

# Das QuBit

Physikdidaktik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

31.03.2024

Professor Dr. Thomas Filk



Weitere Kurztexte hier: <https://physikdidaktik.uni-freiburg.de/kurztexte/>

universität freiburg



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das QuBit</b>	<b>3</b>
1.1	Quantenmechanische Grundbegriffe . . . . .	3
1.1.1	Observable . . . . .	3
1.1.2	Zustand . . . . .	4
1.1.3	Messung . . . . .	5
1.2	Zwei-Zustandssysteme . . . . .	5
1.2.1	Realisation durch die Polarisation von Licht . . . . .	6
1.2.2	Die Menge der Observablen . . . . .	8
1.2.3	Die Bloch-Kugel . . . . .	9
1.3	Verschränkung . . . . .	10
1.4	Bell-Zustände . . . . .	11

# Kapitel 1

## Das QuBit

*Autor: Thomas Filk, Version vom: 31.03.2024*

Das QuBit ist der elementare Baustein der Quanteninformation. Es ist das Quantensystem, das der klassischen Informationseinheit, dem Bit als die Menge bestehend aus zwei Möglichkeiten – {Ja, Nein}, {Wahr, Falsch}, {1,0} – entspricht. Man bezeichnet das QuBit als ein quantenmechanisches Zwei-Zustandssystem, obwohl, wie wir sehen werden, ein solches System wesentlich mehr als zwei mögliche Zustände einnehmen kann – es sind sogar unendliche viele Zustände möglich. Es zeigt sich jedoch, dass eine Messung an solchen Systemen – d.h. das Ablesen oder Auslesen eines solchen Systems – immer nur maximal ein klassisches Bit als Ergebnis, also eine von zwei möglichen Antworten, zulässt. Allerdings gibt es viele Möglichkeiten, wie dieses Ablesen realisiert werden kann bzw. welche Alternativen man in einer Messung auszeichnet.

Es gibt viele Realisierungen solcher Zwei-Zustandssysteme, beispielsweise die Polarisationsfreiheitsgrade eines Photons, die Spinfreiheitsgrade eines Elektrons oder mancher Atome, bestimmte atomare Zweizustandssysteme, manche Ionenfallen, etc. In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf die Polarisationsfreiheitsgrade von Photonen, da diese nicht nur sehr anschaulich sind, sondern auch häufig zu Demonstrationszwecken verwendet werden.

### 1.1 Quantenmechanische Grundbegriffe

Bevor wir konkret auf quantenmechanische Zwei-Zustandssysteme bzw. das QuBit eingehen, sollen einige Grundbegriffe der Quantentheorie, die im Folgenden eine wichtige Rolle spielen, nochmals diskutiert werden. Dabei ist aber zu bedenken, dass schon in Bezug auf diese Grundbegriffen die Meinungen hinsichtlich der Deutung oder Interpretation oftmals weit auseinandergehen.

#### 1.1.1 Observable

Eine Observable ist etwas, das man an einem System messen kann. Die physikalische Realisierung einer Observablen erfolgt durch die Angabe des Messprotokolls, wie eine Messung dieser Observablen an einem System durchzuführen ist. Das Ergebnis einer solchen Messung ist eine Zahl.

Die mathematische Darstellung (Repräsentation) einer Observablen hängt von der Theorie ab, die wir verwenden. In der klassischen Mechanik handelt es sich bei Observablen um Funktionen von Ort und Impuls (bzw. der Geschwindigkeit), in der Quantenmechanik werden Observable durch sogenannte selbst-adjungierte (oder hermitesche) Operatoren auf einem Hilbert-Raum – einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt – repräsentiert. Hier sollte man betonen, dass die mathematische

Darstellung einer Observablen nicht den Messprozess repräsentiert (also den dynamischen Vorgang der Messung), sondern eher die Informationen, die man durch solche Messungen erlangen kann: die Menge der möglichen Messwerte sowie die Zustände, die mit diesen Messwerten verbunden sind. In diesem Sinne und in Anlehnung an einen Ausdruck von Schrödinger [5] ist eine Observable ein „Katalog von möglichen Ergebnissen“.

### 1.1.2 Zustand

Auch bei dem Begriff des Zustands sollte man zwischen der physikalischen Realisierung und der mathematischen Darstellung unterscheiden. Die physikalische Realisierung eines Zustands besteht in einer im Prinzip beliebig großen Menge gleichartig präparierter Systeme. Mathematisch handelt es sich bei einem Zustand um eine Vorschrift, einer Observablen ihren Erwartungswert zuzuordnen.<sup>1</sup> Daher bezeichnet man einen Zustand auch als ein Erwartungswertfunktional. Ein Zustand ist somit eine mathematische Kodierung unseres Wissens über die Art, wie ein System präpariert wurde, sodass wir dieses Wissen für die Vorhersage zukünftiger Messungen an diesem System nutzen können. Ist unser Wissen unvollständig, verwenden wir sogenannte gemischte Zustände (in der klassischen Mechanik sind das Wahrscheinlichkeitsverteilungen über einem Zustandsraum, beispielsweise dem Phasenraum; in der Quantentheorie sind das sogenannte Dichtematrizen). Schrödinger bezeichnet einen Zustand, sowohl einen reinen Zustand als auch einen gemischten Zustand, als einen „Katalog von Erwartungen“ [5].

