines reinen Zustands durch einen normierten Vektor haben sie sogar den Vorteil, dass die Freiheit in der Wahl der Phase nicht auftritt. Allerdings lässt sich mit Projektionsoperatoren das vertraute Superpositionsprinzip nicht mehr so einfach ausdrücken wie durch Vektoren, d.h., die Summe bzw. allgemeiner die Linearkombination von zwei Projektionsoperatoren ist im Allgemeinen kein Projektionsoperator mehr und somit kein Repräsentant für einen reinen Zustand.

Wenn ein normierter Ket-Vektor $|\psi\rangle$ bezüglich einer Orthonormalbasis im \mathbb{C}^n durch einen Spaltenvektor und der zugehörige Bra-Vektor durch den entsprechenden (komplex konjugierten) Zeilenvektor dargestellt werden (vgl. Gl. 7.1), dann hat der eindimensionale Projektionsoperator auf den von $|\psi\rangle$ aufgespannten linearen Unterraum die Form:

$$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \simeq \begin{pmatrix} x_1x_1^* & x_1x_2^* & \cdots & x_1x_n^* \\ x_2x_1^* & x_2x_2^* & \cdots & x_2x_n^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1^* & x_nx_2^* & \cdots & x_nx_n^* \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

In der linearen Algebra verwendet man meist die Darstellung $P_\psi = \mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}}^T$, wobei $\bar{\mathbf{x}}^T$ wieder den komplex konjugierten Zeilenvektor bezeichnet und \cdot das Matrixprodukt („Summe von Komponenten in einer Zeile mal Komponenten in einer Spalte“).

Die definierende Eigenschaft des Projektionsoperators, $P^2 = P$, ist (zumindest für eindimensionale Projektionsoperatoren) in der Bra-Ket-Schreibweise offensichtlich:

$$P_\psi^2 = |\psi\rangle\langle\psi| |\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi, \quad (7.6)$$

wohingegen ihr Beweis in der Komponentenschreibweise aufwendiger ist. Angewandt auf einen beliebigen Zustand $|\phi\rangle$ folgt:

$$P_\psi|\phi\rangle = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle. \quad (7.7)$$

Auch hier ist offensichtlich das Ergebnis ein Vektor, der in Richtung von $|\psi\rangle$ zeigt, also in dem von $|\psi\rangle$ aufgespannten eindimensionalen linearen Unterraum liegt.

7.2.3 Projektionsoperatoren als Repräsentanten von Filtern

Das physikalische System, das durch einen Projektionsoperator repräsentiert wird, ist ein Filter. Ein (idealer) Filter hat die Eigenschaft, physikalischen Systeme in bestimmten Zuständen ungehindert durchzulassen und Systeme in anderen, orthogonalen Zuständen vollständig zu absorbieren. Das

einfachste Beispiel für einen Filter ist ein Polarisationsfilter für Licht, der Licht einer bestimmten Polarisation ungehindert durchlässt und Licht der orthogonalen Polarisation vollständig absorbiert.

Die definierende Eigenschaft für Projektionsoperatoren, $P^2 = P$, hat für Filter die Interpretation, dass ein zweiter Filter hinter einem ersten Filter, wobei beide dieselben Polarisationsrichtung haben sollen, keine Wirkung hat: Alles Strahlung, die den ersten Filter passiert hat, passiert (im Idealfall – reale Filter haben immer einen kleinen Absorptionskoeffizienten) auch den zweiten Filter.

Für zwei eindimensionale Projektionsoperatoren zu orthogonalen Zuständen $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ (also $\langle\psi|\phi\rangle = 0$) gilt:

$$P_\psi P_\phi = |\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle\langle\phi| = 0. \quad (7.8)$$

Die anschauliche Bedeutung dieser Gleichung ist, dass zwei zueinander orthogonale Filter nichts durchlassen. In diesem Fall spielt auch die Reihenfolge der Filter keine Rolle, was für die zugehörigen Projektionsoperatoren bedeutet, dass diese kommutieren.

7.2.4 Die Summe von Projektionsoperatoren

In endlich dimensionalen Vektorräumen lässt sich auch jeder Projektionsoperator auf einen mehrdimensionalen Unterraum durch eine Summe orthogonaler Projektionsoperatoren auf eindimensionale Unterräume darstellen. Sind $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ orthogonal, gilt also $\langle\psi|\phi\rangle = 0$, dann handelt es sich bei

$$P_2 = P_\psi + P_\phi = |\psi\rangle\langle\psi| + |\phi\rangle\langle\phi| \quad (7.9)$$

wieder um einen Projektionsoperator, da

$$P_2^2 = P_\psi^2 + P_\psi P_\phi + P_\phi P_\psi + P_\phi^2 = P_\psi + P_\phi. \quad (7.10)$$

