Hebelgesetze –
von Archimedes bis Mach

Physikdidaktik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

26.03.2024

Professor Dr. Thomas Filk

Inhaltsverzeichnis

**1 Hebelgesetze –
von Archimedes bis Mach 3**

1.1 Der Beweis von Archimedes 4
1.2 Die Ableitung von Galileo und Stevin 5
1.3 Die Existenz eines Schwerpunkts 6
1.4 Der „Beweis“ von Huygens 7
1.5 Der allgemeine schiefwinklige Hebel 8

Kapitel 1

Hebelgesetze – von Archimedes bis Mach

Autor: Thomas Filk, Version vom: 26.03.2024

Kaum ein Gesetz bzw. eine Gruppe von Gesetzen erscheint zunächst selbstverständlicher als das Hebelgesetz: Kraft × Kraftarm = Last × Lastarm. In Form einer Gleichgewichtsbedingung für eine allgemeine Waage kann man es auch in der Form „Gewicht$_1$ × Hebelarm$_1$ = Gewicht$_2$ × Hebelarm$_2$“ formulieren (siehe Abb. 1.1).

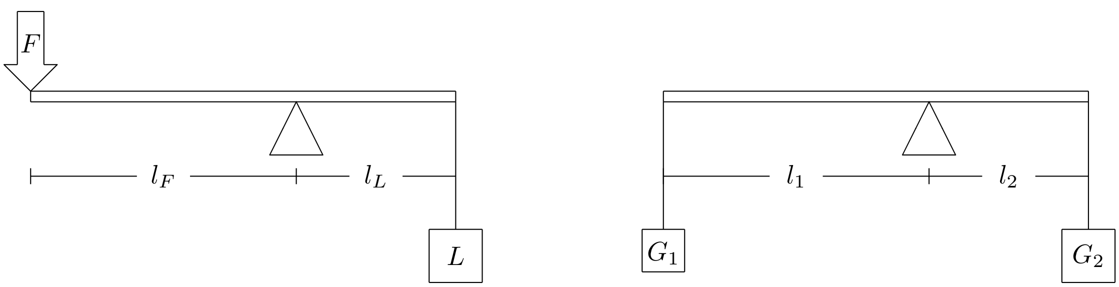

Abbildung 1.1: Zwei Versionen des Hebelgesetzes: (links) Das Produkt aus Kraft (F) und Kraftarm (l_F) muss im Gleichgewicht gleich dem Produkt aus Last (L) und Lastarm (l_L) sein; (rechts) bei einer Waage ist das Produkt aus den Gewichten (G_i) multipliziert mit den zugehörigen Hebelarmen (l_i) bei der Gleichgewichtsbedingung auf beiden Seiten gleich.

Obwohl dieses Gesetz an sich schon sehr einfach ist, kann man darüber diskutieren, ob es sich auf einen noch einfacheren Fall zurückführen lässt. So gibt es „Beweise“ von Archimedes, Galileo, Huygens und anderen, die den allgemeinen Fall des Hebelgesetzes auf den speziellen symmetrischen Fall – Lastarm = Kraftarm und Last = Kraft – zurückführen wollen. Der symmetrische Fall ist unmittelbar einsichtig und kann als Folge des „Prinzips vom hinreichenden Grund“ angesehen werden: Wenn die beiden Hebelarme gleich sind und die beiden Gewichte ebenfalls gleich sind, gibt es keinen Grund, weshalb das Gleichgewicht zugunsten einer der beiden Seiten gestört sein sollte. Weshalb zu der einen Seite und nicht zu der anderen?

Ernst Mach argumentiert ganz allgemein gegen die Möglichkeit einer solchen Zurückführung des allgemeinen Hebelgesetzes auf den symmetrischen Fall: Falls das allgemeine Hebelgesetz von der

Form $G_1 f(l_1) = G_2 f(l_2)$ wäre, mit einer beliebigen Funktion f (z.B. könnte gelten $f(l) = l^p$), würde trotzdem der symmetrische Fall gelten, d.h. das Gesetz wäre für $G_1 = G_2$ und $l_1 = l_2$ erfüllt. Insofern kann es nach Mach nicht möglich sein, das allgemeine Hebelgesetz aus seiner symmetrischen Form abzuleiten.