Bei der Interpretation eines Zustands gehen die Meinungen schon auseinander: Ist es sinnvoll, ein einzelnes System durch einen Zustand zu beschreiben oder bezieht sich ein Zustand immer nur auf ein Ensemble von gleichartig präparierten Systemen? Wir sagen auch gerne, dass sich ein System „in einem bestimmten Zustand befindet“; besser wäre die Sprechweise, dass „wir ein System durch einen bestimmten Zustand beschreiben“. Letztendlich können wir nur Aussagen über ein System treffen, die auf unserem Wissen über dieses System basieren. Was „wirklich“ ist, wissen wir nicht.

In der klassischen Mechanik beschreiben wir einen (reinen) Zustand durch einen Punkt im Phasenraum, also die Angabe eines Ortes und eines Impulses. Diese Angabe ordnet einer Observablen (also einer Funktion über dem Phasenraum) eine Zahl zu: ihren Wert an der Stelle dieses Phasenraumpunktes. Dies ist der Messwert, den wir bei einer Messung dieser Observablen in diesem Zustand erwarten.

In der Quantenmechanik beschreiben wir einen Zustand mathematisch durch einen Strahl (einen eindimensionalen Unterraum) in einem Hilbert-Raum. Meist wählen wir zur einfacheren Beschreibung einen auf eins normierten Vektor  $|\psi\rangle$  auf diesem Strahl als Repräsentanten, wir können einen Zustand aber auch durch die Angabe eines eindimensionalen Projektionsoperators  $P_\psi$  (der jeden Vektor in dem Hilbert-Raum auf diesen eindimensionalen Unterraum projiziert) darstellen. In der Quantenmechanik von Punktteilen verwenden wir zur Beschreibung eines Zustands oft eine sogenannte Wellenfunktion  $\psi$ , die man aber als Vektor in einem unendlich dimensional Hilbert-Raum (dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen) auffassen kann. Das Absolutquadrat dieser Wellenfunktion,  $|\psi(x)|^2$ , an einer bestimmten Stelle  $x$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, bei einer Messung das Teilchen bei  $x$  zu finden.

Das Erwartungswertfunktional, d.h. die Vorschrift, nach der wir einer Observablen  $A$  eine Zahl  $\langle A \rangle_\psi$  – ihren Erwartungswert in dem Zustand  $\psi$  – zuordnen, ist dann

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Spur} (P_\psi A) = \int_V \psi(x)^* A \psi(x) dx. \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Diese Definition eines Zustands mag zunächst überraschen. In der Quantentheorie denkt man eher an Wellenfunktionen oder Vektoren in einem Hilbert-Raum. Wir definieren weiter unten die Vorschrift, wie eine Wellenfunktion oder ein Vektor einer Observablen ihren Erwartungswert zuordnen.

Dies sind drei Darstellungen des Erwartungswertfunktionals, je nachdem, ob man einen Zustand durch einen normierten Vektor, einen Projektionsoperator oder eine normierte Wellenfunktion über einem Volumen  $V$  repräsentiert.

### 1.1.3 Messung

Der Begriff der Messung ist in der Quantentheorie sehr umstritten und nicht wenige Physikerinnen und Physiker, die sich mit den Grundlagen der Quantentheorie beschäftigen, plädieren dafür, diesen Begriff in der Quantentheorie nach Möglichkeit zu vermeiden (ein prominentes Beispiel ist [2]). In unserer von der klassischen Physik geprägten Vorstellung wird „Messung“ oft mit „Beobachtung“ gleichgesetzt, d.h., einem Informationsgewinn über ein System, ohne dass dieses System in irgendeiner Form dadurch beeinflusst oder gestört wird. Insbesondere impliziert der Begriff der Messung in der klassischen Physik meist eine Information über ein System unmittelbar *bevor* die Messung vorgenommen wurde. In der Quantentheorie sagt das Ergebnis eines Messprozesses jedoch oft sehr wenig über den Zustand vor der Messung aus, hingegen gibt es uns eine Information über den Zustand, durch den ein System unmittelbar *nach* der Messung beschrieben wird. Das „Kollapspostulat“ (korrekter spricht man auch von dem „von Neumann-Lüders-Projektionspostulat“) besagt, dass unmittelbar nach einer Messung ein Quantensystem durch einen Zustand zu beschreiben ist, der dem beobachteten Messwert entspricht.<sup>2</sup> In diesem Sinne beschreibt eine Messung also eher eine Präparation eines Systems.