Die gemischten Produkte verschwinden, $P_\psi P_\phi = 0 = P_\phi P_\psi$, außerdem wurde die definierende Eigenschaft der Projektoren verwendet. Man kann sich leicht überlegen, dass diese Eigenschaft für eine beliebige Summe von paarweise orthogonalen Projektionsoperatoren gilt. Die Interpretation von P_2 ist die eines Filters, der sowohl die Zustände $|\psi\rangle$ als auch die Zustände $|\phi\rangle$ sowie jede Linearkombination dieser beiden Zustände ungehindert durchlässt und alle dazu orthogonalen Zustände absorbiert. Zur ersten Eigenschaft zeigt man

$$P_2(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = (|\psi\rangle\langle\psi| + |\phi\rangle\langle\phi|)(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) \quad (7.11)$$

$$= \alpha|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle + \beta|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle + \alpha|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \quad (7.12)$$

$$= \alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle \quad (7.13)$$

Die mittleren Terme verschwinden wegen der Orthogonalität der Zustände und bei den äußeren beiden Termen wurde ausgenutzt, dass die Vektoren normiert sein sollen. Das „+“-Zeichen zwischen zwei Projektionsoperatoren hat also hier die Bedeutung von „sowohl Eigenschaft 1 als auch Eigenschaft 2 sowie jede Linearkombination dieser beiden Eigenschaften wird durchgelassen“. Die Multiplikation von zueinander orthogonalen Projektionsoperatoren hat die Bedeutung der Hintereinanderschaltung der Filter und liest sich als „nur wenn beide Eigenschaften vorliegen, wird das System durchgelassen“.

Als Beispiel für die letzte Aussage betrachten wir zwei Projektionsoperatoren in einem 3-dimensionalen Vektorraum, von denen einer auf die von den orthogonalen Zuständen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ aufgespannten Ebene projiziert und der zweite auf die von $|2\rangle$ und $|3\rangle$ aufgespannten Ebene projiziert. Die drei Vektoren $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ seien paarweise orthogonal, ansonsten aber beliebig. Dann gilt:

$$P_{23}P_{12} = (|2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|)(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) \quad (7.14)$$

$$= |2\rangle\langle 2|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|2\rangle\langle 2| + |3\rangle\langle 3|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|2\rangle\langle 2| = |2\rangle\langle 2| \quad (7.15)$$

Alle anderen Terme verschwinden wegen der Orthogonalität. Nur die „Eigenschaft“ 2, die beiden Projektionsoperatoren gemeinsam ist, bleibt bestehen.

7.2.5 Der Doppelspalt

Das Doppelspaltexperiment lässt sich mit den bisher beschriebenen Mitteln schon recht gut beschreiben. Wir stellen uns eine Quelle vor, die Teilchen (oder Licht bzw. Photonen) mit einem Impuls p (bzw. einer Wellenlänge λ) in z -Richtung erzeugt (vgl. Abbildung 7.1) und auf einen Schirm mit einem Doppelspalt lenkt. Die beiden Spalte befinden sich bei den Punkten 1 und 2. Diese beiden Spalte wirken wie zwei Filter, welche die Teilchen bezüglich der x -Richtung auf die Punkte 1 bzw. 2 projizieren (d.h., nur Teilchen an diesen Punkten werden von den Spalten durchgelassen). Hinter den beiden Spalten breiten sich, ausgehend von Punkt 1 bzw. Punkt 2, Kugelwellen (bzw. Zylinderwellen) aus. Diese treffen schließlich auf eine Detektorplatte. An der Stelle x auf dieser Detektorplatte befindet sich ein Detektor, der registriert, wenn ein Teilchen bei x auf die Platte auftrifft.

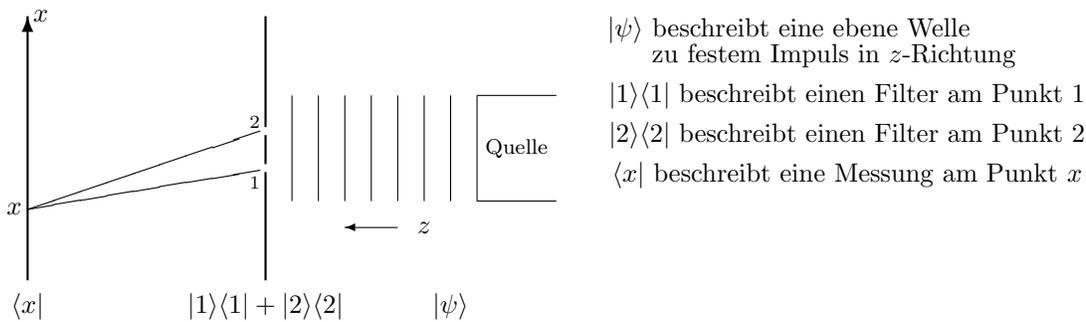


Abbildung 7.1: Das Doppelspaltexperiment. Qualitativ lassen sich die wesentlichen Elemente in der Bra-Ket-Notation einfach darstellen. $|\psi\rangle$ beschreibt die Präparation eines Strahls von Teilchen (oder Licht) zu festem Impuls bzw. fester Wellenlänge. Der Doppelspalt entspricht zwei Filtern, die Teilchen an den beiden Orten der Spalte, 1 und 2, durchlassen. Anschließend breiten sich von diesen beiden Orten Kugelwellen aus. Die beiden Anteile treffen auf einen Detektorschirm. Am Ort x werden Teilchen registriert.