Trotzdem ist es interessant zu untersuchen, an welchen Stellen Archimedes und seine Nachfolger weitere, teilweise versteckte Annahmen hineinstecken, wenn sie glauben, das allgemeine Gesetz ableiten zu können. Während Ernst Mach argumentiert, dass die allgemeine Form des Hebelgesetzes in versteckter Form bei diesen Beweisen verwendet wird, erscheinen mir andere Annahmen gemacht zu werden, die dann zwar das Hebelgesetz zur Folge haben, aber physikalisch begründeter sind. Die folgenden Darstellungen lehnen sich eng an die Untersuchung von Ernst Mach an [1].

1.1 Der Beweis von Archimedes

Archimedes (um 287–212 v.Chr.) geht von einer zusätzlichen Erfahrungstatsache aus: Eine symmetrische Waage mit zwei gleichen Gewichten G und gleichen Hebelarmen steht im Gleichgewicht mit einem Gewicht zu der doppelten Masse, also $2G$ (siehe Abb. 1.2).

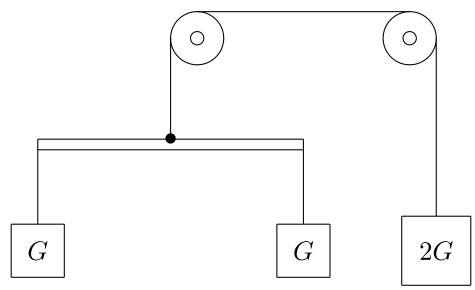

Abbildung 1.2: Eine symmetrische Waage mit zwei Gewichten G kann in der Mitte durch ein einzelnes, doppelt so großes Gewicht $2G$ ersetzt werden. Hier (und im Folgenden) wird angenommen, dass die Masse des Hebelarms im Vergleich zu den Massen m zu den Gewichten $G = mg$, g die Schwerbeschleunigung auf der Erdoberfläche, vernachlässigt werden kann.

Diese Beobachtung wendet Archimedes auf eine symmetrische Situation an, bei der eine Waage mit drei gleichen Gewichten G gegeben ist, von denen zwei am äußeren Rand und eines in der Mitte angebracht ist (siehe Abb. 1.3, links). Diese Situation ist symmetrisch und sollte im Gleichgewicht sein. Nun wendet er die obige Ersetzung von zwei Gewichten durch ein einzelnes, doppelt so schweres Gewicht auf die beiden Gewichte an, die sich an der linken Seite bzw. in der Mitte befinden (Abb. 1.3, rechts). Er gelangt so zu einem einfachen asymmetrischen Fall, bei dem sich auf der einen Seite das Gewicht $2G$, auf der anderen Seite das Gewicht G befindet, und die beiden Hebelarme das Verhältnis 1:2 haben.

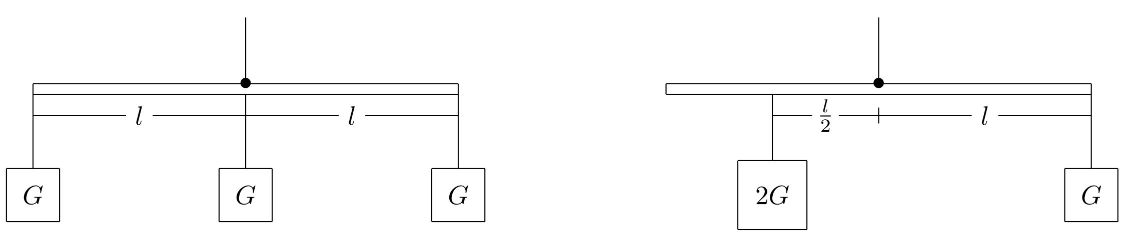

Abbildung 1.3: Werden bei dem symmetrischen Fall (links), bei dem die Waage im Gleichgewicht sein sollte, die beiden linken Gewichte durch ein doppelt so großes Gewicht in der Mitte ersetzt, erhalten wir ein einfaches Beispiel für den asymmetrischen Fall. Das Verhältnis der Gewichte ist 2:1, das der zugehörigen Hebelarme 1:2.