Obwohl diese Tatsache in manchen Bereichen (z.B. bei der Messung von Polarisationszuständen von Licht) bekannt und vertraut ist, wird sie leicht vergessen, wenn man beispielsweise an die Orts- oder Impulsmessung von Elektronen oder Atomen denkt: Es besteht die Tendenz, den gemessenen Ort einem Teilchen schon vor der Messung zuzuschreiben, obwohl es vielleicht sogar bis zum Augenblick dieser Ortsmessung durch einen wohldefinierten Impuls, also eine über den gesamten Raum ausgedehnte Welle, beschrieben wurde. Schon der Begriff „Teilchen“ impliziert, dass man an einen wohldefinierten Ort denkt, was in der Quantentheorie nicht immer zulässig ist. Im didaktischen Bereich hat sich daher der Begriff des „Quantenobjekts“ durchgesetzt, womit noch kein Teilchen- oder Wellencharakter (oder was auch immer für eine spezifische Eigenschaft) festgelegt sein sollte.

## 1.2 Zwei-Zustandssysteme

In der Quantentheorie werden die möglichen Zustände von Zwei-Zustandssysteme durch die Strahlen in einem zweidimensionalen komplexen Vektorraum mit Skalarprodukt beschrieben. Ein Strahl ist dabei ein komplex eindimensionaler Untervektorraum. Etwas anders ausgedrückt: Zwei Vektoren, die sich nur um einen komplexen, multiplikativen Faktor unterscheiden, gehören zum selben Strahl. Wir können also einen Strahl durch einen Vektor auf diesem Strahl (meist wählt man einen auf eins normierten Vektor) repräsentieren.

In diesem Vektorraum zeichnen wir eine Basis aus:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Jeder Vektor in diesem Vektorraum lässt sich als komplexe Linearkombination dieser beiden Vektoren darstellen. Da wir als Repräsentanten für einen Strahl (eindimensionalen Unterraum) und damit einen

---

<sup>2</sup>Falls es mehrere unabhängige Zustände zu demselben Messergebnis gibt, wenn dieser Raum also mehrdimensional ist, ist derjenige Zustand zu wählen, den man durch eine orthogonale Projektion des Zustands vor der Messung auf diesen Raum erhält. Dies ist eine technische Feinheit, die im Folgenden nicht weiter relevant sein wird.

Zustand gewöhnlich nur normierte Vektoren zulassen, entsprechen Zustände den Vektoren

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a|0\rangle + b|1\rangle \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (1.3)$$

Zu bedenken ist allerdings, dass zwei solche Vektoren, die sich nur bezüglich einer Phase (komplexe Zahl vom Betrag 1) unterscheiden, denselben Zustand beschreiben.

### 1.2.1 Realisation durch die Polarisation von Licht

Um ein konkretes physikalisches Zwei-Zustandssystem vor Augen zu haben, betrachten wir im Folgenden die Polarisationszustände von Licht bzw. von Photonen. Dieses Beispiel eignet sich aus mehreren Gründen besonders: (1) Die Polarisation von Licht ist auch Schülerinnen und Schülern aus dem Alltag (polarisierte Sonnenbrillen) bzw. der Schule (Brewster-Winkel) bekannt; (2) dieses System wird in nahezu allen Schulversuchen zu Zwei-Zustandssystemen verwendet; (3) es ist immer noch eines der am häufigsten realisierten Zwei-Zustandssysteme in der Quantenoptik (z.B. für Grundlagenexperimente in der Quantenphysik, beispielsweise die berühmten Experimente von Aspect zum Nachweis der Verletzung von Bell'schen Ungleichungen [1]).

Trifft ein Lichtstrahl auf eine Grenzfläche wie Luft-Wasser oder Luft-Glas, wird ein Teil des Lichts reflektiert und ein Teil in das andere Medium gebeugt. Mithilfe eines einfachen Polarisationsfilters (oder einer polarisierenden Sonnenbrille) können wir feststellen, dass das reflektierte Licht eine Richtungsabhängigkeit in Bezug auf die Orientierung dieses Filters aufweist: Unter einer bestimmten Richtung (wir bezeichnen diese Richtung oft als die Polarisationsachse des Filters) sieht man hinter dem Polfilter die größte Helligkeit, unter einer dazu orthogonalen Richtung die geringste Helligkeit. Besteht zwischen dem reflektierten Strahl und dem in das Medium gebeugten Strahl ein Winkel von  $90^\circ$  (in diesem Fall bezeichnet man den Einfallswinkel auch als Brewster-Winkel) ist dieser Effekt am ausgeprägtesten: Nahezu das gesamte reflektierte Licht tritt durch den Polfilter hindurch, wenn die Polarisationsachse parallel zur reflektierenden Grenzfläche steht, und es tritt fast kein Licht hindurch, wenn die Polarisationsachse um  $90^\circ$  gedreht wird.

Wir erkennen hier eine Eigenschaft von Licht, die wir mithilfe eines Polfilters messen können. Wir können diese Eigenschaft mit sogenannten Polarisationsstrahlteilern auch zu nahezu einhundert Prozent präparieren: Ein Polarisationsstrahlteiler besteht im Wesentlichen aus zwei Grenzflächen, die als Diagonalebene in einem Glaswürfel aufeinanderliegen und gelegentlich noch besonders beschichtet sind. Ein Lichtstrahl, der durch eine Seitenfläche senkrecht in den Würfel eindringt, wird gewöhnlich in einen Anteil aufgeteilt, der aus der gegenüberliegenden Fläche in der Verlängerung wieder austritt, und einen Anteil, der an der Diagonalfäche um  $90^\circ$  abgelenkt wird und aus einer Seitenfläche wieder austritt (siehe Abb. 1.1).

