Die Legendre-Transformation

Physikdidaktik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

11.05.2024

Professor Dr. Thomas Filk

Weitere Kurztexte hier: https://physikdidaktik.uni-freiburg.de/kurztexte/

Inhaltsverzeichnis

1 Die Legendre-Transformation **3**

1.1 Konvexe und konkave Funktionen . . . 3

1.2 Verschiedene Definitionen der Legendre-Transformation . . . 4

1.2.1 Definition aus einem Extremalprinzip . . . 5

1.2.2 Analytische Definition der Legendre-Transformation . . . 6

1.2.3 Bezug zur Laplace-Transformation . . . 7

1.2.4 Definition über die Ableitungen als Umkehrfunktionen . . . 7

1.2.5 Eine geometrische Sichtweise . . . 8

1.2.6 Die Legendre-Transformation als Beziehung zwischen totalen Differentialen . . . 8

1.2.7 Legendre-Transformation und Einhüllende . . . 9

1.3 Berührungstransformationen . . . 9

1.3.1 Punkttransformationen . . . 9

1.3.2 Linienelemente und Berührungstransformationen . . . 11

Kapitel 1

Die Legendre-Transformation

Autor: Thomas Filk, Version vom: 11.05.2024

Legendre-Transformationen treten in der Physik in verschiedenen Zusammenhängen auf. Die bekanntesten Beispiele sind die Transformation zwischen der Lagrange-Funktion (als Funktion von Ort und Geschwindigkeit) und der Hamilton-Funktion (als Funktion von Ort und Impuls) in der klassischen Mechanik, sowie die Transformationen zwischen verschiedenen thermodynamischen Potentialen (freie Energie, Enthalpie, großkanonische Freie Energie, etc.) in der Thermodynamik bzw. statistischen Mechanik. Trotz ihrer großen Bedeutung in der Physik, bleibt die Legendre-Transformation oft etwas Rätselhaftes, von dem man nicht so ganz versteht, worin ihre besondere Bedeutung liegt.

In der Physik beschreibt die Legendre-Transformation häufig den Zusammenhang zwischen zwei durch verschiedene Funktionen ausgedrückten Extremalbedingungen, die sich allerdings auf dasselbe System beziehen. In der Mechanik beschreiben die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen, ausgedrückt durch die Lagrange-Funktion, dieselben Bahnkurven wie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen. In der Thermodynamik soll in Abhängigkeit von den kontrollierten Parametern eines Ensembles ein thermodynamisches Potential extremal werden: die Entropie im mikrokanonischen – vollkommen abgeschlossenen – Ensemble, die freie Energie im kanonischen Ensemble, bei dem ein Wärmeaustausch mit der Umgebung erlaubt ist, oder auch die Enthalpie bzw. die freie Enthalpie, falls statt des Volumens der Druck kontrolliert wird. In allen Fällen wird die Ableitung der einen Funktion zur Variablen der transformierten Funktion.

Was oftmals verloren geht, ist die geometrische Bedeutung der Legendre-Transformation als einer „Berührungstransformation" oder „Transformation von Linienelementen". Dieser Zugang stand historisch im Vordergrund (wobei es immer schon darum ging, Bedingungen für die Lösbarkeit bestimmter Differentialgleichungen zu formulieren). In diesem Abschnitt soll dieser Aspekt näher beleuchtet werden. Viele Überlegungen stammen aus dem klassischen Buch von Sophus Lie „Geometrie der Berührungstransformationen" [1], das zwar in etwas veralteter Sprache geschrieben ist, aber trotzdem interessante geometrische Einblicke liefert.

1.1 Konvexe und konkave Funktionen

Wir bezeichnen eine Teilmenge K eines Vektorraums V als konvex, wenn die gerade Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Punkten $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2 \in K$, d.h. die Menge der Punkte

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 + \alpha(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{1.1}$$

ganz in K liegt. Insbesondere heißt ein Gebiet in der Ebene konvex, wenn die geradlinige Verbindungslinie zwischen je zwei Punkten dieses Gebiets ganz in dem Gebiet verläuft.

Das Konzept des Vektorraums lässt sich in diesem Fall auch auf einen affinen Raum verallgemeinern. Auch auf Riemann'schen Mannigfaltigkeiten kann man von konvexen Mengen sprechen, sofern die Bedingung „gerade Verbindungslinie" durch „kürzeste Verbindungslinie" ersetzt wird.

