# Physik des Klimas II
# Strahlungsgesetze

Physikdidaktik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

30.03.2024

**Professor Dr. Thomas Filk**

Weitere Kurztexte hier: https://physikdidaktik.uni-freiburg.de/kurztexte/

# Inhaltsverzeichnis

**1 Physik des Klimas II**
**Strahlungsgesetze** **3**

1.1 Verschiedene Strahlungsgesetze – Überblick . . . 3
1.2 Herleitung der Planck'schen Formel . . . 5
1.2.1 Die spektrale Dichte $n(\nu)$ . . . 5
1.2.2 Die mittlere Energie einer Frequenz $\nu$ bei einer Temperatur $T$ . . . 6
1.3 Vom Hohlkörper zur Abstrahlung . . . 7
1.4 Das Wien'sche Verschiebungsgesetz . . . 8
1.5 Das Stefan-Boltzmann-Gesetz . . . 8
1.6 Weshalb $T^4$? . . . 9

# Kapitel 1

# Physik des Klimas II Strahlungsgesetze

***Autor: Thomas Filk, Version vom: 30.03.2024***

In die Klimamodelle der Erde gehen verschiedene Strahlungsgesetze ein: das Stefan-Boltzmann-Gesetz, das Wien'sche Verschiebungsgesetz und das Planck'sche Strahlungsgesetz, aus dem sich die ersten beiden Gesetze ableiten lassen. Man findet jedoch unterschiedliche Versionen des Planck'schen Strahlungsgesetzes: Zum einen wird das Gesetz gelegentlich als Funktion der Strahlungsfrequenz oder auch als Funktion der Wellenlänge ausgedrückt, was zu unterschiedlichen Vorfaktoren führt. Zum anderen sollte man aber auch zwischen dem Strahlungsgesetz in Form einer Energiedichte in einem Hohlkörper und in Form einer Flussdichte, die von einem Schwarzen Körper abgestrahlt wird, unterscheiden.

Der erste Abschnitt gibt einen Überblick über diese Strahlungsgesetze. Die weiteren Abschnitte enthalten Details zu ihrer Ableitung und können übersprungen werden. Im zweiten Abschnitt wird das Planck'sche Strahlungsgesetz zunächst in Form einer Energiedichte für einen Hohlkörper abgeleitet und dann auf die anderen Formen verallgemeinert. Schließlich werden das Wien'sche Verschiebungsgesetz und das Stefan-Boltzmann-Gesetz abgeleitet.

## 1.1 Verschiedene Strahlungsgesetze – Überblick

Das Planck'sche Strahlungsgesetz in der Form, wie es in Abschnitt 1.2 abgeleitet wird, lautet:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1} \,. \tag{1.1}$$

Hierbei ist $u(\nu,T)$ der Anteil der Energiedichte (also Energie/Volumen) in einem Hohlkörper bei der absoluten Temperatur $T$, der auf die elektromagnetische Strahlung in diesem Hohlkörper mit der Frequenz $\nu$ entfällt. $c$ ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, $h$ die Planck'sche Konstante und $k_\mathrm{B}$ die Boltzmann-Konstante. Man spricht auch manchmal von spektraler, d.h. nach der Frequenz oder Wellenlänge aufgeteilter Energiedichte. Von den Wänden des Hohlkörpers wird angenommen, dass sie alle Frequenzen elektromagnetischer Strahlung absorbieren bzw. emittieren können und dass sie sich im thermischen Gleichgewicht mit der Strahlung im Inneren befinden.

Bei der spektralen Energiedichte sollte man betonen, dass es sich auch bezüglich der Frequenz um eine Dichte bzw. Verteilung (Distribution) handelt, d.h., erst das Integral über ein Frequenzintervall liefert eine interpretierbare Größe. Insbesondere ist $\int_0^\nu u(\nu',T)\,\mathrm{d}\nu'$ der Anteil der Energiedichte, der auf die Frequenzen zwischen 0 und $\nu$ entfällt.