Eine rein qualitative Beschreibung berücksichtigt nur den präparierten Zustand einer ebenen Welle, die auf den Schirm mit zwei Spalten zuläuft, die beiden Spalte, die jeweils einen räumlichen Filter darstellen – sie lassen nur Teilchen am Ort 1 bzw. 2 durch – und die abschließende Messung des Orts der Teilchen auf dem Detektorschirm. Eine quantitative Beschreibung muss noch die Ausbreitung der Wellen berücksichtigen, insbesondere die Ausbreitung der Kugelwellen von den Orten 1 bzw. 2 bis zum Detektorschirm.

Insgesamt ergibt sich für diesen Prozess der folgende Ausdruck:

$$|\psi\rangle \longrightarrow (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) |\psi\rangle \longrightarrow \langle x| (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) |\psi\rangle = \langle x|1\rangle\langle 1|\psi\rangle + \langle x|2\rangle\langle 2|\psi\rangle \quad (7.16)$$

Dies entspricht dem Prozess

$$\text{präparierte Welle} \longrightarrow \text{trifft auf die beiden Filter} \longrightarrow \text{wird am Ort } x \text{ gemessen.} \quad (7.17)$$

Da es sich bei $|\psi\rangle$ um den Zustand zu einer ebenen Welle handelt, sind die Amplituden $\langle 1|\psi\rangle$ und $\langle 2|\psi\rangle$ für den Prozess „ebene Welle propagiert zu den Spalten 1 bzw. 2“ gleich. Normiert auf die Teilchenanzahl, die einen der beiden Spalte passieren, erhalten wir jeweils die halbe Wahrscheinlichkeit oder $\langle 1|\psi\rangle = \langle 2|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}$. Für die Prozesse $\langle x|1\rangle$ bzw. $\langle x|2\rangle$ müssten wir eigentlich Kugelwellen von Spalt 1 zum Ort x bzw. vom Spalt 2 zum Ort x ansetzen. Ist der Abstand zwischen den beiden Spalten klein und der Abstand zur Detektorebene im Vergleich dazu sehr groß, spielt nur der relative

Gangunterschied δ der Wellen eine Rolle, d.h., $\langle x|2\rangle = e^{i\delta}\langle x|1\rangle$. Wir erhalten so für die Amplitude der Gesamtwelle am Ort x :

$$\Psi_{\text{ges}}(x) = \frac{N}{\sqrt{2}} \left(1 + e^{i\delta(x)} \right), \quad (7.18)$$

wobei N eine geeignete Normierungskonstante ist. Für das Absolutquadrat, d.h. die Wahrscheinlichkeit(sdichte), am Ort x ein Teilchen nachzuweisen, erhalten wir:

$$w(x) = \frac{N^2}{2} \left(2 + e^{i\delta(x)} + e^{-i\delta(x)} \right) = N^2 (1 + \cos \delta(x)). \quad (7.19)$$

Dies entspricht dem Interferenzmuster auf dem Schirm. Der Gangunterschied $\delta(x)$ lässt sich durch die Parameter des Aufbaus – Abstand d der beiden Spalte, Wellenlänge λ und der Winkel $\alpha(x)$ des Punkts x zur Normalenrichtung des Strahls – ausdrücken:

$$\delta(x) = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \alpha(x). \quad (7.20)$$

7.2.6 Die Vollständigkeitsrelation

Sei $\{|e_i\rangle\}_{i=1,\dots,n}$ eine Orthonormalbasis eines Hilbert-Raums und seien $P_i = |e_i\rangle\langle e_i|$ die zugehörigen Projektionsoperatoren, dann gilt

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle\langle e_i| = \mathbf{1}. \quad (7.21)$$

Dies folgt letztendlich aus der Tatsache, dass der gesamte Vektorraum von der Basis aufgespannt wird und ist eine direkte Verallgemeinerung dessen, was in Abschnitt 7.2.4 zur Summe von orthogonalen Projektionsoperatoren gesagt wurde.