Der Graph einer Funktion $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der Punkte $(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}; x \in U$. Eine Funktion $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn die Punkte oberhalb des Graphen dieser Funktion, das sind die Punkte $(\boldsymbol{x},y)$, für die gilt $y \geq f(\boldsymbol{x})$, eine konvexe Menge bilden (siehe Abb. 1.1 (links)). Die Menge der Punkte oberhalb des Graphen einer Funktion bezeichnet man auch als ihren Epigraph.

Eine Funktion $f(\boldsymbol{x})$ heißt konkav, wenn die Punktemenge unterhalb des Graphen dieser Funktion – der sogenannte Hypograph, also die Menge der Punkte $(\boldsymbol{x},y)$ mit $y \leq f(\boldsymbol{x})$ – eine konvexe Menge bildet (siehe Abb. 1.1 (rechts)).

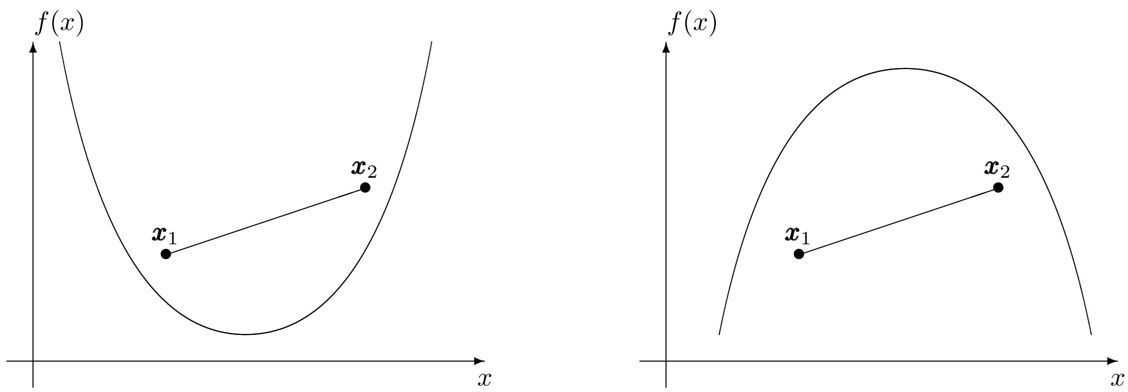

Abbildung 1.1: Konvexe und konkave Funktionen. (links) Bei einer konvexen Funktion bildet die Menge oberhalb des Graphen der Funktion eine konvexe Menge, d.h., die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte aus dieser Menge liegt ebenfalls in dieser Menge. (rechts) Bei einer konkaven Funktion ist die Menge unterhalb des Graphen dieser Funktion konvex.

Eine äquivalente Definition von konvexer Funktion f lautet, dass für zwei beliebige Punkte $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ aus dem Definitionsbereich die Ungleichung

$$f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_2) \tag{1.2}$$

gilt. Bei konvexen Funktionen handelt es sich somit um Verallgemeinerungen von linearen Funktionen, für die das Gleichheitszeichen gilt. Bei streng konvexen Funktionen gilt immer die Ungleichheit. Falls die Funktionen zweimal stetig differenzierbar sind, ist in diesem Fällen die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen $\partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j$ immer positiv definit.

Im Folgenden beschränken wir uns meist auf den Fall $n = 1$, d.h., wir betrachten Funktionen $f : U \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Außerdem beschränken wir uns auf streng konvexe Funktionen. Die Verallgemeinerungen auf $n > 1$ und konkave Funktionen ist in den meisten Fällen offensichtlich. Bei konkaven Funktionen vertauschen häufig die Beziehungen zwischen Maxima und Minima.

1.2 Verschiedene Definitionen der Legendre-Transformation

In den folgenden Abschnitten gehen wir auf unterschiedliche Definitionen der Legendre-Transformation ein, vermeiden jedoch vorläufig noch die geometrische Bedeutung als

Berührungstransformation.

1.2.1 Definition aus einem Extremalprinzip

Definition: Gegeben sei eine konvexe Funktion $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Legendre-Transformierte von f ist die Funktion

$$g(p) = \max_x \{p \cdot x - f(x)\}\,. \tag{1.3}$$

Ist $f(x)$ einmal stetig differenzierbar, wird der gesuchte Extremalwert bei dem Punkt x angenommen, der sich aus folgender Bedingung ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p \cdot x - f(x))\Big|_{x(p)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x(p)}\,. \tag{1.4}$$