In der Abbildung wurde der Polarisationswürfel so aufgestellt, dass der durchgelassene Strahl eine horizontale Polarisation besitzt, der (um  $90^\circ$ ) reflektierte Strahl eine vertikale Polarisation. Der Polarisationswürfel kann aber auch um die Achse des einfallenden Strahls gedreht werden, sodass eine Aufspaltung in zwei orthogonale Polarisationsrichtungen bezüglich jeder Orientierung des Würfels vorgenommen werden kann.

Eine „Messung“ mit einem solchen Polarisationswürfel kann dadurch erfolgen, dass hinter die beiden Austrittsrichtungen für den Lichtstrahl ein Detektor platziert wird, der das austretende Licht nachweist. Ohne die Detektoren kann man mit dieser Anordnung eine Polarisation präparieren: Man verwendet einfach den Strahl, der an der Seite zu der gewünschten Polarisation austritt, für die weiteren Versuche.

Nun ist bekannt, dass ein Lichtstrahl aus einer sehr großen Anzahl von Photonen bzw. Lichtquanten besteht. Ein Laserpointer strahlt pro Sekunde rund  $10^{18} - 10^{20}$  Photonen ab. Wenn man die

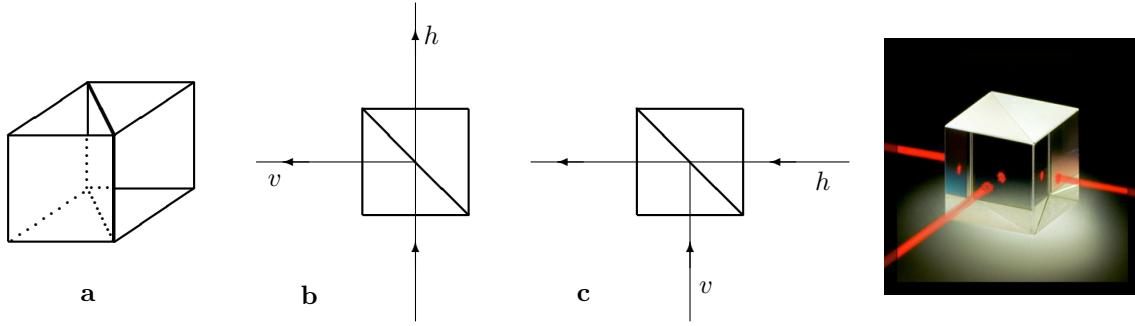


Abbildung 1.1: **a** Ein Polwürfel oder Polarisationsstrahlteiler besteht aus zwei zusammengesetzten Prismen mit einer besonders präparierten Grenzfläche. **b** Ein einfallender (unpolarisierter) Strahl wird in zwei (orthogonal) polarisierte Strahlen aufgespalten. Der reflektierte Strahl besitzt eine Polarisation parallel zur Grenzfläche ( $v$ ) – in der Abbildung senkrecht zur Bildebene –, der durchgelassene Strahl eine horizontale Polarisation ( $h$ ) in der Bildebene. **c** Umgekehrt kann man auch zwei geeignet polarisierte Strahlen zu einem gemeinsamen Strahl zusammenführen. Die Polarisation des ausfallenden Strahls hängt von der relativen Phase der beiden einfallenden Strahlen ab. Bei Phasengleichheit ist der ausfallende Strahl linear polarisiert, ansonsten elliptisch. Bei umgekehrter Wahl der Polarisationen für die einfallenden Strahlen verläuft der ausfallende Strahl in der Abbildung nach oben. (rechts) Abbildung eines Polarizationsstrahlteilers. (aus [4] und [?])

Intensität eines Laserstrahls immer weiter verringert, gelangt man schließlich zu einzelnen Photonen. In der Praxis lässt sich das schwer realisieren, da es aufgrund der bosonischen Eigenschaften von Photonen zu sogenannten Bunching-Effekten kommt: Photonen treten bevorzugt als Mehrfachpakete auf. Man erhält also keine Einzelphotonen mit nahezu konstanten Zeitabständen zwischen ihnen. Auf dieses eher technische Detail soll hier aber nicht weiter eingegangen werden. Es ist im Prinzip (mit hohem Kostenaufwand) möglich, gezielt Einzelphotonen herzustellen und für die optischen Experimente, die hier eine Rolle spielen, zu verwenden.