Man kann sich nun leicht symmetrische Situationen vorstellen, bei denen mehr als drei Gewichte im Gleichgewicht sind und die man durch eine entsprechende Ersetzung in den allgemeinen Hebelfall übertragen kann. Dies wird bei den Herleitungen von Galileo und Stevin verwendet und dort nochmals aufgegriffen (siehe Abschnitt 1.2). Auf eine allgemeine Diskussion der Annahmen, die Archimedes in seinen „Beweis“ hat einfließen lassen, kommen wir anschließend zu sprechen.

1.2 Die Ableitung von Galileo und Stevin

Galileo Galilei (1564–1641) und Simon Stevin (1548/49–1620) leiteten das Hebelgesetz aus einer ähnlichen Annahme wie Archimedes ab. Sie gehen davon aus, dass eine Massenverteilung einen Schwerpunkt hat, um den man die Massenverteilung auch beliebig drehen kann (siehe Abb. 1.4).

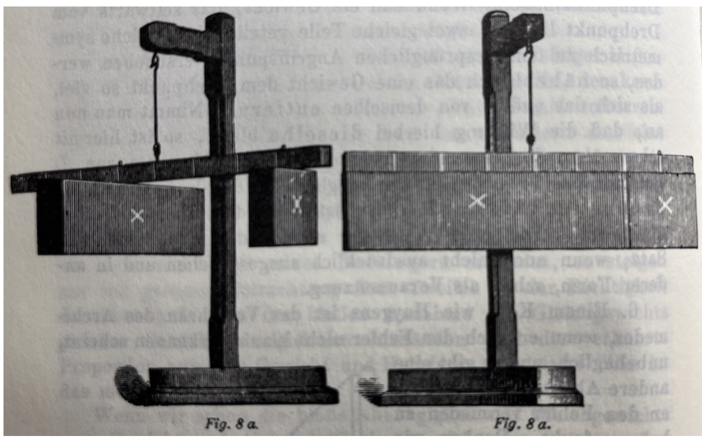

Abbildung 1.4: Die Beweise von Galileo und Stevin setzen die Existenz eines Schwerpunkts voraus, der sich nicht ändert, wenn man die Massenverteilung um diesen Schwerpunkt dreht. Im Bild wurde der symmetrische Fall (rechts) in zwei Teile aufgeteilt, die dann um ihren jeweiligen Schwerpunkt gedreht wurden (links). Man gelangt so zu einem asymmetrischen Fall. (aus [1])

Es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung des Beweises von Archimedes auf eine kontinuierliche Massenverteilung. Gegeben sei der symmetrische Fall einer Waage, bei der eine homogene Massenverteilung entlang einer Scheibe in der Mitte an einem Faden aufgehängt ist. Diese Masse wird in zwei unterschiedliche Massen aufgeteilt, indem sie senkrecht in zwei Teile unterteilt wird (Abb. 1.4, rechts). Nun wird für beide Teile der symmetrische Fall postuliert, d.h., es gibt in der Mitte beider Teile jeweils einen Aufhängepunkt, um den die Masse gedreht werden kann, ohne dass sich etwas ändert (Abb. 1.4, links). Man erhält so den allgemeinen Fall des Hebelgesetzes.