$x(p)$ kann auch als Umkehrabbildung zu

$$p(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.5}$$

aufgefasst werden. Der gesuchte Maximalwert ist dann

$$g(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))\,. \tag{1.6}$$

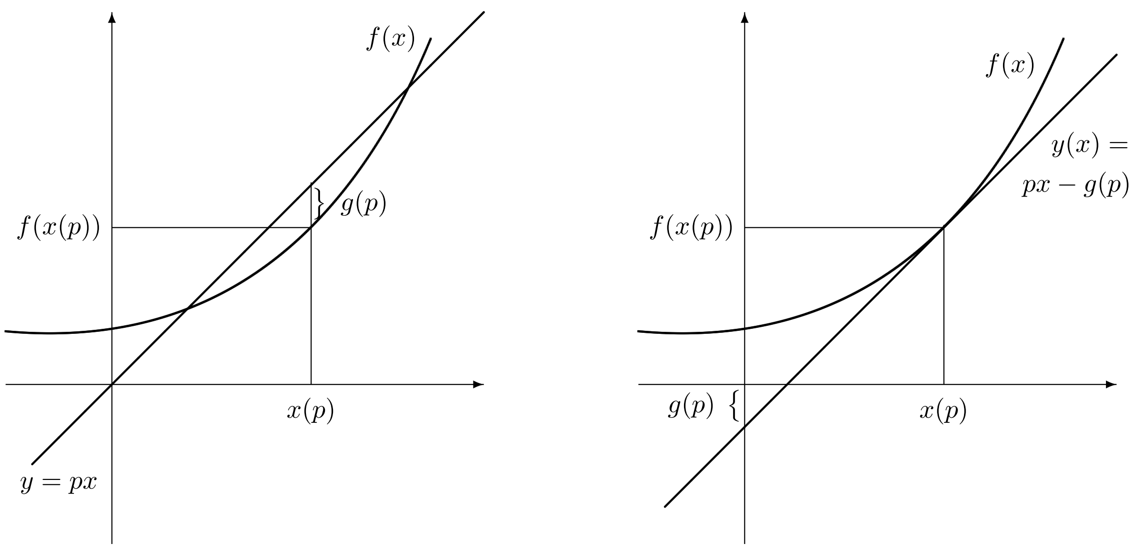

Abbildung 1.2: Legendre-Transformation. (links) Wir können durch den Ursprung eine Gerade mit der Steigung p legen, also $y = px$. Die Legendre-Transformierte $g(p)$ ist dann der extremale Abstand zwischen dieser Geraden und der Funktion $f(x)$. Dieser befindet sich an der Stelle x, die durch die Bedingung $p = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ gegeben ist. (rechts) Zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ können wir an einen Punkt x eine Tangente mit der Steigung $p = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ legen. Der Schnittpunkt dieser Tangente mit der y-Achse ist $-g(p)$.

Anschaulich handelt es sich bei der Extremalbedingung für $px - f(x)$ um die Differenz zwischen der Funktion $f(x)$ und der Funktion px, also einer Geraden durch den Ursprung mit Steigung p (siehe Abb. 1.2 (rechts)). Diese Differenz wird an dem Punkt $x(p)$ extremal, wo die Steigung von f gleich der Steigung p der Geraden ist, also $f'(x(p)) = p$. Die Differenz zwischen beiden Kurven an dieser Stelle ist gerade der Wert $g(p)$, um den die Gerade nach oben oder unten verschoben werden muss, damit sie zu einer Tangente an $f(x)$ wird.

Anmerkungen

1. In mehr als einer Dimension wird aus Gl. 1.3

$$g(\boldsymbol{p}) = \max_{\boldsymbol{x}}\{\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle - f(\boldsymbol{x})\}\,, \tag{1.7}$$

   wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die natürliche Paarung zwischen einem Element des dualen Vektorraums, $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^{n\,*}$, und einem Element des Vektorraums $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ ist. Manchmal schreibt man auch $\langle \boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\rangle = \boldsymbol{p}^T \cdot \boldsymbol{x}$. Streng genommen ist $g(\boldsymbol{p})$ daher eine Funktion auf dem dualen Vektorraum. Dies wird in der Mechanik deutlich, wo die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$ ein Element des Tangentialraums an die Mannigfaltigkeit des Konfigurationsraums ist, wohingegen der Impuls $\boldsymbol{p}$ ein Element des Kotangentialraums ist.

2. Das Vorzeichen für die Legendre-Transformation ist Konvention. Manchmal definiert man auch

$$g(p) = \min_x\{f(x) - p\cdot x\}\,. \tag{1.8}$$

3. Es handelt sich bei dieser Definition um eine Verallgemeinerung der Suche nach Extremalpunkten. Ein Extremalpunkt x_0 einer Funktion f liegt vor, wenn der Abstand eines Funktionswertes von f von der x-Achse, also der Geraden $y = 0$, extremal (maximal oder minimal) wird. Dieser Abstand ist gleich $f(x_0)$.

