EPR – Bell – CHSH

Physikdidaktik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

31.03.2024

Professor Dr. Thomas Filk

Weitere Kurztexte hier: https://physikdidaktik.uni-freiburg.de/kurztexte/

universität freiburg

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

EPR – Bell – CHSH

Autor: Thomas Filk, Version vom: 31.03.2024

Im Jahre 1935 veröffentlichten Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen einen Artikel *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* [7] Dieser Artikel machte die ungewöhnlichen und überraschenden Folgerungen aus der Existenz verschränkter Zustände in der Quantentheorie besonders deutlich und er ist immer noch Gegenstand von Grundsatzdiskussionen zur Quantentheorie. Der Angriff der drei Autoren – kurz EPR genannt – galt der Behauptung, die Quantenmechanik sei vollständig und würde allen Freiheitsgraden Rechnung tragen, die physikalisch von Bedeutung und sinnvoll sind. In ihrer Arbeit kamen sie zu dem Schluss, dass es gewisse „Elemente der Realität“ geben müsse, die von der Quantenmechanik nicht beschrieben werden. Daher sei diese nicht vollständig.

John Bell griff 1964 die Ideen von EPR auf und entwickelte Kriteria, wie man entscheiden könne, ob es diese Elemente der Realität wirklich gibt [3]. Diese Kriterien wurde von John F. Clauser et al. weiterentwickelt zu den sogenannten CHSH-Ungleichungen [6], deren Verletzung in der Quantentheorie 1982 durch Alain Aspect zweifelsfrei nachgewiesen werden konnte [1]. Die notwendige Schlussfolgerung aus diesen Experimenten ist, dass die Quantentheorie in einem gewissen Sinn eine nicht-lokale Theorie ist.

1.1 EPR und Quantenkorrelationen

EPR haben ursprünglich ihr scheinbares Paradoxon anhand eines Zweiteilchensystems beschrieben, bei dem die Orts- und Impulsvariablen der einzelnen Teilchen verschränkt sind. Das Zweiteilchensystem wird durch einen Zustand beschrieben, bei dem der Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2$ und die Relativkoordinate $\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2$ festliegen. Dies ist kein Widerspruch, da diese beiden Größen miteinander kommutieren. Ich beschreibe hier das Paradoxon anhand der Spinfreiheitsgrade von zwei Elektronen. Diese Version geht auf David Bohm zurück und vermeidet die formalen Schwierigkeiten im Zusammenhang mit den Eigenfunktionen zum Ort bzw. Impuls, die nichts mit dem eigentlichen Problem zu tun haben. Statt der Spinfreiheitsgrade kann man ebenso gut auch die Polarisationsfreiheitsgrade von Photonen betrachten.

1.1.1 Der EPR-Zustand

Gegeben seien zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in dem Zustand, bei dem der Gesamtdrehimpuls $S = S_1 + S_2$ verschwindet. Der Vektor zu diesem sogenannten EPR-Zustand hat die Form:

$$|\Psi_{\mathrm{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2\right) \tag{1.1}$$

Die Indizes 1 und 2 beziehen sich dabei auf Teilchen 1 und Teilchen 2. Diese beiden Teilchen können unterscheidbar sein, entweder, weil sie einen großen Abstand voneinander haben und der Ort die Teilchen identifiziert, oder weil es sich um verschiedene Teilchenarten handelt − EPR setzen nicht voraus, dass die verschränkten Systeme ununterscheidbar sind. Die Symbole ↑ und ↓ in den Ket-Klammern bezeichnen die beiden möglichen Polarisationen des Spins bezüglich einer vorgegebenen Richtung, beispielsweise der z-Richtung. Allerdings ist der Zustand invariant unter beliebigen Drehungen (es handelt sich um den rotationssymmetrischen Zustand mit Gesamtdrehimpuls $S = 0$), die Antikorrelation gilt also bezüglich jeder Richtung (Herleitung 1).

Dieser Zustandsvektor ist verschränkt, d.h., es gibt keine Basis, in der dieser Zustand faktorisiert. Keinem der beiden Teilchen kann ein wohldefinierter Spinzustand zugesprochen werden. Bildet man die Teilspur über einen Spinfreiheitsgrad erhält man für den verbliebenen Freiheitsgrad $\rho = \frac{1}{2}\mathbf{1}$, also eine Dichtematrix zu „maximaler Unkenntnis“. Durch lokale Messungen, also Messungen an nur einem der Spinfreiheitsgrade, kann man diesen Zustand nicht von einem Gemisch von Spinzuständen unterscheiden (Herleitung 2).

Der EPR-Zustand ist eine Superposition von zwei Beiträgen, bei denen jeweils eine Spinkomponente eines Teilchens antikorreliert ist mit der entsprechenden Spinkomponente des anderen Teilchens. Wann immer man an einem Teilchen eine Messung des Spins bezüglich irgendeiner Richtung vornimmt, weiß man, dass die Spinkomponente des anderen Teilchens bezüglich derselben Richtung den entgegengesetzten Wert hat. Diese Eigenschaft kann man an beliebig vielen gleichartig präparierten Systemen kontrollieren: Bezüglich derselben Richtung sind die beiden Spinkomponenten immer antikorreliert!