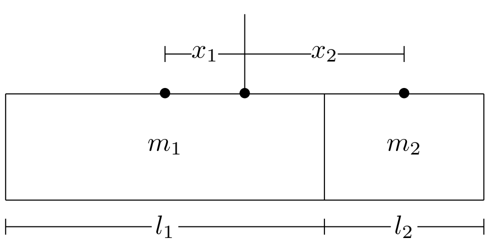

Abbildung 1.5: Die symmetrische Aufhängung eines homogenen Stabes des Masse m in zwei Teile der jeweiligen Massen m_1 und m_2 entspricht auch der Aufteilung der Gesamtlänge l in die Anteile l_1 und l_2 mit $l_1 + l_2 = l$. Die Hebellängen der Schwerpunkte sind x_1 bzw. x_2.

Die gesamte Hebellänge ist $l_1 + l_2$ und somit hat jeder Hebel die Länge $(l_1 + l_2)/2$. Damit ergeben sich aus Abb. 1.5 für die neuen Hebelarme x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = \frac{l_1 + l_2}{2} - \frac{l_1}{2} = \frac{l_2}{2} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{l_1 + l_2}{2} - \frac{l_2}{2} = \frac{l_1}{2}\,. \tag{1.1}$$

Die neuen Hebelarme $x_1 : x_2$ stehen also in dem Verhältnis $l_2 : l_1$. Und da die Massen m_1 und m_2 in demselben Verhältnis wie die Längen stehen, ergibt sich insgesamt $m_1 : m_2 = l_1 : l_2 = x_2 : x_1$ oder

$$m_1 \cdot x_1 = m_2 \cdot x_2\,. \tag{1.2}$$

Wir erhalten somit das allgemeine Hebelgesetz.

1.3 Die Existenz eines Schwerpunkts

Sowohl Archimedes als auch Galileo und Stevin setzen voraus, dass es zu einer Massenverteilung einen Punkt gibt, sodass man sich die gesamte Masse in diesem Punkt vereint denken kann, und dass sich statische Gleichgewichtsverhältnisse, wie sie bei einer Waage oder einem Hebel vorliegen, dadurch nicht ändern. Die wesentliche Annahme ist, dass dieser Punkt nur von der Verteilung der Massen selbst, nicht aber von der Umgebung und der Verteilung von Massen in der Umgebung abhängt, und dass sich auch an den Gleichgewichtsverhältnissen in der Umgebung nichts ändert, wenn Massenverteilungen durch eine einzelne Masse in ihrem Schwerpunkt ersetzt werden. In Abb. 1.2 wird diese Annahme bei Archimedes deutlich.

Wenn wir somit annehmen, dass es zu einer Massenverteilung einen Schwerpunkt gibt und dass wir uns die Gesamtmasse als punktförmig in diesem Schwerpunkt konzentriert denken dürfen, ohne dass sich in der Umgebung etwas ändert, dann sind die Argumente von Archimedes, Galileo und Stevin gültig und wir können den allgemeinen Fall des Hebelgesetzes aus dem speziellen symmetrischen Fall ableiten.

Dass eine solche Annahme nicht selbstverständlich ist, erkennen wir an einer ähnlichen physikalischen Situation, die sich aber auf eine andere Größe bezieht. Wenn wir zwei Massen in einem Abstand $2l$ haben, hat dieser Körper ein Trägheitsmoment $M = 2ml^2$ (genauer hat dieser Körper einen Trägheitstensor, von dem zwei Hauptträgheitsmomente den Wert $M = 2ml^2$ haben und ein Hauptträgheitsmoment näherungsweise null ist). Wir können uns hier die Masse nicht in den Mittelpunkt konzentriert denken und argumentieren, dass sich das Trägheitsmoment nicht geändert hat.

Wir können somit die Annahmen, die über den symmetrischen Fall hinausgehen, folgendermaßen zusammenfassen:

1. Zu jeder (starren) Massenverteilung gibt es einen Punkt, den Schwerpunkt, sodass eine Aufhängung in diesem Punkt die Massenverteilung im Gleichgewicht lässt.

2. Die Gesamtmasse (Summe aller Einzelmassen der Masseverteilung) steht mit der vorgegebenen Masseverteilung im Gleichgewicht.