   Dies wird nun verallgemeinert zu der Fragestellung: Gesucht ist ein Punkt $x(p)$, für den der Abstand einer Funktion f von der Geraden $y = px$ extremal wird. Dieser Abstand ist dann durch $g(p) = px(p) - f(x(p))$, also der Legendre-Transformation von $f(x)$ gegeben.

1.2.2 Analytische Definition der Legendre-Transformation

Definition: Gegeben sei eine konvexe Funktion $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(x)$. Wir definieren eine zweite Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p \mapsto g(p)$ nach der Vorschrift:

$$g(p) = p\cdot x(p) - f(x(p))\,. \tag{1.9}$$

Hierbei ist $x(p)$ die Umkehrabbildung zu

$$p(x) := \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{1.10}$$

Die geometrische Konstruktionsvorschrift dieser Funktion $g(p)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist die Folgende:

Gegeben $p \in \mathbb{R}$. Wir suchen zunächst den Punkt $x \in \mathbb{R}$, bei dem die Steigung der Funktion f gleich p ist:

$$p = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x(p)}\,. \tag{1.11}$$

Nun legen wir an diesen Punkt $(x(p),f(x(p))) \in \mathbb{R}^2$ die Tangente:

$$y(x) = p(x - x(p)) + f(x(p))\,, \tag{1.12}$$

(siehe Abb. 1.2(rechts)). Der Schnittpunkt dieser Tangente mit der $x = 0$-Achse ergibt $-g(p)$:

$$-g(p) = y(x)\Big|_{x=0} = -px(p) + f(x(p))\,. \tag{1.13}$$

1.2.3 Bezug zur Laplace-Transformation

Der Bezug der Legendre-Transformation zur Laplace-Transformation wird aus folgender Überlegung deutlich. Sei

$$F(x) = e^{-f(x)} \tag{1.14}$$

eine (positive) Funktion, wobei f konvex sein soll (d.h. $f''(x) > 0$) und sich für $x \to \pm\infty$ so verhalten soll, dass die folgenden Integrale existieren. Dann ist die Laplace-Transformierte:

$$G(p) = \int_0^\infty F(x)\, e^{-px}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-f(x)-px}\, \mathrm{d}x\,. \tag{1.15}$$

Wenn nun, wie es in der statistischen Mechanik der Fall ist, die Funktion $e^{-f(x)-px}$ ein sehr scharfes Maximum an einer Stelle x_0 hat, kann man um dieses Maximum entwickeln und erhält $y = x - x_0$ als neue Integrationsvarialbe:

$$G(p) = \int e^{-f(x_0)-px_0-f''(x_0)y^2\pm\cdots}\, \mathrm{d}y = e^{-f(x_0)-px_0} \int e^{-f''(x_0)y^2+\cdots} \mathrm{d}y\,. \tag{1.16}$$

Für den Logarithmus von $G(p)$ folgt:

$$g(p) = \log G(u) = -f(x_0) - px_0 + ... \tag{1.17}$$

Von den höheren Termen kann man zeigen, dass sie im thermodynamischen Grenzfall verschwinden, sodass näherungsweise:

$$g(p) \approx -f(x_0) - px_0 \tag{1.18}$$

gilt. x_0 ist dabei als Lösung aus der Extremalbedingung

$$(-f(x) - px)' = 0 \tag{1.19}$$

zu bestimmen. Das abgeänderte Vorzeichen im Vergleich zur „normalen“ Legendre-Transformation ist in der Thermodynamik üblich.

1.2.4 Definition über die Ableitungen als Umkehrfunktionen

Wir können die Legendre-Transformation auch über folgende Bedingung einführen:

Gesucht ist die Beziehung zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(p)$, so dass die ersten Ableitungen dieser beiden Funktionen jeweils Umkehrabbildungen voneinander sind. Etwas anders ausgedrückt: Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit $f'(x) = p(x)$. Die Umkehrabbildung von $p(x)$ sei $x(p)$. Gesucht ist die Funktion $g(p)$, sodass $g'(p) = x(p)$.

Wir zeigen, dass die Legendre-Transformierte $g(p) = px(p) - f(x(p))$ von $f(x)$ diese Bedingung erfüllt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(px(p) - f(x(p))) \\
&= x(p) + p\frac{\mathrm{d}x(p)}{\mathrm{d}p} - \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x(p)} \frac{\mathrm{d}x(p)}{\mathrm{d}p} \\
&= x(p) + px'(p) - px'(p) = x(p)\,.
\end{aligned}$$

Bei gegebenem $f(x)$ ist die Funktion $g(p)$ durch diese Bedingung nur bis auf eine Konstante festgelegt. Diese Konstante kann durch die Bedingung

$$g(p) + f(x) = px \tag{1.20}$$

festgelegt werden, wobei man in dieser Gleichung sowohl x als Funktion von p auffassen kann, $x = x(p)$, oder auch p als Funktion von x: $p = p(x)$.