Oft findet man diese Formel auch als Funktion der Wellenlänge $\lambda = c/\nu$. Hierbei ist zu beachten, dass man in Gl. 1.1 nicht nur $\nu$ entsprechend durch $\lambda$ ersetzen muss, sondern es muss auch, da es sich bei $u(\nu,T)$ um eine Dichte handelt, das Integrationsmaß $\mathrm{d}\nu$ transformiert werden:

$$\mathrm{d}\nu = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda = -\frac{c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda\,. \tag{1.2}$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\tilde{u}(\lambda,T) = \frac{8\pi}{\lambda^5}\frac{hc}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B}T}\right)-1}\,. \tag{1.3}$$

Bei $u(\nu,T)$ und $\tilde{u}(\lambda,T)$ handelt es sich um spektrale Energiedichten, die man beispielsweise mit einer Sonde im Inneren eines Hohlkörpers messen kann. In vielen Fällen ist man aber an der Abstrahlung eines Schwarzkörpers interessiert. Dazu stellt man sich vor, die Wände des Hohlkörpers würden plötzlich weggenommen. Dann breitet sich für einen kurzen Moment die Energie mit Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen, d.h. einen vollen Raumwinkel $4\pi$ aus. Die abgestrahlte Energie pro Fläche, Zeit und Raumwinkel, d.h. die spektrale Strahldichte $L(\nu,T)$, erhält man somit, indem man Gl. 1.1 mit $c/4\pi$ multipliziert:

$$L(\nu,T) = \frac{2}{c^2}\frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1}\,. \tag{1.4}$$

Das Wien'sche Verschiebungsgesetz macht eine Aussage über die Frequenz $\nu_\mathrm{max}(T)$ bzw. Wellenlänge $\lambda_\mathrm{max}(T)$, bei der die Intensität der Energiedichte bzw. Strahldichte am größten ist. Die Frequenz nimmt dabei linear mit der Temperatur $T$ zu und die Wellenlänge nimmt invers mit der Temperatur ab:

$$\nu_\mathrm{max}(T) = 5{,}8789\cdot 10^{10}\cdot T\,\frac{1}{\mathrm{Ks}} \qquad \text{und} \qquad \lambda_\mathrm{max}(T) = \frac{2{,}8978\cdot 10^{-3}}{T}\cdot \mathrm{Km}\,. \tag{1.5}$$

Für eine effektive Oberflächentemperatur von 5 772 K, wie sie für die Sonne angegeben wird [1], folgt:

$$\nu_\mathrm{max} = 3{,}4\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz} \qquad \text{und} \qquad \lambda_\mathrm{max} = 500\,\mathrm{nm}\,. \tag{1.6}$$

Dies entspricht sichtbarem Licht im grün-blauen Bereich. Für die Erde mit einer Durchschnittstemperatur von 297 K ergibt sich:

$$\nu_\mathrm{max} = 17{,}5\cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz} \qquad \text{und} \qquad \lambda_\mathrm{max} = 9{,}72\,\mu\mathrm{m}\,. \tag{1.7}$$

Diese Strahlung liegt im infraroten Bereich.

Schließlich benötigen wir in der Klimaphysik noch das Stefan-Boltzmann-Gesetz. Es gibt die Gesamtintensität der Strahlung an, also das Integral der spektralen Strahldichte über alle Frequenzen und Richtungen, multipliziert mit der abstrahlenden Fläche $A$. Man erhält dann

$$I(T) = A\int L(\nu,T)\cos\theta\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\Omega = \sigma A T^4 \qquad \text{mit} \qquad \sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}\,. \tag{1.8}$$

Der Faktor $\cos\theta$ gibt die Strahlintensität in eine Richtung $\theta$ zur Normalen an und wird in Abschnitt 1.3 näher begründet. Die Konstante $\sigma$ bezeichnet man als Stefan-Boltzmann-Konstante.

In den folgenden Abschnitten werden diese Formeln hergeleitet.

## 1.2 Herleitung der Planck'schen Formel

Bestimmt werden soll die spektrale Verteilungsfunktion

$$u(\nu,T) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}E(\nu,T)}{\mathrm{d}\nu}\,, \tag{1.9}$$

wobei $E(\nu,T)$ die Gesamtenergie der elektromagnetischen Strahlung des Systems ist, die bei einer absoluten Temperatur $T$ auf Frequenzen kleiner oder gleich $\nu$ entfällt. $V$ ist das Volumen des Systems, man ist also an einer Energiedichte interessiert. Man kann die Gleichung auch in folgender Form schreiben, die eine andere Sichtweise erlaubt:

$$\frac{1}{V}\mathrm{d}E(\nu,T) = u(\nu,T)\mathrm{d}\nu \tag{1.10}$$

$\mathrm{d}E(\nu,T)$ ist der Anteil der Energie, der bei einer Temperatur $T$ von den Moden im Bereich $[\nu,\nu+\mathrm{d}\nu]$ herrührt.