1.1.2 Das EPR-Argument

EPR argumentieren nun folgendermaßen: Wenn wir an Teilchen 2 eine Spinmessung bezüglich irgendeiner Richtung vornehmen, können wir das Ergebnis der entsprechenden Messung an dem anderen Teilchen mit 100-prozentiger Sicherheit vorhersagen, ohne an diesem Teilchen irgendeine Veränderung (Messung) vorgenommen zu haben.[1] Da Teilchen 1 aber nicht „weiß“, bezüglich welcher Richtung an Teilchen 2 eine Messung vorgenommen wird, wir aber trotzdem anschließend vorhersagen können, was eine Messung an diesem Teilchen bezüglich der (von dem Experimentator willkürlich gewählten) Richtung ergeben wird, muss dieses Ergebnis schon vorher festliegen. Es muss also einen bisher nicht bekannten Freiheitsgrad geben, der für dieses Ergebnis verantwortlich ist. Diese Forderung bezeichnen EPR als „Elemente der Realität“. Ihre Definition lautet: „Wenn wir an einem System, ohne dieses in irgendeiner Weise zu stören, mit Sicherheit ... das Ergebnis einer Messung vorhersagen können, dann muss es ein Element der Realität geben, das diesem Freiheitsgrad entspricht“. Da die Quantenmechanik diesem Element der Realität nicht Rechnung trägt, ist die Quantenmechanik nicht vollständig.

Interessant ist, dass EPR in ihrem Artikel nicht die Widerspruchsfreiheit des quantenmechanischen Formalismus angreifen. Sie hätten dies durch folgende Argumentation scheinbar leicht tun

[1] Hier hilft es, sich die beiden Teilchen in sehr großer Entfernung voneinander vorzustellen. Verschränkte Zustände wurden über mehr als 1200 km Abstand nachgewiesen [14]. Im Prinzip setzt die Quantentheorie hier aber keine Grenzen, sodass auch Messungen an Teilchenpaaren – eines hier auf der Erde und das andere in einer anderen Galaxie – diese Ergebnisse liefern sollten.

können: Angenommen, wir messen die Spinorientierung an Teilchen 2 in x-Richtung. Dann kennen wir damit auch die Spinorientierung von Teilchen 1 in x-Richtung (wegen der Antikorrelation). Messen wir nun die Spinorientierung von Teilchen 1 in z-Richtung, kennen wir sowohl seine Spinorientierung in z- als auch in x-Richtung, was nach den Unschärferelationen nicht möglich sein sollte. In ähnlicher Form hatte Einstein bei seinen früheren Angriffen auf die Quantenmechanik argumentiert. Bohr hatte immer damit gekontert, dass wir die Vorhersage, die wir für die x-Richtung der Spinorientierung von Teilchen 1 treffen, nicht mehr kontrollieren können, nachdem wir die z-Richtung gemessen haben. Somit sei diese Vorhersage nicht überprüfbar. EPR greifen in ihrem Artikel die scheinbare Unvollständigkeit der Quantenmechanik an, nicht ihre scheinbare Widersprüchlichkeit. Dieses Beispiel macht auch nochmals deutlich, dass es bei dem quantenmechanischen Zustandsbegriff nicht um unser scheinbares Wissen über ein System geht, sondern um die Möglichkeiten von überprüfbaren Vorhersagen.

Damit richtete sich die Kritik von EPR direkt gegen das Theorem von Neumanns. Dieser hatte in seinem Buch bewiesen, dass man die Quantenmechanik nicht um verborgene Variable erweitern kann, ohne die überprüfbaren Vorhersagen der Quantenmechanik abzuändern.

Es sollte abschließend noch betont werden, dass die Korrelationen bzw. Antikorrelationen von verschränkten Zuständen nicht zu einer kontrollierten Signalübertragung (und damit zu einer Kommunikation) verwendet werden können, da man als Experimentatorin oder Experimentator keinen Einfluss auf das Ergebnis einer Spinmessung hat. In diesem Sinne gleichen diese Korrelationen sogenannten Common-Cause-Korrelationen in klassischen Systemen, bei denen aufgrund einer gemeinsamen Ursache (dem Common Cause) eine Korrelation vorliegt. Beispielsweise kann eine Person zwei Briefe identischen Inhalts an zwei andere, weit voneinander entfernte Personen schicken, die diese Briefe gleichzeitig öffnen und somit zeitgleich wissen, was die andere Person in diesem Augenblick liest. Trotzdem kann die eine Person der anderen Person auf diese Weise keine Information senden. Es gibt in diesem Fall jedoch die „Elemente der Realität“, denn der Inhalt der Briefe liegt ja schon vor, bevor die Personen die Briefe öffnen. Eine ähnliche „verborgene Variable“ stellten sich wohl auch EPR vor, als sie das Paradoxon formulierten und zu dem Schluss kamen, die Quantentheorie sei nicht vollständig. Wie wir in Abschnitt 1.2 sehen werden, kann es verborgene Variable dieser Art in der Quantentheorie nicht oder nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen geben.