Da die Eigenräume von selbst-adjungierten Operatoren orthogonal sind, erlauben diese die Definition einer vollständigen Orthonormalbasis. Sei A ein beliebiger selbst-adjungierter Operator und seien $\{\lambda_i\}$ die Eigenwerte und $|\lambda_i\rangle$ die zugehörigen normierten Eigenvektoren (der Einfachheit wird hier angenommen, dass die Eigenwerte nicht entartet sind, die Verallgemeinerung ist aber offensichtlich), dann gilt

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i\rangle\langle \lambda_i| = \mathbf{1}. \quad (7.22)$$

Diese Identität kann immer zwischen Bra- und Ket-Vektoren eingefügt werden. Beispielsweise gilt für einen beliebigen normierten Vektor $|\psi\rangle$:

$$\langle \psi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \psi|\lambda_i\rangle\langle \lambda_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n |\langle \lambda_i|\psi\rangle|^2 = 1. \quad (7.23)$$

Diese Relation bedeutet, dass für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ und eine beliebige Observable \mathcal{A} , repräsentiert durch den selbst-adjungierten Operator A , die Wahrscheinlichkeit, einen der möglichen Eigenwerte λ_i als Messwert zu finden und damit das System in den Zustand $|\lambda_i\rangle$ zu versetzen, gleich 1 ist.

Eine entsprechende Relation gilt auch für ein kontinuierliches Spektrum eines selbst-adjungierten Operators, beispielsweise das Spektrum des Ortsoperators:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x\rangle\langle x| dx = \mathbf{1}. \quad (7.24)$$

Damit folgt beispielsweise

$$\langle \psi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\langle x|\psi\rangle|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (7.25)$$

Dies ist die übliche Normierungsbedingung für Wellenfunktionen.

Ebenso folgt daraus, dass $\tilde{\psi}(p)$ die Fourier-Transformierte von $\psi(x)$ ist:

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle dx = \int_{-\infty}^{\infty} \langle p|x\rangle \psi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) dx, \quad (7.26)$$

wobei ausgenutzt wird, dass

$$\langle p|x\rangle = \langle x|p\rangle^* \quad \text{und} \quad \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}. \quad (7.27)$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude, dass ein mit dem Impuls $p = \hbar/2\pi\lambda$ präpariertes Teilchen am Ort x gemessen wird, ist (bis auf eine Normierung) durch eine reine Welle gegeben.

7.3 Unitäre Prozesse

Physikalische Prozesse, bei denen ein System bestehen bleibt (also beispielsweise nicht absorbiert werden kann), allerdings der Zustand des Systems verändert werden kann, werden durch unitäre Operatoren bzw. unitäre Matrizen beschrieben. Diese erhalten das Skalarprodukt, d.h.

$$\langle \psi|U^\dagger U|\phi\rangle = \langle \psi|\phi\rangle \quad (7.28)$$

und damit insbesondere auch die Norm. (Umgekehrt ist jede Isometrie, d.h. normerhaltende lineare Abbildung in endlich dimensionalen Hilbert-Räumen auch eine unitäre Abbildung.) Da diese Bedingung für beliebige Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ gelten soll, folgt $U^\dagger U = \mathbf{1}$ oder $U^\dagger = U^{-1}$.

Jede lineare Abbildung kann als Linearkombination von Ausdrücken der Form $|\psi\rangle\langle\phi|$ dargestellt werden. Ein solcher Ausdruck lässt sich folgendermaßen interpretieren: Bei dem Prozess wird festgestellt, dass sich das System im Zustand $|\phi\rangle$ befindet und es wird der Zustand $|\psi\rangle$ erzeugt bzw. präpariert.

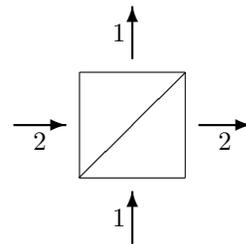
Im Folgenden betrachten wir ganz speziell den unitären Prozess, der durch einen Strahlteiler bei Photonen gegeben ist.

7.3.1 Der Strahlteiler

Ein Strahlteiler teilt einen Lichtstrahl in zwei gleiche Anteile auf. Es handelt sich dabei oft um einen Glaswürfel, der aus zwei Prismen zusammengesetzt ist, die an ihrer Grenzfläche, wo sie aufeinanderliegen, eine besondere Beschichtung haben. Wir betrachten im Folgenden polarisationsunabhängige Strahlteiler. Typischerweise besitzen diese Strahlteiler zwei Eingangsstrahlen sowie zwei Ausgangsstrahlen. Wir bezeichnen diese beiden Strahlrichtungen mit 1 bzw. 2 und nummerieren die Strahlen so, dass gegenüberliegende Seiten dieselbe Bezeichnung haben. Das bedeutet, die geradeaus durchgegangenen Strahlen haben jeweils dieselbe Nummer (siehe Abb. 7.2).