3. Statt der vorgegebenen Masseverteilung kann man sich die Gesamtmasse im Schwerpunkt konzentriert denken, ohne dass sich an den Schwerpunkten einer allgemeineren Masseverteilung etwas ändert. Mit anderen Worten: Gibt es eine Massenverteilung $\{M = m_1 + m_2 + ... + m_n\}$ mit einem Schwerpunkt $\vec{S}$, und sei $\{\hat{m}_1 = m_1 + ... + m_k\}$ eine Teilmenge von M mit Schwerpunkt $\vec{s}_1$, dann können wir die Gesamtmasse der Teilmenge $\hat{m}_1$ in den Schwerpunkt $\vec{s}_1$ legen, ohne dass sich an $\vec{S}$ etwas ändert.

Die letzte Bedingung ist sehr einschränkend und gilt beispielsweise für Trägheitsmomente nicht. Die Ersetzung von Massenverteilungen durch eine Gesamtmasse im Schwerpunkt ist die Bedingung, die das Hebelgesetz als lineare Funktion des Hebelarms auszeichnet. Der Beweis, dass das übliche Hebelgesetz diese Eigenschaft besitzt, ist sehr einfach, hier für die Unterteilung einer Massenverteilung in zwei Teilmengen:

$$\vec{S} = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{x}_i\right) = \frac{1}{M}\left(\hat{m}_1 \cdot \frac{1}{\hat{m}_1}\sum_{i=1}^{k} m_i \vec{x}_i + \hat{m}_2 \cdot \frac{1}{\hat{m}_2}\sum_{i=k+1}^{n} m_i \vec{x}_i\right) \tag{1.3}$$

$$= \frac{1}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}\left(\hat{m}_1 \vec{s}_1 + \hat{m}_2 \vec{s}_2\right) \tag{1.4}$$

mit

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad \hat{m}_1 = \sum_{i=1}^{k} m_i \qquad \hat{m}_2 = \sum_{i=k+1}^{n} m_i \,. \tag{1.5}$$

1.4 Der „Beweis“ von Huygens

Christiaan Huygens (1629–1695) betrachtet eine Massenverteilung in der Ebene, die der Massenverteilung bei Galileo bzw. Stevin entspricht, nachdem dort die massiven Balken (Mach spricht immer von Prismen) gedreht wurden (Abb. 1.4, links), siehe Abb. 1.6 (links). Die Balken der Länge l_1 und l_2 haben eine konstante Massendichte und ihre Massen m_1 und m_2 stehen daher im selben Verhältnis wie die Längen: $m_1 : m_2 = l_1 : l_2$. Diese beiden Balken liegen parallel zueinander und senkrecht zu ihrer Verbindungslinie im Abstand x.