1.1.3 Zeitgenössische Reaktionen auf EPR

Die Reaktion der zeitgenössischen Physiker und Mitbegründer der Quantenmechanik auf den Artikel von Einstein, Podolsky und Rosen war sehr unterschiedlich. Wolfgang Pauli schrieb unmittelbar nach der Veröffentlichung einen Brief an Werner Heisenberg, in dem er ihn aufforderte, eine Antwort auf den EPR-Artikel zu verfassen [12]. In diesem Brief bemerkt er unter anderem: *Einstein hat sich wieder einmal zur Quantenmechanik öffentlich geäußert ... (gemeinsam mit Podolsky und Rosen – keine gute Kompanie übrigens). Bekanntlich ist das jedes Mal eine Katastrophe, wenn es geschieht. ‚Weil, so schließt er messerscharf - nicht sein kann, was nicht sein darf.‘ (Morgenstern). ... Immerhin möchte ich ihm zugestehen, dass ich, wenn mir ein Student in jüngeren Semestern solche Einwände machen würde, diesen für ganz intelligent und hoffnungsvoll halten würde.* [12]

Die Argumentation von EPR ist verblüffend einfach und dementsprechend hatte beispielsweise Niels Bohr große Schwierigkeiten, eine passende Antwort zu finden. Sein damaliger Assistent Léon Rosenfeld schreibt dazu „... this onslaught came down on us as a bolt from the blue“, und er beschreibt die Schwierigkeiten, die Bohr bei der Formulierung der Antwort hatte.

In einem Artikel mit demselben Titel wie die EPR-Arbeit [5] schreibt Niels Bohr, dass eine physikalische Messung (hier an Teilchen 2) nicht unbedingt eine „mechanische Störung“ für Teilchen 1 bedeuten muss (wie schon erwähnt, können die beiden Teilchen theoretisch Lichtjahre voneinander entfernt sein und die jeweiligen Messungen innerhalb der jeweiligen Lichtkegel – also im Sinne der Relativitätstheorie außerhalb der jeweiligen kausalen Einflussbereiche – stattfinden). Er fährt dann aber fort, dass eine solche Messung jedoch „einen Einfluss auf die Möglichkeiten der Vorhersagen zukünftiger Messungen“ hat. Die Antwort von Bohr wird oftmals so gedeutet, dass er dem Quantenzustand eines Systems keine von unserer Erfahrung unabhängige Realität zuschreibt und dieser somit subjektiv ist. Die Reduktion besteht für Bohr (und Heisenberg hat dies später explizit betont [10]) lediglich in der Änderung unseres Wissens über das System.

Der Begriff „Verschränkung“ wurde von Erwin Schrödinger geprägt und erscheint zum ersten Mal in einer Reihe von Artikeln, die man als Kommentare zur EPR-Arbeit auffassen kann und die den damaligen Stand der naturwissenschaftlichen und naturphilosophischen Erkenntnisse in Bezug auf die Quantentheorie zusammenfassten [13]. Auch Schrödinger betont die Subjektivität des Quantenzustands, indem er „die Wellenfunktion als Katalog von Erwartungen“ beschreibt.

1.2 Bell’sche Ungleichungen

Mitte der 1960er Jahre ging John Bell in mehreren Artikeln der Frage nach, ob es diese „Elemente der Realität“ – heute würde man meist von „verborgenen Variablen“ sprechen, da diese Freiheitsgrade nach der Quantentheorie nicht beobachtbar sein sollten – wirklich geben kann [4, 3]. Zu diesem Zeitpunkt gab es bereits mehrere sogenannte No-Go-Theoreme, welche die Existenz verborgener Variabler auszuschließen schienen. Das bekannteste dieser No-Go-Theoreme stammte von John von Neumann (damals nannte er sich noch Johann von Neumann) und wurde 1932 in seinem Buch zu den mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik [11] veröffentlicht. (Eine sehr frühe Kritik an diesem Theorem kam von der Philosophin und Mathematikerin Grete Hermann.)

Nachdem David Bohm im Jahre 1952 eine Erweiterung der Quantenmechanik im Sinne von verborgenen Variablen gelang und somit das scheinbar Unmögliche wahr geworden war, machte sich John Bell an die Untersuchung der bisherigen No-Go-Theoreme, um deren Schwachstellen zu finden. Insbesondere war ihm bewusst, dass die Bohm’sche Mechanik keine lokale Theorie ist, d.h., physikalisch objektiv vorhandene Entitäten (das Führungsfeld) ändern sich instantan und global als Folge einer Messung. Bells eigentliches Anliegen war die Frage, ob man nicht eine Theorie mit verborgenen Variablen konstruieren kann, die lokal, d.h., mit dem Kausalitätsverständnis der Relativitätstheorie vereinbar ist. Das Ergebnis seiner Überlegungen – die Bell’schen Ungleichungen – zeigen, dass keine lokale Theorie von verborgenen Variablen die experimentellen Vorhersagen der Quantenmechanik reproduzieren kann.

1.2.1 Bell’sche Ungleichungen – die Version von Wigner und d’Espagnat

Die folgende anschauliche Herleitung einer Bell’schen Ungleichung (es gibt mehrere verschiedene Versionen von Bell’schen Ungleichungen) geht ursprünglich auf Eugene Wigner und in der hier vorgestellten Form auf Bernard d’Espagnat zurück [8].

Wir nehmen an, es gebe drei verschiedene Observablen A, B und C, die als Ergebnisse jeweils nur zwei mögliche Werte (z.B. $+1$ und -1) zulassen. Ein klassisches Beispiel wäre ein System aus drei Münzen, die jeweils „Kopf“ oder „Zahl“ zeigen können. Aus einem tieferliegenden Grund (in der Quantentheorie aufgrund nicht kommutierender Observablen) kann man aber an einem System jeweils nur zwei dieser Observablen messen, dafür kann man aber an beliebig vielen gleichartig präparierten Systemen solche Messungen vornehmen. Wir teilen nun ein ausreichend großes Ensemble solcher Systeme in drei gleich große Gruppen. Bei der ersten Gruppe messen wir die Observablen A, B, bei der zweiten die Observablen B und C und bei der dritten die Observablen A und C.