Abbildung 7.2: Der Strahlteiler teilt einfallende Strahlen in zwei ausfallende Strahlen auf. Die einfallenden Strahlen können dabei Strahl 1 oder 2 sein, die ausfallenden sind so nummeriert, dass geradeaus durchgehende Strahlen die gleiche Bezeichnung behalten. Die Wirkung eines solchen Strahlteilers kann durch folgende Bra-Ket-Darstellung beschrieben werden:

$$U_{\text{ST}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| \right).$$



Wir behandeln ein solches System für den Zustand eines Photons als Zwei-Zustandssystem: Das Photon befindet sich bei einer Messung entweder in Strahl 1 oder in Strahl 2. Die zugehörigen Ket-Vektoren sind $|1\rangle$ und $|2\rangle$. (Falls das System mehr als zwei Strahlengänge hat, müssen entsprechend mehr Zustände eingeführt werden; dieser Fall kann beispielsweise auftreten, wenn die ausfallenden Strahlen 1 und/oder 2 durch weitere Strahlteiler nochmals aufgespalten werden.)

Da alle Photonen, die in den Strahlteiler treten, diesen auch wieder verlassen sollen, muss ein solcher Strahlteiler durch eine unitäre Matrix dargestellt werden. Die allgemeinste 2×2 unitäre Matrix, welche die Intensität der beiden einfallenden Strahlen zu jeweils der Hälfte aufteilt, hat die Form¹

$$U_{\text{ST}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\delta} & e^{i\alpha} \\ -e^{-i\alpha} & e^{-i\delta} \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

Wir können den Strahlteiler immer so bauen, dass die beiden geradeaus durchgelassenen Strahlen in ihrer Phase unverändert bleiben ($\delta = 0$) und die beiden abgelenkten Strahlen jeweils die gleiche Phase erhalten ($\alpha = \pi/2$). Dies lässt uns nur die Matrix

$$U_{\text{ST}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

Das entspricht auch der oft verwendeten Regel, dass die Ablenkung eines Strahls um 90° eine Phasenverschiebung von 90° bewirkt (und damit der Multiplikation mit einem Faktor i).

Statt aber in der Matrix- und Vektorschreibweise zu arbeiten, stellen wir die unitäre Matrix durch ihre Elemente in der Bra-Ket-Schreibweise dar:

$$U_{\text{ST}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|). \quad (7.31)$$

Der Bra-Teil dieser Darstellung (der rechte Anteil) stellt jeweils fest, durch welche Seite das Photon in den Strahlteiler eintritt, er „misst den Eingangszustand“, und der Ket-Teil (linker Anteil) gibt an, durch welche Seite das Photon aus dem Strahlteiler austritt, d.h., in welchem Strahl das Photon präpariert wurde. Die „+“-Zeichen bedeuten wieder Alternativen.

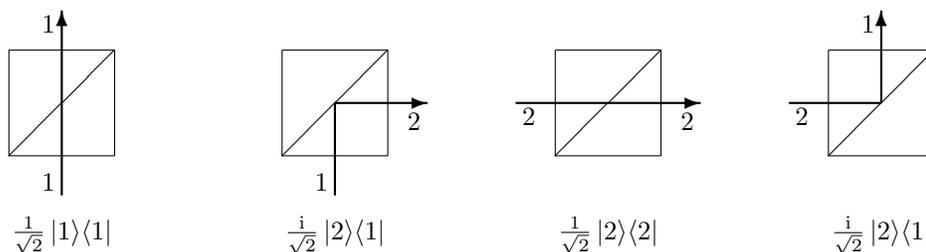


Abbildung 7.3: Jeder Weg eines Photons durch den Strahlteiler entspricht einem Ket-Bra-Term. Bei einer Reflexion an der diagonalen Trennlinie wird die Phase der Photonwelle um 90° verschoben, was einem Faktor i entspricht. Außerdem wurde eine Strahlaufteilung zu gleichen Intensitäten angenommen, was für die Amplitude jeweils einen Faktor $1/\sqrt{2}$ bedeutet.

Die vier Terme in Gl. 7.31 entsprechen den vier möglichen Wegen, die ein Photon durch den Strahlteiler nehmen kann (siehe Abb. 7.3): zwei Eingänge und zwei Ausgänge. Sie entsprechen damit ebenfalls den vier Termen in der unitären 2×2 -Matrix, die den Strahlteiler beschreibt.

¹Hierbei handelt es sich um eine speziell unitäre Matrix mit der Determinante 1. Eine gemeinsame Phase lässt sich immer durch eine gleiche Phasenverschiebung beider einfallenden oder ausfallenden Teilstrahlen kompensieren.