1.2.5 Eine geometrische Sichtweise

Wir können die Sichtweise des letzten Abschnitts 1.2.4 noch etwas weiter treiben und geometrisch veranschaulichen (dieser Abschnitt verwendet Ideen aus [2]).

Gegeben seien die beiden Funktionen $x(p)$ und $p(x)$, die Umkehrfunktionen voneinander sein sollen. Das setzt voraus, dass beide Funktionen in ihrem Definitionsbereich monoton sind. In einem px-Diagramm lassen sich die Graphen durch dieselbe Linie darstellen: $(p,x(p))$ und $(p(x),x)$, je nachdem, ob man die Abszisse oder die Ordinate als unabhängige Variable auffasst (siehe Abb. 1.3).

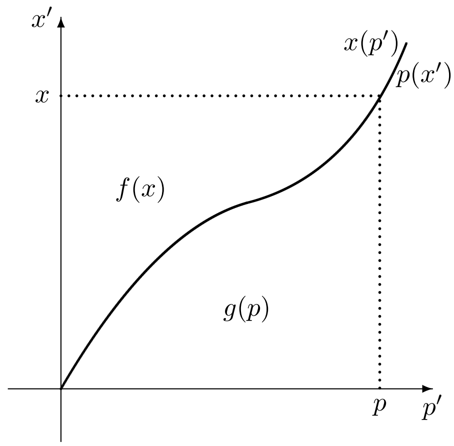

Abbildung 1.3: Die Integrale über eine Funktion $x(p')$ und ihre Umkehrfunktion $p(x')$, die jeweils denselben Graphen $(p(x'),x')$ und $(p',x(p'))$ haben, spannen bei geeignet gewählten Integrationsgrenzen x und p ein Rechteck der Fläche px auf. Die Stammfunktionen $f(x)$ und $g(p)$, die jeweils die Flächen unter den Kurven angeben, erfüllen daher die Gleichung $f(x) + g(p) = px$.

Die zugehörigen Stammfunktionen $f(x)$ und $g(p)$ lassen sich geometrisch als Flächen unter den Kurven interpretieren und als Integrale über ihre Ableitungen schreiben:

$$f(x) = \int_0^x p(x')\,\mathrm{d}x' \qquad \text{und} \qquad g(p) = \int_0^p x(p')\,\mathrm{d}p' \,. \tag{1.21}$$

Sind die Punkte x und p so gewählt, dass $x(p) = x$ und $p(x) = p$, ist die Gesamtfläche unter beiden Kurven gleich der Fläche des Rechtecks px. Somit gilt:

$$f(x) + g(p) = px \,. \tag{1.22}$$

1.2.6 Die Legendre-Transformation als Beziehung zwischen totalen Differentialen

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit dem totalen Differential

$$\mathrm{d}f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\mathrm{d}x = p(x)\,\mathrm{d}x \,. \tag{1.23}$$

Gesucht ist eine Funktion $g(p)$ mit der Eigenschaft, dass die Umkehrfunktion von $p(x)$, d.h. die Funktion $x(p)$, als Ableitung im totalen Differential auftritt. Es soll also gelten: $\mathrm{d}g = x\,\mathrm{d}p$. (Dies ist die Formulierung der Beziehungen aus Abschnitt 1.2.4 durch Differentialformen.)

Der übliche Trick ist, $\mathrm{d}f(x)$ um $0 = x\,\mathrm{d}p - x\,\mathrm{d}p$ zu erweitern und die Terme umzuordnen:

$$\mathrm{d}f = p\,\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}p - x\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}(px) - x\,\mathrm{d}p \,. \tag{1.24}$$

Daraus ergibt sich

$$x\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}(px) - \mathrm{d}f = \mathrm{d}\big(px - f\big) \,. \tag{1.25}$$

Das totale Differential von $g(p) = px - f(x)$, wobei x als Funktion von p aufzufassen ist, ist somit gleich $x\,\mathrm{d}p$.

1.2.7 Legendre-Transformation und Einhüllende

Die Legendre-Transformation lässt sich auch als eine Transformation von einer Funktion $f(x)$ zu einer Funktion $g(p)$ auffassen, wobei $g(p)$ die Tangenten an f charakterisieren. Auf diese Weise kann man die Funktion $f(x)$ als Einhüllende zu ihrer Tangentenschar auffassen. In dieser Interpretation wird das Konzept der Berührungstransformation schon angedeutet.