Die Behauptung ist nun, dass die relative Häufigkeit der Systeme, bei denen die Observablen A und C gemessen werden und die Ergebnisse *verschieden* sind, immer kleiner (bestenfalls gleich) ist als die Summe der Fälle, bei denen A und B bzw. B und C gemessen werden und die Ergebnisse verschieden sind. Anschaulich bedeutet das: Wann immer A und C verschieden sind, müssen auch entweder A und B oder aber B und C verschieden sein, bzw. in der Umkehrung: A und C können nicht verschieden sein, wenn sowohl A und B als auch B und C gleich sind.

In diese Argumentation geht die wesentliche Annahme ein, dass die Messwerte für alle drei Observablen festliegen (dies sind die „verborgenen Variablen" bzw. die „Elemente der Realität"), auch wenn nur zwei dieser Observablen gemessen werden können. Eine weitere Annahme ist, dass die Aufteilung des Ensembles gleichartig präparierter Systeme in drei Subensembles, an denen jeweils nur zwei der drei Observablen gemessen werden, unvoreingenommen erfolgt, d.h., dass diese drei Subensembles repräsentativ für das Gesamtensemble sind und nicht im Hinblick auf die Observablen, die an ihnen gemessen werden sollen, selektiert wurden. Dies bezeichnet man manchmal als „no conspiracy"-Annahme. Ein „böser Teufel", der weiß, welche Observablen an einem System gemessen werden, kann die Münzen leicht so verteilen, dass die Ungleichungen verletzt sind.

Die Ungleichung lautet also:

$$N^-(A,C) \leq N^-(A,B) + N^-(B,C)\,, \tag{1.2}$$

wobei N^- andeuten soll, dass nur die Fälle gezählt werden, bei denen die beiden jeweiligen Observablen verschiedene Werte annehmen. Nimmt man nicht exakt gleich viele Messungen für jedes Observablenpaar vor, sollte man N^- als relative Häufigkeit interpretieren. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, dass die Ungleichung in den Variablen A,B,C symmetrisch ist: Es spielt keine Rolle, welche zwei der drei Observablen auf der linken Seite gewählt werden; auf der rechten Seite steht die Summe der beiden anderen Kombinationen. Das heißt, es gilt ebenso:

$$N^-(A,B) \leq N^-(A,C) + N^-(B,C) \qquad \text{und} \qquad N^-(B,C) \leq N^-(A,B) + N^-(A,C)\,. \tag{1.3}$$

Der Physiker John Clauser drückte diese Ungleichung einmal in der Form aus (aus [9]): „Die Anzahl der jungen Nichtraucher plus die Anzahl der weiblichen Raucher aller Altersstufen ist größer oder gleich der Gesamtzahl aller jungen Frauen (Raucher und Nichtraucher)." Es sei dem Leser überlassen, die Beziehung zu obiger Ungleichung herzustellen.

Man kann sich von der Richtigkeit dieser Ungleichung auch leicht anhand einer Tabelle überzeugen, die alle acht Möglichkeiten für die Werte der Observablen auflistet (vgl. Tab. 1.1 **a**). Die Ereignisse, die zur linken Seite von Ungleichung 1.2 beitragen, sind eine Teilmenge der Ereignisse, die zur rechten Seite beitragen. Allerdings beachte man, dass es sich um eine statistische Ungleichung handelt. Überprüft man nur wenige Systeme kann die Ungleichung verletzt sein.

Wie kann man aber in der Quantentheorie eine Situation finden, bei der die Ungleichungen verletzt sind? Da alle Observablen A,B,C paarweise gleichzeitig gemessen werden, müssen alle drei Observablen auch paarweise kommutieren, doch dann kann man auch alle drei Observablen gleichzeitig messen und die Ungleichung kann nicht verletzt sein.

John Bell erkannte, dass sich die Frage nach den „Elementen der Realität" an verschränkten Teilchenpaaren (beispielsweise im EPR-Zustand) untersuchen lässt. Da die Werte bei Spinmessungen entlang derselben Richtung an den beiden Teilsystemen immer *anti*korreliert sind, kann man eine der beiden Observablen an Teilsystem 1 messen und die andere an Teilsystem 2. Wie wir gesehen haben, kommutieren Messungen an verschiedenen Teilsystemen immer, daher lassen sich zwei Observablen messen. Die drei Observablen beziehen sich nun auf Spinmessungen entlang verschiedener Richtungen. Bezeichnen wir mit $n^+(A,B)$ die Anzahl der Fälle, bei denen an Teilsystem 1 die Observable

a

A	B	C	$A \neq C$	$A \neq B$	$B \neq C$
+1	+1	+1			
+1	+1	−1	×		×
+1	−1	+1		×	×
+1	−1	−1	×	×	
−1	+1	+1	×	×	
−1	+1	−1		×	×
−1	−1	+1	×		×
−1	−1	−1			

b

A_1	B_1	C_1	A_2	B_2	C_2	$n^+(A,C)$	$n^+(A,B)$	$n^+(B,C)$
+1	+1	+1	−1	−1	−1			
+1	+1	−1	−1	−1	+1	×		×
+1	−1	+1	−1	+1	−1		×	×
+1	−1	−1	−1	+1	+1	×	×	
−1	+1	+1	+1	−1	−1	×	×	
−1	+1	−1	+1	−1	+1		×	×
−1	−1	+1	+1	+1	−1	×		×
−1	−1	−1	+1	+1	+1			