Tritt ein Photon nur durch den ersten Strahlengang in den Strahlteiler, befindet es sich also zunächst in dem Zustand $|1\rangle$, so befindet es sich nach dem Durchtritt durch den Strahlteiler im Zustand

$$|1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

was in der Bra-Ket-Notation folgendermaßen geschrieben wird:

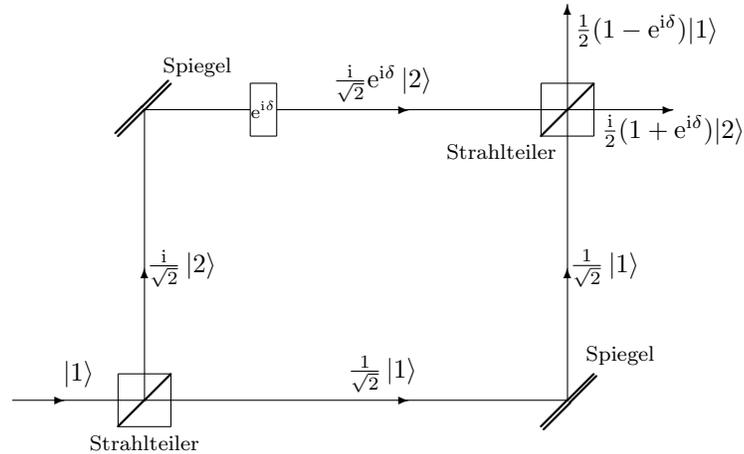
$$|1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle\langle 1| + i|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| \right) |1\rangle \quad (7.33)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle\langle 1| + i|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| \right) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle + i|2\rangle \right) \quad (7.34)$$

7.3.2 Das Mach-Zehnder-Interferometer

Mit dem beschriebenen Formalismus können wir nun das Mach-Zehnder-Interferometer behandeln. Es besteht aus zwei Strahlteilern: Der erste teilt einen Lichtstrahl in zwei Anteile, der zweite führt die beiden Strahlgänge wieder zusammen und bringt sie zur Interferenz (siehe Abb. 7.4). Es entspricht im Prinzip einem Doppelspalt, allerdings können die beiden „Spalte“ nun nahezu beliebig weit auseinander gebracht werden. Wichtig ist jedoch, dass die optischen Weglängen der beiden Strahlen innerhalb der Kohärenzlänge des Lichts gleich sind.

Abbildung 7.4: Das Mach-Zehnder-Interferometer als 2-Zustandssystem. Ein einzelnes Photon kann entweder im Strahl 1 oder im Strahl 2 nachgewiesen werden. Quantenmechanisch kann ein Superpositionszustand aus den beiden Zuständen vorliegen. In Strahl 2 befindet sich noch ein „Phasenschieber“, mit dem die optische Weglänge des Strahls 2 relativ zu Strahl 1 um δ verändert werden kann.



Wir beschreiben dieses System für Einzelphotonen als Zwei-Zustandssystem: Bei einer Messung kann sich das Photon entweder im Strahl 1 oder im Strahl 2 befinden. Dementsprechend bezeichnen wir den Zustand des Photons mit $|1\rangle$ bzw. $|2\rangle$. Diese beiden Zustände sind orthogonal, sodass $\langle 1|2\rangle = \langle 2|1\rangle = 0$. Wir können nun den Prozess, bei dem ein Photon das Mach-Zehnder-Interferometer durchquert, schrittweise beschreiben: Wir bezeichnen den Strahl, durch den das Photon in den ersten Strahlteiler dringt, als Strahl 1. Das Photon befindet sich somit im Zustand $|1\rangle$. Die Wirkung des ersten Strahlteilers ist:

$$|1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| \right) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle + i|2\rangle \right). \quad (7.35)$$

Ohne eine Messung erhalten wir einen Superpositionszustand, bei dem das Photon eine Komponente in Strahl 1 und eine Komponente in Strahl 2 hat. Die beiden Spiegel, an denen die Strahlen abgelenkt werden, tragen einen gemeinsamen Faktor i bei, den wir unberücksichtigt lassen, da er zum Ergebnis nicht beiträgt. Allerdings sollten wir eine relative Phasenverschiebung zwischen den beiden

Strahlgängen berücksichtigen. Dies geschieht durch den Operator $(|1\rangle\langle 1| + e^{i\delta}|2\rangle\langle 2|)$. Damit wird aus dem Zustand:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle) \longrightarrow (|1\rangle\langle 1| + e^{i\delta}|2\rangle\langle 2|) \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + ie^{i\delta}|2\rangle) \quad (7.36)$$

Die Superposition der beiden Zustände trifft nun auf den zweiten Strahlteiler:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + ie^{i\delta}|2\rangle) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|) \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + ie^{i\delta}|2\rangle) \quad (7.37)$$

$$= \frac{1}{2}(|1\rangle + ie^{i\delta}|2\rangle + i^2e^{i\delta}|1\rangle + i|2\rangle) \quad (7.38)$$

$$= \frac{1}{2}(|1\rangle + ie^{i\delta}|2\rangle - e^{i\delta}|1\rangle + i|2\rangle) \quad (7.39)$$

$$= \frac{1}{2}((1 - e^{i\delta})|1\rangle + i(1 + e^{i\delta})|2\rangle). \quad (7.40)$$