Sei allgemein eine Kurvenschar $h(x,p)$ gegeben, wobei h als Funktion von x zu einem festen Parameter p eine Kurve beschreibt. p parametrisiert die verschiedenen Kurven. Wir nehmen nun an, dass diese Kurvenschar eine Einhüllende definiert, d.h., es gibt eine Funktion, die von jeder Kurve in genau einem Punkt berührt wird. Es sei $x(p)$ dieser Punkt, bei dem für ein festes p diese Berührung stattfindet. Dann ist in einer genügend kleinen Umgebung von p (sofern die Einhüllende dort konvex ist)

$$h(x(p),p \pm \mathrm{d}p) \leq h(x(p),p) \tag{1.26}$$

und damit

$$\left.\frac{\partial h(x,p)}{\partial p}\right|_{x=x(p)} = 0\,. \tag{1.27}$$

In Abb. 1.4 ist dieser Fall für $h(x,p) = xp - g(p)$ dargestellt. Für einen festgehaltenen Wert von p beschreibt $h(x,p)$ als Funktion von x eine Gerade in der x,y-Ebene mit einer Steigung p und einem Schnittpunkt $-g(p)$ mit der y-Achse. Offenbar haben diese Geraden eine Einhüllende $f(x)$, d.h. jede Gerade ist tangential zu $f(x)$ in einem bestimmten Punkt $x(p)$ (Abb. 1.4 (links)). Der Funktionswert $f(x(p)) = h(x(p),p)$ ist (sofern $f(x)$ in einer Umgebung von $x(p)$ konvex ist) ein Maximum von $h(x(p),p')$ als Funktion von p' (Abb. 1.4 (rechts)). Damit erhalten wir als Bedingung für den Berührungspunkt $x(p)$:

$$\frac{\partial h(x,p)}{\partial p} = x - \frac{\partial g(p)}{\partial p} = 0 \qquad \text{oder} \qquad x(p) = \frac{\partial g(p)}{\partial p}\,. \tag{1.28}$$

Diese Gleichung lässt sich zu $p(x)$ auflösen. Die Einhüllende $f(x)$ ergibt sich damit zu

$$f(x) = h(x,p(x)) = xp(x) - g(p(x))\,. \tag{1.29}$$

Diese Einhüllende $f(x)$ ist somit die Legendre-Transformierte von $g(p)$.

1.3 Berührungstransformationen

Die Legendre-Transformation ordnet einer Funktion $f(x)$ mit Argument x eine neue Funktion $g(p)$ mit Argument p zu. Ähnlich wie viele Integraltransformationen (z.B. die Fourier-Transformation) folgt auch die Legendre-Transformation *nicht* aus einer Punkttransformation (oder Koordinatentransformation) der Ebene (x,y), in der der Graph der Funktion definiert ist. Allerdings handelt es sich um eine einfache Erweiterung einer solchen Punkttransformation. Bevor wir die so genannten Berührungstransformationen untersuchen, betrachten wir nochmals kurz die Punkttransformationen und ihre Eigenschaften.

1.3.1 Punkttransformationen

Die folgenden Überlegungen gelten für Punkt- oder Koordinatentransformationen in beliebigen Dimensionen, wir betrachten jedoch immer nur den Fall $d = 2$.

Sei $U \subset \mathbf{R}^2$ ein Teilgebiet der Ebene, parametrisiert durch (x,y). Eine Punkt- oder Koordinatentransformation besteht aus einer (2-komponentigen) Abbildung:

$$(X,Y) : U \subset \mathbf{R}^2 \to U' \subset \mathbf{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto (X(x,y),Y(x,y))\,. \tag{1.30}$$