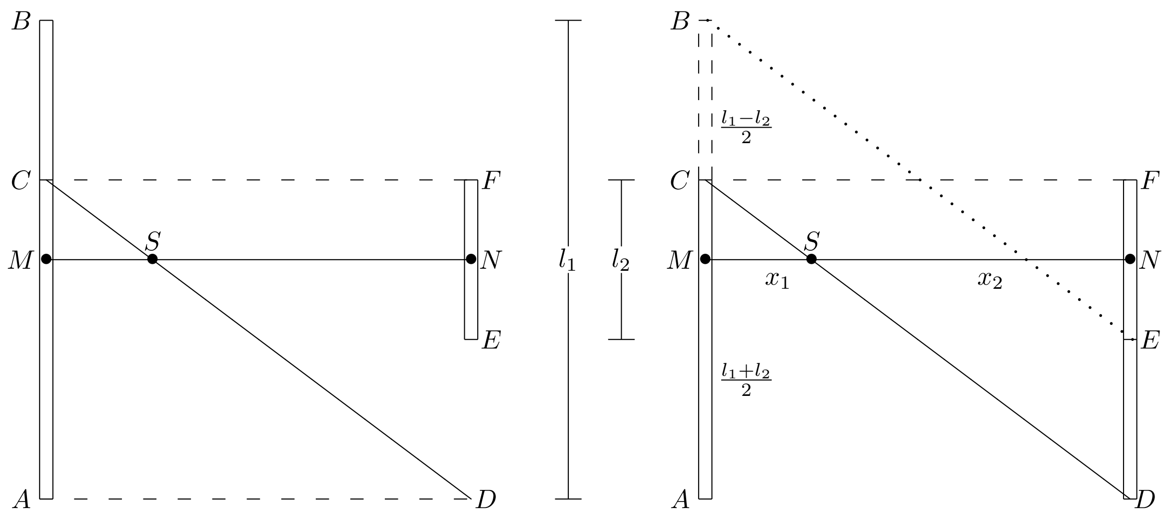

Abbildung 1.6: Der Beweis von Huygens für das allgemeine Hebelgesetz. (links) Huygens möchte beweisen, dass eine Masse m_1 proportional zu l_1 (einem massiven Stab AB der Länge l_1) im Gleichgewicht zu einer Masse m_2 ist (die durch einen massiven Stab EF der Länge l_2 mit derselben Längendichte wie Stab 1 gegeben ist), sofern der Gleichgewichtspunkt S den Abstand der Aufhängungen im Verhältnis $x_1 : x_2 = l_2 : l_1$ teilt. Er beweist dazu, dass nicht nur die symmetrische Linie MN sondern auch die Verbindungslinie CD eine Symmetrieachse ist. (rechts) Dafür verschiebt er in Gedanken den Teil CB des längeren Balkens entlang der Linie CD zu der Lage DE. Dies sollte das Gleichgewicht um die Achse CD nicht ändern. Die Massen liegen nun auf den Teilen AC und DF. Bei der neuen Massenverteilung liegt aber ein symmetrischer Fall um die Achse CD vor, daher sollte um diese Achse Gleichgewicht herrschen.

Huygens argumentiert nun folgendermaßen: Wenn es einen Schwerpunkt S gibt, muss dieser aus Symmetriegründen auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte liegen. Wenn die Massenanordnung in ihrem Schwerpunkt im Gleichgewicht ist, muss sie auch auf jeder Geraden durch den Schwerpunkt im Gleichgewicht sein. Wir können die (masselos gedachte) Ebene mit den beiden massiven Balken somit auf eine scharfe Kante durch den Schwerpunkt legen und die Anordnung sollte (im Idealfall) zu keiner der beiden Seiten dieser Kante kippen. Umgekehrt: Wenn man zwei Kanten findet, für die die Massenverteilung im Gleichgewicht ist, kann der Schwerpunkt der Massenverteilung nur der Schnittpunkt dieser beiden Kanten sein. Huygens behauptet nun, dass die Linie CD in Abb. 1.6

ebenfalls eine Symmetrielinie der Massenanordnung ist, so dass auf einer Kante entlang dieser Linie die Anordnung im Gleichgewicht ist.

Um zu beweisen, dass CD ebenfalls eine Symmetrielinie darstellt, verschiebt Huygens das Massestück CB, um das der längere der beiden Balken über den kürzeren Balken hinausragt, parallel entlang der Linie CD zu dem kürzeren Balken in die Position DE (siehe Abb. 1.6, rechts). Er erhält auf diese Weise zwei Balken gleicher Länge (die Balken AC und DF), die jeweils unter gleichem Winkel von der Verbindungslinie CD abstehen. Daher ist die Massenverteilung nun symmetrisch zu der Linie CD und sollte in Bezug auf diese Linie im Gleichgewicht sein. Andererseits sollte die Verschiebung einer Masse parallel zu einer Linie, sodass sich der Abstand der Masse von dieser Linie nicht ändert, an den Gleichgewichtsverhältnissen relativ zu dieser Linie nichts ändern.