Je nach dem Wert von δ verschwindet der eine oder der andere Zustand: Für $\delta = 0 \pmod{2\pi}$ gibt es nur den Zustand $|2\rangle$, für $\delta = \pi \pmod{2\pi}$ gibt es nur den Zustand $|1\rangle$. Für die Prozesse $|1\rangle \rightarrow \boxed{\text{MZ}} \rightarrow |j\rangle$, wobei $\boxed{\text{MZ}}$ für das Mach-Zehnder-Interferometer steht, erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsamplituden:

$$\langle 1| \boxed{\text{MZ}} |1\rangle = \frac{1}{2}(1 - e^{i\delta}) \quad \langle 2| \boxed{\text{MZ}} |1\rangle = \frac{1}{2}i(1 + e^{i\delta}) \quad (7.41)$$

und wenn das Photon durch den Strahl 2 in das Mach-Zehnder-Interferometer tritt entsprechend:

$$\langle 2| \boxed{\text{MZ}} |2\rangle = \frac{1}{2}(1 - e^{i\delta}) \quad \langle 1| \boxed{\text{MZ}} |2\rangle = \frac{1}{2}i(1 + e^{i\delta}). \quad (7.42)$$

Für die Wahrscheinlichkeiten dieser Prozesse folgt:

$$w(1 \rightarrow 1) = w(2 \rightarrow 2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \delta) \quad w(1 \rightarrow 2) = w(2 \rightarrow 1) = \frac{1}{2}(1 + \cos \delta) \quad (7.43)$$

Für das „Knallerexperiment“ müssen wir den Operator $(|1\rangle\langle 1| + 0 \cdot |2\rangle\langle 2|)$ dazwischenschieben. Dies bedeutet, dass ein Photon, welches sich in Strahl 2 befindet, absorbiert wird (weil es auf die Bombe getroffen ist). Dies ist kein unitärer Operator mehr sondern ein Projektionsoperator auf den Zustand $|1\rangle$. Die Bombe hat also einen ähnlichen Effekt, wie ein Filter: Befindet sich das Photon in Zustand $|2\rangle$, wird es absorbiert. Als Ergebnis erhalten wir nun $\frac{1}{2}(|1\rangle + i|2\rangle)$. Mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $1/4$ landet das Photon also schließlich in Detektor 1 oder in Detektor 2. Mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ wurde es von der Bombe absorbiert.

7.4 Erwartungswerte

Letztendlich ist das Ziel in der Quantentheorie (und allgemeiner in der Physik) immer die Vorhersage für das Eintreffen bestimmter Ereignisse. In der Quantentheorie besteht diese Vorhersage meist in einer Wahrscheinlichkeitsaussage. Bisher haben wir die Bra-Ket-Notation verwendet, um Prozesse zu beschreiben und wir haben gesehen, wie man für einen Prozess eine Wahrscheinlichkeitsamplitude und damit schließlich eine Wahrscheinlichkeit berechnen kann.

In diesem Abschnitt betrachten wir Erwartungswerte von Observablen. Der Grund für diese Unterscheidung ist im Wesentlichen folgender: Die selbstadjungierten Operatoren A , die einer Observablen \mathcal{A} , definiert durch die Messvorschrift, entsprechen, beschreiben nicht den zeitlichen Ablauf der Messung und die Dynamik des Messvorgangs, sondern sie enthalten lediglich die Informationen, die bei einer Messung an einem System gewonnen werden können: die möglichen Messwerte $\{\lambda_n\}$ und die Zustände $\{|\lambda_n\rangle\}$, durch welche die Systeme nach einer Messung und der Feststellung

eines bestimmten Messresultats beschrieben werden. Sie beschreiben also nicht den Messprozess. Andere Operatoren, beispielsweise die unitären Operatoren, beschreiben Prozesse, bei denen sich die Zustände eines Systems verändern. Eine Zwischenrolle nehmen Projektionsoperatoren ein, die einerseits bestimmte absorbierende Prozesse beschreiben, bei denen das physikalische Systeme durch einen Filter tritt, andererseits aber auch als Observable aufgefasst werden können.

Eine Observable \mathcal{A} , definiert durch ein Messprotokoll, wird in der Quantentheorie durch einen selbstadjungierten Operator A dargestellt. Aus der Mathematik ist bekannt, dass ein selbstadjungierter Operator immer reelle Eigenwerte hat und dass die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. Außerdem sind die Eigenräume vollständig, d.h., sie spannen den gesamten Vektorraum auf. Auf die Besonderheiten bzw. Verallgemeinerungen dieser Aussagen für Operatoren mit einem kontinuierlichen Spektrum in unendlich dimensionalen Hilbert-Räumen soll hier nicht eingegangen werden.

Bekanntermaßen sind die Eigenwerte von Observablen die möglichen Messwerte und die zugehörigen Eigenräume die entsprechenden Zustände. Sofern ein Eigenwert entartet ist, d.h., der zugehörige Eigenraum hat mehr als eine Dimension, repräsentiert jeder eindimensionale Teilraum dieses Eigenraums einen Zustand zu diesem Eigenwert. In allen Fällen lässt sich eine Orthonormalbasis für den Vektorraum aus normierten Eigenvektoren eines selbst-adjungierten Operators bilden.