Für Einzelphotonen gelten im Wesentlichen dieselben Regeln, wie für einen Lichtstrahl. Lediglich die Gesetze bezüglich der Intensität von Lichtstrahlen werden durch Gesetze für relative Häufigkeiten - und im Fall von Einzelphotonen durch Wahrscheinlichkeiten - ersetzt. So besagt das Gesetz von Malus, dass die Intensität eines Lichtstrahls, der einen Polarisationsfilter unter einer Orientierung zum Winkel  $\alpha$  durchquert hat und durch einen zweiten Filter tritt, der unter dem Winkel  $\beta$  orientiert ist, um den Faktor  $\cos^2(\alpha - \beta)$  verringert wird. Für einen Strahl mit  $N$  Photonen hinter dem ersten Filter lautet dieses Gesetz: Für die Anzahl  $N_1$  der Photonen, die auch den zweiten Filter passieren, gilt ungefähr:  $N_1/N = \cos^2(\alpha - \beta)$ . Und für ein Einzelphoton lautet das Gesetz: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon, welches den ersten Filter passiert hat, auch den zweiten Filter passiert, ist  $\cos^2(\alpha - \beta)$ .

Zur Beschreibung der Polarisation von Einzelphotonen verwenden wir wieder normierte Vektoren in einem zweidimensionalen komplexen Vektorraum. Die horizontale und vertikale Polarisation beschreiben wir meist durch die Einheitsvektoren aus Gl. 1.2, wobei wir in der Notation die klassischen Bitvariablen durch  $h$  und  $v$  ersetzen:

$$|h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Unter den Winkeln  $+45^\circ$  und  $-45^\circ$  polarisiertes Licht drücken wir entsprechend durch  $+$  und  $-$  aus. In der obigen Basis gilt für die Vektoren zu dieser Polarisation:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Linear polarisiertes Licht kann man dadurch beschreiben, dass die allgemeinen Koeffizienten in Gl. 1.3 reell gewählt werden können. Dies bringt zum Ausdruck, dass es keine relative Phasenverschiebung zwischen den beiden Komponenten (horizontal und vertikal) gibt. Eine Polarisation unter einem allgemeinen Winkel  $\theta$  relativ zur Horizontalen wird durch den Vektor

$$|\theta\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

beschrieben.

Neben den linearen Polarisationen gibt es noch die zirkularen Polarisationen (und ganz allgemein die elliptischen Polarisationen):

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Hier spricht man von links zirkular polarisiertem Licht bzw. rechts zirkular polarisiertem Licht. Ganz allgemein kann eine Polarisation durch den Vektor

$$|\theta, \delta\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ e^{i\delta} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

gekennzeichnet werden. Da eine beliebige gemeinsame Phase für die beiden Komponenten denselben Zustand beschreibt, kann die erste Komponente reell gewählt werden. Der Winkel  $\delta$  gibt die Elliptizität der Polarisation an ( $\delta = 0$  entspricht linear polarisiertem Licht und  $\delta = \pm 90^\circ$  entspricht R- bzw. L-zirkular polarisiertem Licht) und der Winkel  $\theta$  kennzeichnet die Lage der großen Halbachse dieser Ellipse.

### 1.2.2 Die Menge der Observablen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Menge der hermiteschen Matrizen in dem zweidimensionalen komplexen Vektorraum, die wir mit der Menge der Observablen identifizieren werden. Als Basis für die hermiteschen Matrizen bieten sich die drei Pauli-Matrizen sowie die Einheitsmatrix an:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Diese vier Matrizen sind hermitesch (d.h. es gilt  $A_{ij} = A_{ji}^*$ ). Eine beliebige reelle Linearkombination ist ebenfalls hermitesch. Umgekehrt lässt sich jede hermitesche  $2 \times 2$ -Matrix als reelle Linearkombination in dieser Form schreiben:

$$A = a_0 \mathbf{1} + \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i = a_0 \mathbf{1} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Über das charakteristische Polynom erhält man die Eigenwerte  $\lambda_i$ :

$$\lambda_{1/2} = a_0 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = a_0 \pm |\mathbf{a}|. \quad (1.11)$$



$\sigma_1$  hat als Eigenvektoren  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$ ,  $\sigma_2$  hat als Eigenvektoren  $|R\rangle$  und  $|L\rangle$  und  $\sigma_3$  hat die Eigenvektoren  $|h\rangle$  und  $|v\rangle$ . Da es sich bei  $A$  um eine selbst-adjungierte Matrix handelt, sind die Eigenvektoren von  $A$  immer orthogonal zueinander. Es handelt sich bei den Eigenvektoren einer Observablen also immer um zueinander orthogonale Polarisationsvektoren.

### 1.2.3 Die Bloch-Kugel

Die Bloch-Kugel veranschaulicht die möglichen Polarisationszustände. Aus Gl. 1.8 wird schon deutlich, dass man die Polarisationszustände durch zwei Winkel  $\theta$  und  $\delta$  charakterisieren kann, wobei  $\theta \in [0, \pi]$  (nach einer Drehung um  $180^\circ$  erhält man dieselbe lineare Polarisation) und  $\delta \in [-\pi, +\pi]$  (positive Vorzeichen entsprechen rechtszirkularen elliptischen Polarisationen und negative Vorzeichen linkszirkularen). Diese Darstellung legt schon nahe, dass es sich bei der Menge der Polarisationszustände um eine Kugeloberfläche handelt. Trotzdem ist die Identifikation der Winkelvariablen nicht so trivial.