Tabelle 1.1: **a** Für die Ergebnisse von drei Observablen A,B,C, die jeweils nur zwei Werte annehmen können, gibt es insgesamt acht Möglichkeiten. In allen Fällen, in denen die Observablen A und C verschiedene Werte haben, haben entweder A und B oder A und C verschiedene Werte.
b Dieselbe Tabelle nochmals für zwei Teilchen, die bezüglich aller Observablen antikorreliert sind. Da eine Observable an Teilchen 1 und die zweite Observable an Teilchen 2 gemessen wird, zählen nun die Ereignisse, bei denen die Messwerte gleich sind.

A gemessen wurde und an Teilsystem 2 die Observable B und die beiden Ergebnisse *gleich* sind (entsprechend für die anderen Observablenpaare), dann folgt aus Gl. 1.2 die Ungleichung

$$n^+(A,C) \leq n^+(A,B) + n^+(B,C)\,. \tag{1.4}$$

Diese Ungleichung ist in Tabelle 1.1 **b** verdeutlicht, welche die möglichen verborgenen Variablen beider (vollständig antikorrellierter) Teilchen angibt. n^+ bezieht sich jeweils auf eine Messung an Teilchen 1 und eine an Teilchen 2, und es werden nur die Fälle gezählt, bei denen diese beiden Messungen dasselbe Ergebnis liefern. Allerdings gehen hier neben der Annahme, dass alle Ergebnisse möglicher Messungen zumindest im Prinzip schon festliegen, noch zwei weitere Annahmen ein: (1) Die Spin-Variable sind bezüglich derselben Richtungen auch dann antikorreliert, wenn sie an den beiden Teilchen nicht bezüglich derselben Richtung gemessen werden (dies bezeichnet man auch als „kontrafaktische Implikation“), und (2), es gibt keinen instantanen Einfluss der Messung an einem Teilchen auf das Messergebnis an dem anderen Teilchen (dies bezeichnet man als „Lokalität“). Auch in der Quantentheorie sollte jede Form von Einfluss den Einschränkungen der Relativitätstheorie unterliegen.

Ungleichung 1.4 kann in Quantensystemen, beispielsweise im EPR-Zustand, verletzt sein. Im Folgenden bezeichne die Observable A die Messung der Spinvariablen in 0°-Richtung (z.B. relativ zur z-Achse), B die Messung in 60°-Richtung und C die Messung in 120°-Richtung. Die Wahrscheinlichkeit, an zwei im EPR-Zustand verschränkten Teilchen dasselbe Resultat zu erhalten, hängt nur von der Differenz der beiden Winkel α und β ab, in Bezug auf die an Teilchen 1 bzw. Teilchen 2 die Messung erfolgt:

$$w(\alpha,\beta) = \sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \tag{1.5}$$

Die Ungleichung 1.4 besagt somit, dass die Wahrscheinlichkeit für ein gleiches Ergebnis bei einer Spinmessung unter 0° und 120° kleiner sein muss als das Doppelte der Wahrscheinlichkeit, ein gleiches Ergebnis bei einer Spinmessung unter 0° und 60° (bzw. unter 60° und 120°) zu erhalten. Diese Ungleichung ist jedoch in der Quantentheorie verletzt, da $(\sin 60°)^2 = \frac{3}{4}$ größer ist als das Doppelte von $(\sin 30°)^2 = \frac{1}{4}$.

Für Photonen muss Gleichung 1.5 durch $w(\alpha,\beta) = \sin^2(\beta - \alpha)$ ersetzt werden und man würde die Polarisationsfilter unter 0°, 30° und 60° orientieren. Der Faktor $\frac{1}{2}$ hängt mit dem Unterschied zwischen Spin-Orientierung und Polarisation zusammen. Anschaulich bringt er zum Ausdruck, dass zwei entgegengesetzte Spin-Richtungen zu orthogonalen Zuständen gehören, wohingegen zwei unter 90° orientierte Polarisationsrichtungen orthogonalen Zuständen entsprechen. Der tiefere Grund hängt damit zusammen, dass Photonen masselose Teilchen sind.

In den 70er Jahren wurden mehrere Experimente zum Test der Bell'schen Ungleichung in der Quantenmechanik durchgeführt, allerdings war die Statistik sehr schlecht und die Ergebnisse waren teilweise widersprüchlich. Im Jahre 1982 bestätigten die Experimente von Alain Aspect [1] an Photonen schließlich die klare Verletzung der Bell'schen Ungleichungen in der Quantentheorie. Insbesondere konnte Aspect auch zeigen, dass die Verletzung der Bell'schen Ungleichung bestehen bleibt, selbst wenn die Messungen an Teilsystem 1 und Teilsystem 2 innerhalb der jeweiligen kausalen Komplemente bezüglich einer Signalausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen. (Aspect verwendete Photonenpaare in einem Abstand von rund 10 Metern, sodass die Messungen innerhalb von Nanosekunden stattfinden mussten, mittlerweile wurden ähnliche Experimente mit Photonenpaaren im Abstand von rund 80 Kilometern wiederholt und die Vorhersagen der Quantentheorie bestätigt.) Für diese Experimente erhielt Alain Aspect zusammen mit John F. Clauser und Anton Zeilinger im Jahr 2022 den Nobel-Preis.