Da Huygens nun zwei unabhängige Linien gefunden hat, um die die Massenverteilung im Gleichgewicht ist, kann ein möglicher Schwerpunkt nur der Schnittpunkt S dieser Linien sein. Dass die Lage dieses Schnittpunkts mit dem üblichen Hebelgesetz übereinstimmt, kann man leicht aus geometrischen Überlegungen ableiten: Die beiden Dreiecke CMS und DNS sind einander ähnlich, sodass sich die beiden Streckenabschnitte x_1 und x_2 wie die Abschnitte $MC = l_2/2$ und $ND = l_1/2$ verhalten. Also gilt $x_1 : x_2 = l_2 : l_1$ und damit auch $x_1 : x_2 = m_2 : m_1$, also das bekannte Hebelgesetz.

Mach behauptet nun, dass das zu Beweisende bei der Schlussfolgerung hineingesteckt wird. Die Verschiebung gesteht er Huygens zu, da hierbei keine Abstände von einer Gleichgewichtsachse verändert werden. Er argumentiert aber, dass der Schnittpunkt von zwei Achsen, um die Gleichgewicht herrscht, nur dann ein Schwerpunkt ist, wenn diese Achsen senkrecht aufeinander stehen, was im vorliegenden Beispiel nicht der Fall ist. Dazu bestimmt Mach einen Schwerpunkt bezüglich der x-Achse eines Koordinatensystems und einen Schwerpunkt bezüglich der y-Achse des Koordinatensystems und zeigt, dass diese beiden so bestimmten Schwerpunkte nur dann unter einer Drehung des Koordinatensystems invariant sind, wenn das allgemeine Hebelgesetz gilt.

Man kann daher auch sagen: Das allgemeine Hebelgesetz folgt aus dem symmetrischen Fall, sofern angenommen werden darf, dass es einen eindeutigen Schwerpunkt gibt und dass die Lage dieses Schwerpunkts nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. Aus der zweiten Annahme folgt somit, dass auch für jede Achse durch den Schwerpunkt Gleichgewicht herrscht und damit ist umgekehrt der Schluss zulässig, das der Schwerpunkt der Schnittpunkt von zwei linear unabhängigen Gleichgewichtsachsen sein muss.

Interessant an der Huygens'schen Argumentation ist, dass die Länge der Balken keine Rolle spielt, solange die Länge proportional zur Masse ist. Man kann die Balken also sehr kurz machen. Die Linie CD rückt dann zwar immer mehr an die symmetrische Verbindungslinie MN heran, aber sie behält ihren Schnittpunkt mit dieser Linie.

1.5 Der allgemeine schiefwinklige Hebel

Mach zeigt schließlich, dass das allgemeine Hebelgesetz, bei dem die Hebelarme nicht parallel zueinander liegen, aus dem oben angegebenen Hebelgesetz sowie einer verallgemeinerten Symmetrieannahme folgt.

Zunächst betrachtet Mach einen symmetrischen Fall, bei dem die Kräfte und die senkrecht zu den Kräften stehenden Hebelarme gleich sind und bei dem es eine Symmetrieachse bzw. Symmetrieebene gibt (siehe Abb. 1.7, links). Diese Situation beschreibt ein Gleichgewicht aus Symmetriegründen. Mach argumentiert weiterhin, dass die kreisförmige Umsetzung der Kräfte nur die beiden senkrechten Hebelarme der Länge l benötigt und die Kreisscheibe auf diese reduziert werden kann.

In einem zweiten Schritte betrachtet Mach eine allgemeine Situation (Abb. 1.7, mitte). Die beiden fest miteinander verbundenen Kreisscheiben (Mach spricht hier von einem Wellrad) haben