Wie schon erwähnt, lassen sich die (reinen) Zustände auch durch eindimensionale Projektionsmatrizen darstellen, also hermitesche Matrizen mit der Eigenschaft  $P^2 = P$ . Diese Eigenschaft lässt nur die Eigenwerte 1 und 0 zu. Ist ein Eigenwert 1 und der andere 0, projizieren diese Matrizen auf eindimensionale Unterräume. Aus Gl. 1.11 erkennt man, dass diese beiden Eigenwerte nur in folgendem Fall auftreten:

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |\mathbf{a}| = \frac{1}{2}. \quad (1.12)$$

In zwei Dimensionen können wir also jede Projektionsmatrix auf einen eindimensionalen Unterraum in der Form

$$P = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (1.13)$$

schreiben, wobei  $\mathbf{n}$  ein beliebiger 3-dimensionaler Einheitsvektor ist. Damit wird deutlich, dass sich jeder Zustand durch einen 3-dimensionalen Einheitsvektor darstellen lässt. Diese Darstellung bezeichnet man als Bloch-Kugel (siehe Abb. 1.2).<sup>3</sup>

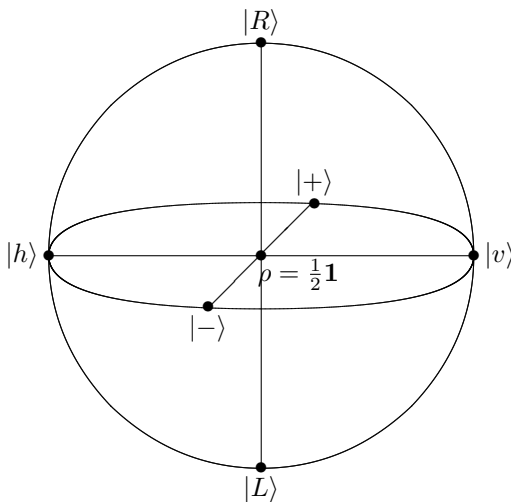


Abbildung 1.2: Die Bloch-Kugel für Polarisationszustände von Licht. Die Kugeloberfläche repräsentiert die reinen Zustände, das Kugellinnere die gemischten Zustände. Gegenüberliegende Punkte (Antipoden) entsprechen orthogonalen Polarisationszuständen.

Für den Fall  $|\mathbf{n}| < 1$  erhält man sogenannte Dichtematrizen. Sie beschreiben gemischte Zustände aus verschiedenen Polarisierungen. Der Spezialfall  $|\mathbf{n}| = 0$  führt auf die Einheitsmatrix (multipliziert mit  $1/2$ ). In diesem Fall kann keine Aussage über die Polarisation getroffen werden bzw.

<sup>3</sup>Henri Poincaré hat schon 1892 diese Darstellung für die Polarisationszustände von Licht verwendet, daher wird sie in der Optik auch als Poincaré-Kugel bezeichnet.

alle Polarisationsrichtungen sind gleich wahrscheinlich. Dies ist der maximal gemischte Zustand. Das Innere der Bloch-Kugel kennzeichnet somit gemischte Zustände, die Oberfläche die reinen Zustände.

Man beachte, dass die Bloch-Kugel in einem 3-dimensionalen reellen Vektorraum liegt. Orthogonale Polarisierungen ( $h$  und  $v$  oder  $+$  und  $-$  oder auch  $L$  und  $R$ ) liegen auf der Bloch-Kugel antipodisch gegenüber. Es handelt sich bei diesem Vektorraum daher nicht um den Hilbert-Raum der Zustände, in dem orthogonale Polarisierungen auch durch orthogonale Vektoren dargestellt werden.

### 1.3 Verschränkung

Ebenso wie in der klassischen Informationstheorie interessiert man sich in der Quanteninformatik nicht nur für einzelne Qubits, sondern für Ketten bzw. Folgen von Qubits. Im Folgenden betrachten wir nur Qubit-Paare, also Systeme zur Darstellung von zwei Qubits. Es zeigt sich, dass man auch in der Quantentheorie (ähnlich wie in der klassischen Informationstheorie) die meisten Operationen auf Qubit-Folgen als Hintereinanderausführung von Operationen auf Qubit-Paaren darstellen kann.

Ein System aus zwei Qubits (z.B. die Polarisationszustände von zwei Photonen) wird im Tensorprodukt der beiden einzelnen zweidimensionalen Vektorräume beschrieben. Man erhält auf diese Weise einen vierdimensionalen komplexen Vektorraum. In einem solchen Tensorprodukt beschreibt man die Vektoren gerne mit Doppelindizes. So ist beispielsweise das Tensorprodukt aus einem Vektor  $\mathbf{x}$  und einem Vektor  $\mathbf{y}$  gegeben durch:

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Das Tensorprodukt der beiden Vektorräume besteht aus allen Linearkombinationen solcher Vektoren, wobei folgendes Distributivgesetz gilt:<sup>4</sup>