Im Wesentlichen gehen drei Annahmen in die obige Form der Bell'schen Ungleichungen ein, von denen mindestens eine in der Quantenmechanik verletzt sein muss:

1. Kontrafaktische Implikation: Falls es die versteckten Variablen gibt, die im EPR-Zustand für die Antikorrelation der Spinkomponenten in dieselbe Richtung verantwortlich sind, so darf die Antikorrelation auch angenommen werden, wenn die Messungen an den Teilsystemen nicht unter denselben Richtungen erfolgen.

   In Abschnitt 1.3 werden wir eine Version der Bell'schen Ungleichungen betrachten, bei der diese Annahme nicht notwendig ist. Daher wird sie auch selten diskutiert.

2. Einstein-Realität: Es ist sinnvoll anzunehmen, dass es die Elemente der Realität gibt, durch welche die Ergebnisse der Messungen schon festliegen, bevor die Messungen tatsächlich durchgeführt werden. (Die Antikorrelation wurde also schon bei der Präparation der verschränkten Teilsysteme festgelegt.) Insbesondere muss angenommen werden, dass die Messergebnisse bezüglich aller Richtungen, in die eine Messung erfolgen kann, festliegen.

   Hier wird manchmal eingeworfen, dass das Ergebnis ja nur bezüglich der Richtungen festliegen muss, die tatsächlich gemessen werden. Doch das würde bedeuten, dass diese Richtung schon bei der Entstehung der Teilchen festliegt und nicht erst, wenn im Experiment die Entscheidung getroffen wird. In einer „superdeterministischen Welt" können die Bell'schen Ungleichungen verletzt sein, ohne dass eine der anderen Bedingungen infrage gestellt werden muss. Allerdings besitzt in einer solchen Welt die Experimentierenden auch keinen „freien Willen": Sie können nicht spontan und frei entscheiden, bezüglich welcher Richtungen an einem System Messungen vorgenommen werden; diese Entscheidungen liegen im Prinzip seit Anbeginn der Welt fest.

3. Lokalität: Die Information über das Ergebnis einer Messung breitet sich maximal mit Licht-

geschwindigkeit (bzw. einer Grenzgeschwindigkeit) aus, d.h., es findet keine instantane Signalübertragung von Teilsystem 1 zu Teilsystem 2 im Augenblick der Messung statt.

Hier wird vorausgesetzt, dass die Experimente in einer Minkowski-Raumzeit stattfinden. Es gibt Modelle, nach denen sich die Raumzeit auch erst in Experimenten manifestiert, und verschränkte Systeme sind in dieser „Prä“-Raumzeit noch unmittelbar benachbart, sodass ein nahezu instantaner gegenseitiger Einfluss möglich ist.

Die Ergebnisse von John Bell zeigen, dass die Messergebnisse der Spinrichtungen (oder von Polarisationsrichtungen) erst in dem Augenblick generiert werden, in dem die Messung stattfindet. Die Tatsache, dass die Messergebnisse bezüglich gleicher Richtungen im EPR-Zustand antikorreliert sind, zeigt, dass die Quantentheorie in einem sehr allgemeinen Sinn nichtlokal sein muss. Da die EPR-Korrelationen keine kontrollierte Signalübertragung ermöglichen, hat diese Nichtlokalität keine messbaren Konsequenzen. Insbesondere kann keine der beiden Messungen an einem Teilsystem in irgendeinem objektiven Sinne als „Ursache“ und keine als „Wirkung“ angesehen werden. Die Quantentheorie gilt insofern als nichtlokal, als sich der Zustand eines verschränkten Systems instantan (d.h., möglicherweise über ein großes Gebiet verteilt bzw. in Gebieten, die einen großen Abstand voneinander haben) verändert. Ob man dies als Widerspruch zur Relativitätstheorie interpretiert, hängt sehr davon ab, welche ontologische Realität man dem Quantenzustand zuschreibt.

1.3 Bell’sche Ungleichungen – CHSH-Version

Nachdem John Bell seine Ungleichung abgeleitet und veröffentlich hatte, versuchten verschiedene Gruppen, diese Ungleichung experimentell zu testen. Dabei stellte sich jedoch heraus, dass die ursprüngliche Form von Bell nicht besonders gut für eine experimentelle Überprüfung geeignet war.

John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony und Richard Holt formulierten eine Ungleichung [6], die experimentell leichter zu realisieren war, da sie für jedes der beiden Teilchen nur zwei verschiedene Möglichkeiten testete (damit waren die Schalter, die innerhalb von Nanosekunden zwischen den Möglichkeiten umschaltbar sein mussten, einfacher). Diese Ungleichung bezeichnet man heute als CHSH-Ungleichung bzw. CHSH-Form der Bell’schen Ungleichung. Die Herleitung dieser Ungleichung beruht lediglich auf der Annahme, dass die Ergebnisse zu den Messungen schon determiniert sind, bevor die Messungen tatsächlich durchgeführt werden. Der Nachweis der Verletzung in der Quantentheorie erfolgt wiederum an verschränkten Systemen.