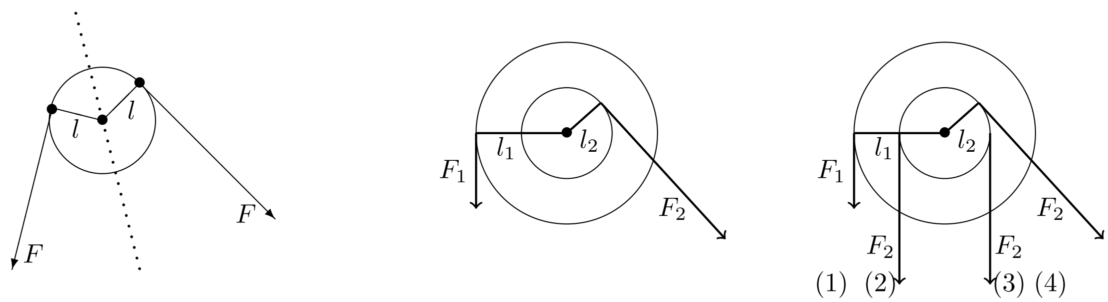

Abbildung 1.7: (links) Der schiefwinklige symmetrische Fall des Hebelgesetzes. Hier sind die senkrechten Hebelarme sowie die Kräfte gleich. Es gibt eine Symmetrieachse entlang der gestrichelten Linie. (mitte) Beim allgemeinen schiefwinkligen Fall sind die Kräfte und die senkrechten Hebelarme verschieden, aber das Produkt von beiden ist gleich. (rechts) Der allgemeine Fall lässt sich auf zwei spezielle Fälle zurückführen, indem man um einen symmetrischen Fall erweitert, bei dem zwei Kräfte F_2 bei (2) und (3) auf dem kleineren Rad hinzugefügt werden. Diese Situation lässt sich auch anders interpretieren: Die Kräfte (2) und (4) sind gleich, ebenso die Hebelarme, sodass diese beiden den symmetrischen Gleichgewichtsfall (links) darstellen. Außerdem bilden die Kräfte (1) und (3) sowie die zugehörigen Hebelarme einen linearen Hebel, sodass das allgemeine Hebelgesetz gilt.

unterschiedliche Radien l_1 und l_2 und die Kräfte F_1 und F_2 wirken in unterschiedliche Richtungen. Das allgemeine Hebelgesetz verlangt für das Gleichgewicht $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$. Er zeigt, dass man dieses Gesetz auf schon bekannte Gesetze zurückführen kann.

Dazu erweitert er die Situation um einen symmetrischen Fall: zwei Kräfte F_2, die an gegenüberliegenden Punkten des inneren Rads angreifen (die Kräfte (2) und (3)). Hier setzt Mach voraus, dass sich die beiden Situation addieren, d.h., dass die Erweiterung des ursprünglichen Systems um eine symmetrische Anordnung, die sich im Gleichgewicht befindet, das Gleichgewicht insgesamt nicht beeinflusst. Nun greifen an dem Wellrad vier Kräfte an. Mach unterteilt diese Situation in zwei Teilsituationen, von denen er ebenfalls annimmt, dass sie sich einfach überlagern: Die Kräfte (2) und (4) sind gleich und haben dieselben Hebelarmlängen. Sie bilden einen schiefwinkligen symmetrischen Fall, von dem angenommen wurde, dass er aus Symmetriegründen im Gleichgewicht ist. Die verbliebenen Kräfte (1) und (3) bilden einen linearen Hebel, von dem schon gezeigt wurde, dass hier im Gleichgewicht das Hebelgesetz $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ gilt. Da sich aber nach den Annahmen die Kräfte (1) und (3) sowie die Kräfte (2) und (4) jeweils im Gleichgewicht befinden, ist die gesamte Situation im Gleichgewicht und damit gilt auch das allgemeine schiefwinklige Hebelgesetz.

Literaturverzeichnis

[1] Mach, Ernst; *Die Mechanik in ihrer Entwicklung: historisch-kritisch dargestellt*; Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988; Nachdruck der 9. Aufl. von 1933, Leipzig.

Index

Archimedes, 4
    Beweis des Hebelgesetzes, 4

Galilei, Galileo, 5

Hebel, 3–9
    schiefwinkliger, 8
    symmetrischer, 8
    symmetrischer Fall, 3
Hebelgesetz, 3, 6
Huygens, Christiaan, 7

Mach, Ernst, 3

Prinzip vom hinreichenden Grund, 3

Schwerpunkt, 6
Stevin, Simon, 5

Waage, 3