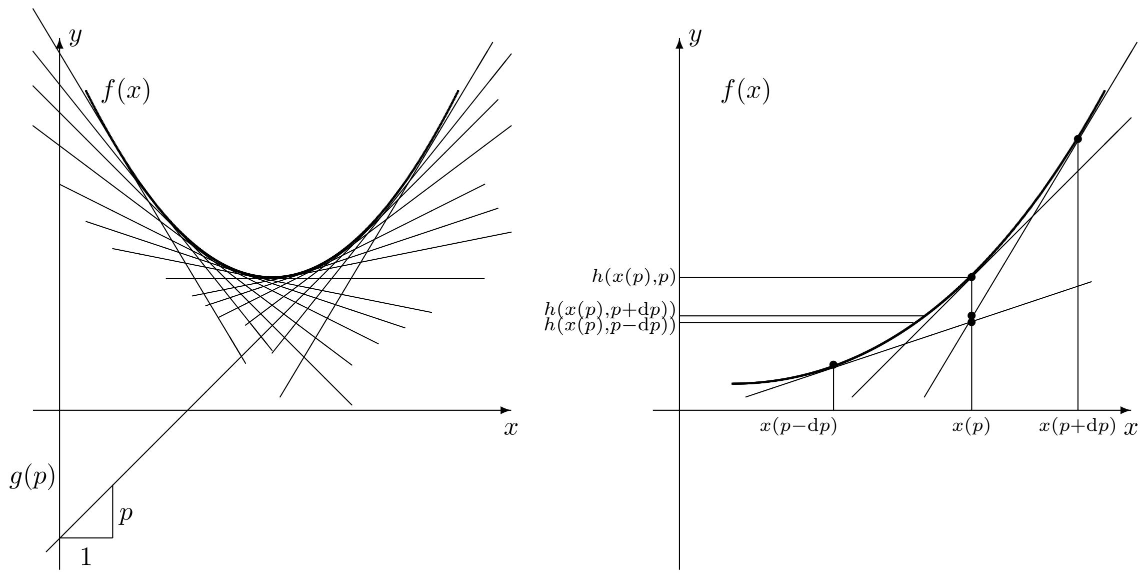

Abbildung 1.4: (links) Die Funktion $f(x)$ als Einhüllende ihrer Tangenten. Die Funktionenschar $h(x,p) = px - g(p)$, aufgefasst als Funktionen von x, definieren Geraden mit einer Steigung p. $g(p)$ ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. (rechts) Wenn $h(x(p))$ der Funktionswert von $h(x,p)$ an der Stelle ist, wo die Funktion $h(x,p)$ bei festgehaltenem p als Funktion von x die Steigung p hat, dann handelt es sich um einen Extremwert, d.h., die Tangenten zur infinitesimal benachbarten p-Werten haben bei $x(p)$ einen kleineren Funktionswert als $h(x(p))$.

Die Abbildung (X,Y) soll injektiv sein.

Oft betrachtet man nun das Transformationsverhalten von Funktionen $v : U \to \mathbf{R}$ mit $(x,y) \mapsto v(x,y)$ unter den Koordinatentransformationen. Wir erhalten eine neue Funktion $V : U' \to \mathbf{R}$ mit $(X,Y) \mapsto V(X,Y)$, die durch die Bedingung:

$$v(x,y) = V(X(x,y),Y(x,y)) \tag{1.31}$$

gegeben ist.

Für das Folgende sind wir jedoch an dem Transformationsverhalten von Abbildungen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $x \mapsto f(x)$ bzw. deren Graphen $(x,f(x)) \in U$ unter der Transformation interessiert. Der neue Graph ist durch die Parameterdarstellung $(X(x,f(x)),Y(x,f(x)))$ gegeben. Durch Auflösung von $X(x) = X(x,f(x))$ nach $x(X)$ und Einsetzen in den zweiten Term erhalten wir eine Darstellung der Kurve in der Form $Y = F(X)$, bzw. des Graphen in der Form $(X,F(X))$.

Wir behaupten nun, dass unter einer Punkt- bzw. Koordinatentransformation zwei Kurven $(x,f_1(x))$ und $(x,f_2(x))$, die sich in einem Punkt (x_0,y_0) *berühren*, in zwei Kurven $(X,F_1(X))$ und $(X,F_2(X))$ abgebildet werden, die sich in dem Punkt $(X_0,Y_0) = (X(x_0,y_0),Y(x_0,y_0))$ berühren. (In der passiven Interpretation einer Koordinatentransformation ist das trivial, aber auch in der aktiven Interpretation, bei der eine Kurve mittransformiert wird, ist es offensichtlich.)

Hinter dieser Bedingung steckt auch die Definition für das Transformationsverhalten von Vektoren auf Mannigfaltigkeiten. Ein Vektor an einem Punkt (x_0,y_0) ist dort durch Äquivalenzklassen von Kurven durch diesen Punkt definiert, wobei zwei Kurven äquivalent sind, wenn die Richtungsableitungen aller Funktionen auf der Mannigfaltigkeit entlang der beiden Kurven an diesem Punkt gleich sind. Das bedeutet, die beiden Kurven haben in diesem Punkt dieselben Tangentialvektoren.