Die Experimente werden meist an Photonen durchgeführt und der verschränkte Zustand entspricht dem EPR-Zustand; allerdings werden an Teilchen 1 nur die Polarisationen unter 0° und 45° gemessen und an Teilchen 2 die Polarisationen unter 22,5° und 67,5°. Für die Ungleichung spielen die genauen Winkel keine Rolle, allerdings ist die Ungleichung für diese Winkel bei Photonen maximal verletzt.

Für das Folgende nehmen wir vier Eigenschaften an, die wir mit a, a', b und b' bezeichnen. Diese vier Eigenschaften werden an den beiden Teilchen eines EPR-Zustands gemessen, wobei an Teilchen 1 nur die Eigenschaften a und a' und an Teilchen 2 nur die Eigenschaften b und b' gemessen werden. Die möglichen Resultate einer Messung von jeder der vier Eigenschaften können nur $+1$ und -1 sein.

Tabelle 1.2 listet alle 16 Möglichkeiten, die diese vier Eigenschaften in einem konkreten Fall einnehmen können. Ebenfalls angegeben ist jeweils die folgende Kombination:

$$S = ab - ab' + a'b + a'b' \tag{1.6}$$

Jeder Term in dieser Kombination ist ein Produkt aus einer der beiden Eigenschaften, die am ersten Teilchen gemessen werden (a oder a'), und einer der beiden Eigenschaften, die am zweiten Teilchen

a	a'	b	b'	S
+1	+1	+1	+1	+2
+1	−1	+1	+1	−2
−1	+1	+1	+1	+2
−1	−1	+1	+1	−2

a	a'	b	b'	S
+1	+1	+1	−1	+2
+1	−1	+1	−1	+2
−1	+1	+1	−1	−2
−1	−1	+1	−1	−2

a	a'	b	b'	S
+1	+1	−1	+1	−2
+1	−1	−1	+1	−2
−1	+1	−1	+1	+2
−1	−1	−1	+1	+2

a	a'	b	b'	S
+1	+1	−1	−1	−2
+1	−1	−1	−1	+2
−1	+1	−1	−1	−2
−1	−1	−1	−1	+2

Tabelle 1.2: In allen 16 Fällen, die für die Observablen a, a', b und b' möglich sind, hat die Variable $S = ab - ab' + a'b + a'b'$ den Wert $+2$ oder -2. Daher kann auch für ein beliebiges Ensemble aus Systemen, das diese 16 Möglichkeiten (möglicherweise mit unterschiedlichen Gewichtungen) realisiert, der Erwartungswert von S nur zwischen $+2$ und -2 liegen.

gemessen werden (b oder b'). Man erkennt, dass in allen 16 Fällen der Wert für S immer nur $+2$ oder -2 sein kann. Bildet man also den Erwartungswert von S über sehr viele Messungen (in jeder Einzelmessung kann immer nur einer der Terme in der Summe bestimmt werden), so sollte der Erwartungswert $E(S)$ schließlich zwischen -2 und $+2$ liegen. Wir erhalten also die Ungleichung:

$$-2 \leq E(S) \leq +2 \tag{1.7}$$

Experimentell erzeugt man ein Ensemble verschränkter Teilchen, beispielsweise im EPR-Zustand, und an jedem Teilchenpaar wird eine der vier Kombinationen (a,b),(a,b'),(a',b),(a',b') gemessen. Zu jeder dieser Kombinationen erhält man schließlich einen Erwartungswert für das Produkt der Messwerte, was zu der Ungleichung

$$-2 \leq E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b') \leq +2 \tag{1.8}$$

führt.

1.3.1 Veranschaulichungen der CHSH-Ungleichung

In diesem Abschnitt soll die CHSH-Ungleichung erläutert und Veranschaulichungen gegeben werden. Insbesondere soll auch die Bedeutung des einzelnen Minus-Zeichens in Gl. 1.6 bzw. 1.8 verdeutlicht werden. Dieses Minus-Zeichen kann natürlich vor jedem der vier Terme stehen, wichtig ist lediglich, dass nur ein Minus-Zeichen (bzw. allgemeiner einer ungerade Anzahl von Minus-Zeichen) in der Ungleichung auftritt.

Weshalb ist $S = 4$ unmöglich?

Weshalb ist in Gl. 1.6 der Wert $S = 4$ nicht möglich? Dies würde bedeuten, dass die Produkte ab, $a'b$ und $a'b'$ jeweils den Wert $+1$ haben und das Produkt ab' den Wert -1. Doch die Forderung $ab = 1$ bedeutet, dass $a = b$ sein muss (beide Werte müssen entweder $+1$ oder -1 sein). Entsprechend folgt aus $a'b = 1$ dass $a' = b$ und es folgt aus $a'b' = 1$ dass $a' = b'$. Damit erhalten wir aber insgesamt

$$a = b = a' = b' \qquad \text{und somit} \quad a = b' \,. \tag{1.9}$$

Damit erhalten wir einen Widerspruch zu unserer Forderung, dass das Produkt ab' den Wert -1 haben soll.