$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \otimes (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{y}_2 \quad (1.15)$$

sowie

$$\mathbf{0} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (1.16)$$

Man erkennt sofort, dass in Gl. 1.14 das Produkt der beiden äußeren Komponenten (die erste und vierte Komponente) gleich dem Produkt der beiden inneren Komponenten ist. Dies kennzeichnet den Vektor (in zwei Dimensionen) eindeutig als separabel, wobei ein Vektor in dem vierdimensionalen Vektorraum als separabel bezeichnet wird, wenn es zwei Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  in den einzelnen Vektorräumen gibt, sodass sich der vierdimensionale Vektor als Tensorprodukt der beiden zweidimensionalen Vektoren schreiben lässt. Falls das nicht möglich ist – sich also ein Vektor in einem Tensorproduktraum nicht als Tensorprodukt von zwei Vektoren in den einzelnen Vektorräumen schreiben lässt – bezeichnet man den Vektor als verschränkt. In zwei Dimensionen haben wir somit ein einfaches Kriterium für die Verschränktheit von zwei Vektoren: Wenn das Produkt der ersten und vierten Komponente eines Vektors nicht gleich dem Produkt der zweiten und dritten Komponente ist, ist der Vektor verschränkt.

<sup>4</sup>Man beachte den Unterschied zur direkten Summe von Vektorräumen bzw. Vektoren:

$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \oplus (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \oplus \mathbf{y}_2.$$

und  $\mathbf{0} \oplus \mathbf{y}$  sowie  $\mathbf{x} \oplus \mathbf{0}$  sind von null verschiedene Vektoren. Statt  $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}$  schreibt man hier oft einfacher  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Bei Wellenfunktionen zu zwei Teilsystemen (oder allgemeiner zu zwei unabhängigen Klassen von Freiheitsgraden), die durch Funktionen von zwei Variablen beschrieben werden, bedeutet Separierbarkeit, dass  $\Psi(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ . Die Wellenfunktion lässt sich also als einfaches Produkt von zwei Funktionen darstellen. Für verschränkte Wellenfunktionen gilt das nicht.

Man beachte, dass der Begriff der Verschränktheit nur sinnvoll ist, wenn für einen Vektorraum eine Zerlegung als ein Tensorprodukt definiert ist. Ohne die Angabe einer solchen Produktdarstellung ist der Begriff der Verschränkung nicht definiert. Die Angabe einer solchen Produktdarstellung gibt an, in welcher Form das Gesamtsystem als aus zwei Teilsystemen bestehend gedacht werden kann. Bei zwei Teilchen ist eine solche Zerlegung physikalisch naheliegend (jedes Teilchen definiert sein Teilsystem). Es kann jedoch auch eine Verschränkung beispielsweise zwischen den Polarisationsfreiheitsgraden eines Photons und seinen räumlichen Eigenschaften bestehen. So hat ein einzelnes Photon, das durch einen Doppelspalt tritt, wobei hinter dem rechten Spalt ein +-Polarisationsfilter und hinter dem linken Spalt ein --Polarisationsfilter steht, eine Verschränkung zwischen seiner Polarisation und dem Spalt, durch den es getreten ist. Der Zustand

$$|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |r\rangle + |-\rangle \otimes |l\rangle) \quad (1.17)$$

beschreibt ein solches Photon. Die +-Polarisation ist korreliert mit dem rechten Spalt und die --Polarisation mit dem linken. Dieser Zustand ist im Sinne der obigen Definition verschränkt. Die Darstellung des Zustands einzelner Photonen durch solche Verschränkungen zwischen ihrem Polarisationsfreiheitsgrad und ihrer räumlichen Eigenschaft ist ganz sinnvoll, beispielsweise bei der Beschreibung von Experimenten zum Quantenradierer. Meistens hat man es aber mit Verschränkungen zwischen den Polarisationszuständen (bzw. allgemeiner den zwei Zuständen) eines Systems aus zwei Teilchen zu tun.

Die physikalische Bedeutung der Verschränkung liegt unter anderem an folgender Eigenschaft verschränkter Zustände. Ist ein Zustand separierbar, so separiert auch das Absolutquadrat der Komponenten des Vektors, durch den der Zustand beschrieben wird (vgl. Gl. 1.14). Diese Absolutquadrate entsprechen aber nach der Born'schen Regel bei Einzelsystemen den Wahrscheinlichkeiten, dass zwei Ereignisse gleichzeitig auftreten (bei Funktionenräumen handelt es sich um Wahrscheinlichkeitsdichten, die zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit über ein Volumen zu integrieren sind). Beispielsweise ist in Gl. 1.14  $w_{ij} = |x_i|^2|y_j|^2$  die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten der beiden Ereignisse  $i$  und  $j$ . Faktorisierte Wahrscheinlichkeiten für zwei Ereignisse bedeutet aber, dass diese Ereignisse unkorreliert sind. Eine Information über das Vorliegen eines der beiden Ereignisse ändert nichts an der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des zweiten Ereignisses.