Die Verteilungsfunktion $u(\nu,T)$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: (1) der spektralen Dichte $n(\nu)$ der thermodynamischen Freiheitsgrade mit einer Frequenz $\nu$ und (2) der mittleren Energie $\langle\epsilon(\nu,T)\rangle$, die ein gegebener Freiheitsgrad mit der Frequenz $\nu$ bei einer Temperatur $T$ hat. Das Ergebnis ist dann

$$u(\nu,T) = \frac{n(\nu)}{V}\langle\epsilon(\nu,T)\rangle\,, \tag{1.11}$$

also das Produkt aus der Anzahl der Zustände zu einer gegebenen Frequenz $\nu$ und der mittleren Energie eines Zustands mit dieser Frequenz.

### 1.2.1 Die spektrale Dichte $n(\nu)$

Zur Bestimmung der spektralen Dichte $n(\nu)$ der Eigenzustände zu einer Frequenz $\nu$ definiert man zunächst die kumulative Spektralverteilung

$$N(\nu) = \sum_{\nu_i\leq\nu} 1\,. \tag{1.12}$$

$N(\nu)$ ist also gleich der Anzahl der Moden, deren Frequenz $\nu_i$ kleiner oder gleich $\nu$ ist. Die spektrale Dichte ist dann definiert als die Ableitung dieser Funktion:

$$n(\nu) = \frac{\mathrm{d}N(\nu)}{\mathrm{d}\nu}\,. \tag{1.13}$$

Da es sich bei $N(\nu)$ streng genommen um eine Stufenfunktion handelt, ist diese Ableitung eigentlich im distributiven Sinne zu verstehen, doch da $N(\nu)$ in führender Ordnung glatt ist (also keine Stufen hat), können wir den distributiven Charakter vernachlässigen. Diese Dichte ist unabhängig von der Temperatur und ergibt sich aus einem einfachen Abzählen der möglichen Schwingungsmoden:

$$\frac{n(\nu)}{V} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,. \tag{1.14}$$

Zur Herleitung dieser Formel bestimmen wir zunächst $N(\nu)$. Die Frequenz $\nu$ hängt mit den Wellenzahlen über $\nu = c\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^3}/2\pi$ zusammen. Wir müssen also abzählen, wie viele Moden $(k_1,k_2,k_3)$ es gibt, sodass

$$\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^3} \leq 2\pi\nu/c \tag{1.15}$$

gilt.

Zur Lösung dieses Problems betrachten wir einen kubischen Kasten der Kantenlänge $L$ und damit dem Volumen $V = L^3$. Die möglichen Wellenlängen in jede der drei Richtungen sind durch $\lambda = 2L/n$ gegeben: In jede Richtung muss ein Vielfaches einer halben Wellenlänge passen. Für die möglichen Zustände im $\vec{k}$-Raum ergibt sich damit $\vec{k} = \frac{\pi}{L}(n_1,n_2,n_3)$ mit beliebigen natürlichen Zahlen $n_i$. Jedem Zustand im $\vec{k}$-Raum kann man daher ein Volumen $|\Delta k|^3 = \pi^3/V$ zuschreiben. Eine Kugel vom Radius $k = |\vec{k}|$ hat ein Volumen von $\frac{4\pi}{3}k^3$ und enthält somit

$$V_{\text{Kugel}}/|\Delta k|^3 = \frac{4\pi k^3}{3|\Delta k|^3} = V\frac{4}{3\pi^2}k^3 \tag{1.16}$$

Zustände. Da aber nur der Teil der Kugelschale von Interesse ist, der sich im positiven Quadranten befindet (die $n_i$ sind nie negativ), müssen wir noch durch 8 dividieren; andererseits kann jeder Zustand wegen der beiden Polarisationsmöglichkeiten zweimal auftreten, sodass die Anzahl der Zustände durch $\tilde{g}(k) = \frac{V}{3\pi^2}k^3$ gegeben ist. Mit $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c}$ erhalten wir schließlich

$$N(\nu) = V\frac{8\pi\nu^3}{3c^3}\,. \tag{1.17}$$

Für die gesuchte Dichte ergibt sich damit:

$$n(\nu) = \frac{\mathrm{d}N(\nu)}{\mathrm{d}\nu} = V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,. \tag{1.18}$$