Zum Beweis bilden wir die Ableitung von $(X(x,f(x)),Y(x,f(x)))$ am Punkte x_0:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(X(x,f(x)),Y(x,f(x))) = (\partial_1 X + \partial_2 X \cdot f'(x)\ ,\partial_1 Y + \partial_2 Y \cdot f'(x))\,. \tag{1.32}$$

Hierbei sind:

$$\partial_1 X = \frac{\partial X}{\partial x}\ ,\ \ \partial_2 X = \frac{\partial X}{\partial y}\ ,\ \ \partial_1 Y = \frac{\partial Y}{\partial x}\ ,\ \partial_2 Y = \frac{\partial Y}{\partial y}\,. \tag{1.33}$$

Der Tangentialvektor hängt also nur von den partiellen Ableitungen von X und Y nach ihren Argumenten an dem Punkt x und y ab, die sind aber an demselben Punkt immer gleich, und von der Ableitung $f'(x)$ and dem betreffenden Punkt. Wenn aber zwei Funktionen an einem Punkt dieselbe Ableitung haben, sind diese Ausdrücke ebenfalls gleich.

Diese Eigenschaft – Kurven, die sich in einem Punkt berühren, gehen wieder in Kurven über, die sich berühren – wird bei Berührungstransformationen verallgemeinert.

1.3.2 Linienelemente und Berührungstransformationen

Ein *Linienelement* kann man sich als einen „infinitesimalen“ Abschnitt einer Geraden vorstellen. Es ist spezifiziert durch die Vorgabe eines Punktes (x,y), an dem das Linienelement anliegt, und einer Steigung $p = y'$, die das Linienelement hat. Ein Linienelement besteht also aus dem Tripel (x,y,p). Man beachte, dass p hier nicht als die Ableitung einer Kurve zu verstehen ist, sondern einfach als die Vorgabe einer Steigung.

Eine *Berührungstransformation* ist eine Punkttransformation auf den Linienelementen. Formal handelt es sich einfach um eine Punkttransformation auf dem $\mathbf{R}^3$:

$$(x,y,y') \mapsto (\,p(x,y,y')\ ,\ g(x,y,y')\ ,\ g'(x,y,y')\,)\,. \tag{1.34}$$

Anmerkungen:

1. Offenbar definiert eine Punkttransformation auf einer Ebene eine spezielle Berührungstransformation. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} p(x,y,y') &= X(x,y)\ ,\ \ g(x,y,y') = Y(x,y)\ , \\ g'(x,y,y') &= \frac{\partial_1 Y(x,y) + \partial_2 Y(x,y)\cdot y'}{\partial_1 X(x,y) + \partial_2 X(x,y)\cdot y'}\,. \end{aligned}$$

   In den ersten beiden Koordinaten handelt es sich um eine gewöhnliche Punkttransformation der Ebene, und die dritte Koordinate (die Steigung) ist die durch die Punkttransformation induzierte transformierte Steigung einer Kurve, die nach dem oben Erwähnten nicht von der speziellen Wahl der Kurve abhängt, sondern nur von ihrer Steigung in dem betreffenden Punkt.

2. Eine Legendre-Transformation lässt sich in folgender Form als Berührungstransformation auffassen:

$$p(x,y,y') = y'\ ,\ \ g(x,y,y') = xy' - y\ ,\ \ g'(x,y,y') = x\,. \tag{1.35}$$

   Man beachte, dass in diesem Fall die Legendre-Transformation nicht als Transformation einer Kurve aufgefasst wird, sondern als eine Transformation auf der Menge der Linienelemente in einer Ebene. Zu der herkömmlichen Transformation von Funktionen wird diese Berührungstransformation erst, wenn wir die Wirkung dieser Transformation auf eine Kurve in der Ebene zusammen mit ihren Linienelementen an jedem Punkt (ihrer Ableitung) betrachten.

Jede Funktion $x \mapsto f(x)$ definiert in der Ebene einen Graphen (eine Kurve) der Form $(x,f(x))$, und sie definiert im Raum der Linienelemente ebenfalls eine Kurve: $(x,f(x),f'(x))$. Wenn sich zwei Kurven in einem Punkt berühren, d.h., für einen speziellen Wert x_0 gilt $(x_0,f(x_0),f'(x_0)) = (x_0,g(x_0),g'(x_0))$, dann sind auch die Bilder dieser beiden Linienelemente gleich.

Literaturverzeichnis

[1] Lie, Sophus & Scheffers, Georg; *Geometrie der Berührungstransformationen* Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1986.

[2] Wouter (https://physics.stackexchange.com/users/16660/wouter), Physical meaning of Legendre transformation, URL (version: 2014-04-01): https://physics.stackexchange.com/q/69374
Normalerweise würde ich solche Referenzen nicht verwenden, aber dies ist mal eine originelle Ausnahme.