Die Eigenwertgleichung eines Operators A zu einem Eigenwert λ_n lautet:

$$A|\lambda_n\rangle = \lambda_n|\lambda_n\rangle, \quad (7.44)$$

wobei $|\lambda_n\rangle$ ein Eigenvektor (normiert auf den Betrag eins) von A zum Eigenwert λ_n ist. Die Tatsache, dass bei selbstadjungierten Operatoren die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind, bedeutet

$$\langle\lambda_m|\lambda_n\rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (7.45)$$

Die symbolische Interpretation dieser Bedingung ist, dass ein System, das in einem Zustand $|\lambda_n\rangle$ präpariert wurde, unmittelbar nach dieser Präparation mit Sicherheit nicht im Zustand $|\lambda_m\rangle$ gemessen wird, sofern $m \neq n$, und mit Sicherheit in diesem Zustand gemessen wird, sofern $m = n$.

Der Operator A lässt sich durch die Projektionsoperatoren zu seinen Eigenwerten darstellen:

$$A = \sum_n \lambda_n |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n| = \sum_n \lambda_n P_n. \quad (7.46)$$

Zum Beweis überzeuge man sich, dass dieser Operator die Eigenwertgleichungen erfüllt, und da die Eigenvektoren den Vektorraum aufspannen, ist damit die Gleichheit der linearen Operatoren gezeigt. Diese Darstellung bezeichnet man auch als die Spektralzerlegung eines selbst-adjungierten Operators.

Der Ausdruck $\langle\psi|A|\psi\rangle$ ist Erwartungswert von \mathcal{A} , d.h., wenn die Observable \mathcal{A} an sehr vielen Systemen, die alle im Zustand ψ präpariert wurden, gemessen wird, erhält man als Erwartungswert für die Messwerte diese Größe:

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n \langle\psi|\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|\psi\rangle = \sum_n \lambda_n w(\psi \rightarrow n) = \langle\mathcal{A}\rangle. \quad (7.47)$$

Die Summe über alle Messwerte, wobei jeder Messwert mit der Wahrscheinlichkeit seines Nachweises gewichtet wird, ist gleich dem Erwartungswert dieser Messwerte.

Wir können diese Überlegungen auch umkehren: Wenn ein Operator A die Eigenschaft haben soll, dass für jeden beliebigen Zustand ψ der Ausdruck $\langle\psi|A|\psi\rangle$ der Erwartungswert für die zugehörige Observable \mathcal{A} ist, dann muss A die Form in Gl. 7.46 haben.

Literaturverzeichnis

- [1] Dirac, P.A.M.; *A new notation for quantum mechanics*; Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **35** (1939) 416-418.

7.5 Anhang

7.5.1 Unitäre Matrizen

Eine allgemeine 2×2 unitäre Matrix mit der Determinante $e^{i\varphi}$ lässt sich folgendermaßen parametrisieren und zerlegen:

$$U = e^{i\varphi/2} \begin{pmatrix} e^{i(\alpha+\beta)} \cos \theta & e^{i(\alpha-\beta)} \sin \theta \\ -e^{-i(\alpha-\beta)} \sin \theta & e^{-i(\alpha+\beta)} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} \end{pmatrix}. \quad (7.49)$$

Für einen Strahlteiler, bei dem die Intensität eines einfallenden Strahls zur Hälfte auf die beiden ausfallenden Strahlen verteilt werden soll, ist $\cos \theta = \sin \theta = 1/\sqrt{2}$ bzw. $\theta = \pi/2$. Ansonsten kann man über den Winkel θ die relativen Intensitäten (diese sind $I_{\perp} = \sin^2 \theta$ für den abgelenkten Strahl und $I_{\parallel} = \cos^2 \theta$ für den geradeaus durchgelassenen Strahl) parametrisieren. Eine unitäre Matrix der Form

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

bedeutet lediglich eine Phase für jeden Teilstrahl (vor bzw. hinter dem Strahlteiler) und lässt sich physikalisch durch eine einfache Weglängenveränderung (oder durch dünne Glasplättchen) des entsprechenden Strahls erreichen. Wir können einen Strahlteiler somit durch die Matrix ($\varphi = \alpha = \beta = 0$)

$$U_{\text{ST } 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.51)$$

darstellen. Wählen wir jedoch in obiger Darstellung $\varphi = 0$, $\alpha = \pi/4$ und $\beta = -\pi/4$, so erhalten wir die Form

$$U_{\text{ST } 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

Letztendlich können wir also durch geeignete Phasenverschiebungen vor und hinter einem Strahlteiler und durch Variation der Intensitätsanteile (durchgelassen/abgelenkt) jede beliebige 2×2 unitäre Matrix durch einen Strahlteiler realisieren.