### 1.2.2 Die mittlere Energie einer Frequenz $\nu$ bei einer Temperatur $T$

In diesem Abschnitt bestimmen wir die mittlere Energie $\langle\epsilon(\nu,T)\rangle$, die ein gegebener Schwingungsmod mit der Frequenz $\nu$ bei einer Temperatur $T$ hat. Jede Mode zu $\nu$ kann mit $n$ Photonen mit einer Gesamtenergie von $E_n(\nu) = nh\nu$ besetzt sein, und die Wahrscheinlichkeit einer solchen Besetzung ist proportional zum Boltzmann-Faktor $\exp(-E_n(\nu)/k_{\mathrm{B}}T) = \exp(-nh\nu/k_{\mathrm{B}}T)$. Als Mittelwert für die Energie zu einer solchen Mode erhalten wir somit:

$$\langle\epsilon(\nu,T)\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}(nh\nu)\exp\left(-\frac{nh\nu}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \qquad \text{mit} \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{nh\nu}{k_{\mathrm{B}}T}\right) \tag{1.19}$$

Hier bietet sich ein kleiner Trick an: Mit

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta nh\nu} \qquad\qquad \beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{1.20}$$

folgt

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty}(nh\nu)\mathrm{e}^{-\beta nh\nu} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z\,. \tag{1.21}$$

$Z$ ist aber eine geometrische Reihe, für die gilt:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta nh\nu} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta h\nu}} = \frac{\mathrm{e}^{\beta h\nu}}{\mathrm{e}^{\beta h\nu}-1}\,. \tag{1.22}$$

Damit folgt:

$$\langle\epsilon\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(\beta h\nu - \ln\left(\mathrm{e}^{\beta h\nu}-1\right)\Big) = -h\nu + \frac{h\nu\ \mathrm{e}^{\beta h\nu}}{\left(\mathrm{e}^{\beta h\nu}-1\right)} \tag{1.23}$$

oder

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{h\nu}{\left(\mathrm{e}^{\beta h\nu}-1\right)} \tag{1.24}$$

Die mittlere Energie pro Frequenz $\nu$ in einem Gas von Photonen ist somit

$$\langle\epsilon(\nu,T)\rangle = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1} \tag{1.25}$$

Als Ergebnis dieser Überlegungen erhalten wir die Planck'sche Formel:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1} \tag{1.26}$$

## 1.3 Vom Hohlkörper zur Abstrahlung

Es gibt sehr viele Formen von Strahlungsgesetzen, die sich oftmals nur in Details, Faktoren $\pi$ oder $2\pi$, oder $c$ etc. unterscheiden. Wir beginnen mit einer Einteilung in verschiedene Gruppen.

Aus der Mechanik ist die Energie bekannt. Ihr Einheit ist das Joule (J). Betrachtet man Prozesse, bei denen Energie umgewandelt wird, interessiert meist die Leistung

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}\,. \tag{1.27}$$

Hierbei ist $\Delta E$ die Menge an Energie, die in einer bestimmten Zeitdauer $\Delta t$ umgewandelt, abgestrahlt oder transportiert wurde. Dabei kann es sich beispielsweise um die Umwandlung von elektrischer Energie in mechanische Energie bei einer Maschine oder um die Umwandlung von elektrischer Energie in Wärme bzw. Strahlung bei einer Glühbirne handeln. Beispiele für einen Energietransport sind die Übertragung von Energie von einem warmen zu einem kalten Gegenstand in Form von Wärme oder die Strahlung von der Sonne. Die Einheit der Leistung ist das Watt (W=J/s) bzw. Joule durch Sekunde.

Von beiden Größen kann man auch (räumliche) Dichten betrachten: die Energiedichte (Energie pro Volumen) oder auch eine Leistungsdichte. Oft hat man es dabei auch mit einem Energiefluss zu tun, d.h. der Menge an Energie, die pro Zeiteinheit durch eine vorgegebene Fläche tritt. Ihre Einheit ist Energie pro Zeiteinheit pro Flächeneinheit oder auch Leistung pro Flächeneinheit. Eine solche Größe bezeichnet man auch als Intensität. Eine Intensität erhält man ebenfalls, wenn man eine Energiedichte mit einer Geschwindigkeit multipliziert. Es handelt sich in diesem Fall also um einen Energiedichtestrom.