Bei verschränkten Zuständen ist dies anders: Erhält man eine Information über das Vorliegen eines Ereignisses beispielsweise an einem Teilsystem, kann man neue Vorhersagen über das Eintreffen eines anderen Ereignisses an dem anderen Teilsystem treffen. Im Extremfall liegt das Ereignis an dem anderen Teilsystem sogar eindeutig fest. Dies ist dann besonders erstaunlich, wenn die beiden Teilsysteme sehr weit voneinander entfernt sind. Weshalb sollte eine Messung an einem Teilsystem auf der Erde eine instantane Veränderung des anderen Teilsystems im Andromeda-Nebel zur Folge haben? Diese Eigenschaft verschränkter Zustände hängt eng mit der Problematik der Lokalität der Quantentheorie zusammen.

## 1.4 Bell-Zustände

In dem Tensorproduktraum von zwei Zwei-Zustandssystemen gibt es eine ausgezeichnete Basis, die man erhält, wenn man die Tensorprodukte der Basisvektoren in den einzelnen Hilbert-Räumen bildet:

$$|h\rangle \otimes |h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |h\rangle \otimes |v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v\rangle \otimes |h\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |v\rangle \otimes |v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Diese Basisvektoren sind alle separabel. Zur Beschreibung von verschränkten Zuständen bietet es sich oft an, eine Basis zu wählen, bei der alle Basisvektoren maximal verschränkt sind.<sup>5</sup> Die Orthonormalbasis aus den folgenden vier Zuständen hat diese Eigenschaft. Diese Zustände bezeichnet man als Bell-Zustände:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle \otimes |h\rangle + |v\rangle \otimes |v\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle \otimes |h\rangle - |v\rangle \otimes |v\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle \otimes |v\rangle + |v\rangle \otimes |h\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle \otimes |v\rangle - |v\rangle \otimes |h\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Den letzten Zustand,  $|\Psi^-\rangle$ , bezeichnet man auch oft als EPR-Zustand (nach Einstein-Podolsky-Rosen). Er hat einige besondere Eigenschaften, insbesondere liegt die Antikorrelation bezüglich jeder Basis vor, d.h. es gilt:

$$|\text{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle \otimes |v\rangle - |v\rangle \otimes |h\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle \otimes |L\rangle - |L\rangle \otimes |R\rangle). \quad (1.23)$$

Es handelt sich bei diesem Bell-Zustand um den Eigenzustand zum Gesamtdrehimpuls 0 (Photonen haben einen Spin 1, und zwei Photonen können sich zum Gesamtspin 0 oder Gesamtspin 2 verbinden). Dieser Zustand ist invariant unter Drehungen und daher in allen Basissystemen formgleich. Für den Zustand  $|\Phi^+\rangle$  gilt diese Eigenschaft, sofern man sich auf lineare Polarisationen beschränkt.

<sup>5</sup>Es gibt eine technische Definition von maximal verschränkt: Wenn die Spur über die Projektionsmatrix des Zustands über einen der Teilräume die Identitätsmatrix in dem verbliebenen Teilraum ergibt. Physikalischer ausgedrückt: Ein Zustand heißt maximal verschränkt, wenn der Erwartungswert für beliebig Messungen an einem Teilsystem durch eine Dichtematrix proportional zur Identitätsmatrix – also maximale Unkenntnis – beschrieben werden muss. Dies wird im Folgenden aber nicht benötigt.

# Literaturverzeichnis

- [1] Aspect, A., Grangier, Ph., Roger, G.; Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities; Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 91–94.  
Aspect, A., Dalibard, J., Roger, G.; Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers; Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1804–1807.
- [2] Bell, J.; *Against 'Measurement'*; in *62 Years of Uncertainty*, Erice, 5–14 August 1989; auch in *Physics World* 8 (1990) 33–40. Abgedruckt in [3].
- [3] Bell, J.S.; *Speakable and Unspeakable in Quantum Physics*, 2. edition, Cambridge University Press (2004).
- [4] Filk, T; *Quantenmechanik (nicht nur) für Lehramtsstudierende*; Springer-Verlag, 2019.
- [5] Schrödinger, E.; *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*; Die Naturwissenschaften 23 (1935) 807–812, 823–828, 844–849.

# Index

- Bell-Zustand, 12
- Bloch-Kugel, 9
- Bunching, 7
  
- Dichtematrix, 9
  
- Einzelphotonen, 7
- Erwartungswertfunktional, 4
  
- Kollapspostulat, 5
  
- Malus, Gesetz von, 7
- Messung, 5
  
- Neumann-Lüders-Projektionspostulat, 5
  
- Observable, 3
  - Zwei-Zustandssysteme, 8
  
- Pauli-Matrizen, 8
- Polarisation, 6
  - lineare, 8
  - zirkulare, 8
- Polarisationswürfel, 6
- Projektionsmatrizen, 9
  
- Quantenobjekt, 5
- QuBit, 3–12
  
- Strahl, 5
- Strahlteiler
  - polarisierender, 6
- Summe, von Vektorräumen, 10
  
- Tensorprodukt, 10
  
- Verschränkung, 10
  
- Zustand, 4
  - klassische Mechanik, 4
  - Quantenmechanik, 4
- Zwei-Zustandssystem, 3, 5