Bei elektromagnetischer Strahlung kommt zu den genannten Begriffen noch die Abhängigkeit der Energie von der Frequenz bzw. der Wellenlänge hinzu. Man verwendet in diesem Fall das Adjektiv „spektral“. Eine spektrale Energiedichte ist eine Energiedichte, die einer bestimmten Frequenz (bzw. einem kleinen Frequenzintervall $[\nu,\nu + \mathrm{d}\nu]$) oder auch einer bestimmten Wellenlänge (bzw. einem kleinen Wellenlängenintervall $[\lambda,\lambda + \mathrm{d}\lambda]$) zugeordnet werden kann.

Und schließlich kann man bei der Strahlung noch eine Richtungsabhängigkeit berücksichtigen. Die meisten Flächen strahlen selbst bei einer diffusen Strahlung in bestimmte Richtungen intensiver ab als in andere, insbesondere gibt es auch bei diffuser Strahlung (sogenannter Lambert-Strahlung) eine Abhängigkeit vom Winkel $\theta$ relativ zur Flächennormalen, die durch $\cos\theta$ gegeben ist und die Projektion der abstrahlenden Fläche auf die Richtung der Strahlung berücksichtigt.

Bei dem Strahlungsgesetz Gl. 1.4 handelt es sich um eine solche spektrale Strahlungsdichte, bei der ein Flächenelement $\mathrm{d}A$ in einer Richtung $\theta$ relativ zu Flächennormalen eine Intensität proportional zu $\mathrm{d}A\cos\theta$ abstrahlt. Dies wird beim Stefan-Boltzmann-Gesetz relevant.

## 1.4 Das Wien'sche Verschiebungsgesetz

Ausgehend von der Planck'schen Strahlungsformel leiten wir nun das Wien'sche Verschiebungsgesetz ab. Dazu bestimmen wir das Maximum der Verteilung $u(\nu,T)$ bezüglich der Frequenz:

$$\frac{\mathrm{d}u(\nu,T)}{\mathrm{d}\nu} = \frac{8\pi}{c^3}\frac{3h\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1} - \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1\right)^2}\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)\frac{h}{k_\mathrm{B}T} = 0\,. \tag{1.28}$$

Daraus erhalten wir:

$$3\left(\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1\right) = \frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)\,. \tag{1.29}$$

Zu lösen ist somit die Gleichung:

$$(3-x)\mathrm{e}^x = 3 \tag{1.30}$$

mit

$$x = \frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\,. \tag{1.31}$$

Eine Lösung ist offensichtlich $x = 0$, eine zweite Lösung muss man nummerisch finden. Sie liegt bei $x_3 = 2{,}82143937$. Für die Frequenz folgt damit:

$$\nu_\mathrm{max} = \frac{x_3 k_\mathrm{B}}{h}T = \frac{x_3\cdot 1{,}38065\cdot 10^{-23}}{6{,}62607\cdot 10^{-34}}\cdot T\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{Js}} \approx 5{,}87893\cdot 10^{10}\cdot T\,\frac{1}{\mathrm{Ks}} \tag{1.32}$$

Dies ist das Wien'sche Verschiebungsgesetz für die Frequenz und entspricht Gl. 1.5 (links).

Wir wiederholen nun die gleiche Rechnung für $\tilde{u}(\lambda,T)$. Wegen des zusätzlichen Faktors vom Integrationsmaß erhält man die Lösung nicht einfach aus der Lösung von $\nu$. Wir bilden die Ableitung von $\tilde{u}(\lambda,T)$ nach $\lambda$ und erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(\lambda,T)}{\mathrm{d}\lambda} = -5\frac{8\pi}{\lambda^6}\frac{hc}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B}T}\right)-1} + \frac{8\pi}{\lambda^5}\frac{hc}{\left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B}T}\right)-1\right)^2}\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B}T}\right)\frac{hc}{\lambda^2 k_\mathrm{B}T} = 0\,. \tag{1.33}$$

Dies führt auf:

$$5\left(\exp\left(\frac{h}{\lambda k_\mathrm{B}T}\right)-1\right) = \frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B}T}\exp\left(\frac{h}{\lambda k_\mathrm{B}T}\right)\,, \tag{1.34}$$

und somit auf die Gleichung

$$(5-x)\mathrm{e}^x = 5 \tag{1.35}$$

mit

$$x = \frac{hc}{\lambda k_\mathrm{B}T}\,. \tag{1.36}$$

Neben der Lösung $x = 0$ gibt es nun die Lösung $x_5 = 4{,}96511423$. Für die Wellenlänge zur maximalen Intensität folgt damit Gl. 1.5 (rechts):

$$\lambda_\mathrm{max} = \frac{hc}{x_5 k_\mathrm{B}}\frac{1}{T} = \frac{6{,}62607\cdot 10^{-34}\cdot 2{,}99792458\cdot 10^{8}}{x_5\cdot 1{,}38065\cdot 10^{-23}}\cdot\frac{1}{T}\,\frac{\mathrm{Jsm}}{\mathrm{Js/K}} \approx 2{,}89777\cdot 10^{-3}\cdot\frac{1}{T}\,\mathrm{Km} \tag{1.37}$$

## 1.5 Das Stefan-Boltzmann-Gesetz

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz gibt uns eine Beziehung zwischen der Temperatur eines Strahlers und der Gesamtenergie bzw. Gesamtintensität (also Energie pro Zeiteinheit und Fläche) der abgestrahlten Leistung. Dazu betrachten wir ein Flächenelement $\mathrm{d}A$ auf der Oberfläche des Strahlers und integrieren über die Hemisphäre, in welche dieses Flächenelement abstrahlt. Außerdem integrieren wir Gl. 1.4 über die Frequenz. Damit ergibt sich für die Intensität der Strahlung, die von d$A$ abgestrahlt wird:

$$I = \int_0^\infty L(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu\,\cos\theta\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\Omega = \frac{2}{c^2}\mathrm{d}A\int_0^\infty \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1}\mathrm{d}\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,. \tag{1.38}$$

Die Integration über $\theta$ erfolgt nur über eine Halbkugel, also nur von $\theta = 0$ (Normalenrichtung zur Fläche d$A$) bis $\pi/2$. Für die Winkelintegration ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \int_0^1\cos\theta\,\mathrm{d}(\cos\theta)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi\,. \tag{1.39}$$

Wir führen eine neue Integrationsvariable $x = \frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}$ ein und erhalten mit $\mathrm{d}x = \frac{h}{k_\mathrm{B}T}\mathrm{d}\nu$ die Beziehung:

$$I = \frac{2\pi(k_\mathrm{B}T)^3}{h^2c^2}\mathrm{d}A\int_0^\infty\frac{h^3\nu^3}{(k_\mathrm{B}T)^3\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)-1}\,\frac{k_\mathrm{B}T}{h}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi k_\mathrm{B}^4}{h^3c^2}T^4\,\mathrm{d}A\int_0^\infty\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.40}$$

Das Integral ist bekannt und hat den Wert:

$$\int_0^\infty\frac{x^3}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}\,. \tag{1.41}$$

Damit folgt für die Intensität, die von einer Fläche $A$ eines schwarzen Strahlers abgestrahlt wird:

$$I = \sigma\,A\,T^4 \qquad \text{mit} \qquad \sigma = \frac{2k_\mathrm{B}^4\pi^4}{15h^3c^2}\,. \tag{1.42}$$

Die Konstante $\sigma$, die sogenannte Stefan-Boltzmann-Konstante, hat in den neuen SI-Einheiten, in denen die Planck'sche Konstante, die Boltzmann-Konstante und die Lichtgeschwindigkeit fest definierte Werte haben, den Wert $\sigma = 5{,}670\,374\,419... \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2K^4)}$.

Für die Abstrahlung der Sonne ist die abstrahlende Fläche $A = 4\pi R_\odot^2$ (mit dem Sonnenradius $R_\odot = 695\,700\,\mathrm{km} \approx 7\cdot 10^8\,\mathrm{m}$ [1]). Andererseits kennen wir die Intensität der Sonnenstrahlung bei der Erde – dies ist die Solarkonstante $S = 1361\,\mathrm{J\cdot s^{-1}\cdot m^{-2}}$. Aus dem Abstand Sonne-Erde $R = 1{,}496\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ können wir somit die effektive Oberflächentemperatur der Sonne bestimmen:

$$T^4 = \frac{4\pi R^2}{4\pi R_\odot^2}\frac{S}{\sigma} = \frac{R^2}{R_\odot^2}\frac{S}{\sigma} = \frac{1{,}496^2\cdot 10^{22}}{6{,}957^2\cdot 10^{16}}\,\frac{1361}{5{,}67\cdot 10^{-8}}\,\frac{\mathrm{J\cdot s\cdot m^2\cdot K^4}}{\mathrm{m^2\cdot s\cdot J}} \approx 1110\cdot 10^{12}\,\mathrm{K^4} \tag{1.43}$$

oder

$$T = 5772\,\mathrm{K}\,. \tag{1.44}$$

Auf diese Weise hat Josef Stefan (1835–1893) um 1890 zum ersten Mal einen vergleichsweise genauen Wert für die Oberflächentemperatur der Sonne erhalten. Die Hauptunsicherheit war der Wert der Solarkonstanten, denn das Verhältnis $R/R_\odot$ verlangt nur den scheinbaren Sonnendurchmesser (als Öffnungswinkel). Die Stefan-Boltzmann-Konstante war zwar ebenfalls nicht genau bekannt, aber Stefan verglich die Strahlungsintensität eines bekannten Objekts bei einer bekannten Temperatur unter vergleichbarem Raumwinkel mit der Intensität der Sonne. Er berechnete so einen Wert von ungefähr 5700 K, was dem tatsächlichen Wert recht nahe kommt.

## 1.6 Weshalb $T^4$?

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz spielt eine wesentliche Rolle in der Klimaphysik. Andererseits ist die Abhängigkeit der abgestrahlten Intensität eines Schwarzkörpers von der 4. Potenz von $T$ sehr ungewöhnlich. Daher soll hier versucht werden, diese Abhängigkeit zu „veranschaulichen".

Es gibt eine Herleitung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes im Rahmen der Thermodynamik. Diese setzt aber bestimmte Beziehungen für den Strahlungsdruck voraus, die in der Schule meist nicht bekannt sind. Vor diesem Hintergrund soll die hier gegebene Ableitung nochmals auf ihre wesentlichen Anteile „runtergebrochen“ werden.

Die Anzahl der Moden $N(\nu)$ mit einer Frequenz, die kleiner ist als ein vorgegebenes $\nu$, verhält sich wie das Volumen einer dreidimensionalen Kugel: $N(\nu) \propto \nu^3$. Dies lässt sich grob aus Gl. 1.15 verstehen: Zu jeder Dimension ist die Anzahl der Moden mit einer Frequenz kleiner als $\nu$ proportional zu $\nu$ und damit ist in drei Dimensionen die Anzahl der Moden mit einer Frequenz kleiner als $\nu$ proportional zu $\nu^3$.

Jede Mode zu einer Frequenz $\nu$ hat eine Energie $h\nu$. Das bedeutet, die Gesamtenergie aller Moden mit einer Frequenz kleiner als $\nu$ ist proportional zu $\nu^4$. Nun gilt „sehr grob“ folgende Regel: Alle Frequenzen $\nu$, deren zugehörige Energie $h\nu$ kleiner ist als die thermische Energie $k_\mathrm{B}T$, tragen zur abgestrahlten Intensität bei, wohingegen alle Frequenzen $\nu$ mit einer Energie $h\nu > k_\mathrm{B}T$ nicht mehr beitragen. Das erklärt die Abhängigkeit der Intensität von $T^4$.

# Literaturverzeichnis


[1] NASA Sun Fact Sheet; Williams, D.R.; https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html

# Index

Boltzmann-Faktor, 6

effektive Oberflächentemperatur
    Sonne, 9

Intensitäat, 7

Lambert-Strahlung, 7
Leistung, 7

Planck'sche Strahlungsformel, 7
Planck'sches Gesetz, 3
Planck'sches Strahlungsgesetz, 4

Solarkonstante, 9
Sonne
    effektive Oberflächentemperatur, 9
spektrale Verteilung, 7
Stefan, Josef, 9
Stefan-Boltzmann-Gesetz, 4, 8
Stefan-Boltzmann-Konstante, 4, 9
Strahlungsgesetze, 3–10
    Planck, 3
    Stefan-Boltzmann, 8
    Stefan-Boltzmann-Gesetz, 4
    Wien, 8

Wien'sches Verschiebungsgesetz, 4, 8