Benachbarte Paare an einem runden Tisch

Man stelle sich einen großen runden Tisch vor, an dem N Personen, davon m Männer und f Frauen, sodass $n + f = N$, platziert werden sollen. Ist es möglich, die Anzahl der benachbarten Paare ungleichen Geschlechts (also die Anzahl der Plätze, bei denen eine Frau neben einem Mann sitzt) ungerade zu wählen?

Eine kurze Überlegung zeigt, dass das nicht möglich ist. Wenn wir bei einer bestimmten Person 1 beginnen, die beispielsweise männlich ist, und nun reihum um den Tisch gehen, müssen wir eine gerade Anzahl von „Geschlechterwechseln" haben, denn am Ende muss wieder das Anfangsgeschlecht (in diesem Fall männlich) stehen, d.h., für jeden Wechsel von männlich zu weiblich muss auch wieder ein Wechsel von weiblich zu männlich auftreten. Ist die Gesellschaft eingeschlechtlich, gibt es keine Wechsel, ansonsten müssen mindestens zwei Wechsel auftreten.

Das gilt speziell auch für einen runden Tisch mit vier Personen. Die vier Plätze bezeichnen wir mit a, b, a' und b', wobei die gegenüberliegenden Plätze a und a' bzw. b und b' sind. Benachbarte Plätze bestehen also aus den Paarungen (a,b), (b,a'), (a',b') und (b',a).

Wählen wir wieder die Konvention, dass das Produkt von zwei benachbarten Plätzen gleich $+1$ ist, sofern diese Plätze mit demselben Geschlecht besetzt sind, und -1, sofern die Geschlechter verschieden sind, wird die Parallele zur CHSH-Ungleichung deutlich: Entweder ist ein Tisch gleichgeschlechtlich besetzt, d.h. das Produkt ist immer $+1$ und somit ist die Variable $S = +2$. Oder es gibt eine gerade Anzahl von -1-ern in den Produkten. Das Produkt mit einer -1 in S ergibt immer eine ungerade Anzahl von -1 in der Summe und somit erhält man entweder $S = +2$ oder $S = -2$

1.3.2 Die Verletzung der CHSH-Ungleichung in der Quantentheorie und das Experiment von Alain Aspect

Bei der experimentellen Umsetzung gibt es zwei Schwierigkeiten: Erstens benötigt man einen schnellen Schalter, mit dem man möglichst im Nanosekundenbereich zwischen den beiden Winkeln, die an einem Teilsystem gemessen werden, hin- und herschalten kann. Dadurch kann ein Signalaustausch zwischen den beiden Teilsystemen ausgeschlossen werden. Das zweite Problem besteht in möglichst effizienten Detektoren, die jedes Photon auch tatsächlich nachweisen. Nach ersten, noch mit großen Fehlern behafteten Experimenten in den 70er Jahren veröffentlichte Alain Aspect [1] 1982 die Ergebnisse eines Experiments, das (fast) alle Zweifel an den richtigen Vorhersagen der Quantenmechanik ausräumte (Abb. 1.1 zeigt eine Skizze seines Experiments).

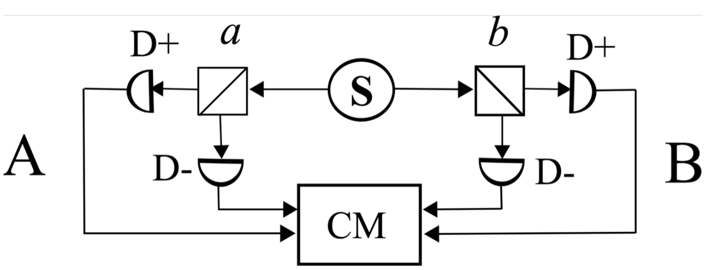

Abbildung 1.1: Experimenteller Aufbau eines Experiments zum Nachweis der Verletzung der CHSH-Ungleichung: Eine Quelle (S) erzeugt zwei Photonen, die zu ‚Alice' (A) bzw. ‚Bob' (B) geschickt werden. Dort treffen die Photonen auf Polarisationsstrahlteiler (a bzw. b) und werden in Richtung der Detektoren (D^+ und D^-) abgelenkt. Ein Koinzidenzmessgerät (CM) registriert die eintreffenden Signale. Die beiden Polarisationsstrahlteiler sind um die Strahlachse drehbar und lassen sich in jeweils zwei verschiedene Positionen einstellen.

Seien N^{++},N^{+-},N^{-+},N^{--} die Häufigkeiten, mit denen bei gegebener Winkeleinstellung der Filter die jeweiligen Detektoren reagiert haben (+ bedeutet einen Teilchennachweis in Detektor D^+, − einen Nachweis in Detektor D^-; vgl. Abb. 1.1), dann ist der zugehörige Erwartungswert für das Produkt der beiden Werte:

$$E = \frac{(+1)N^{++} + (+1)N^{--} + (-1)N^{+-} + (-1)N^{-+}}{N^{++} + N^{--} + N^{+-} + N^{-+}} \tag{1.10}$$

Für einen total antikorrelierten verschränkten EPR-Zustand sind die Erwartungswerte für eine Winkeldifferenz $\Delta\alpha$ in diesem Fall:

$$E(\Delta\alpha) = \frac{\sin^2\Delta\alpha + \sin^2\Delta\alpha - \cos^2\Delta\alpha - \cos^2\Delta\alpha}{\sin^2\Delta\alpha + \sin^2\Delta\alpha + \cos^2\Delta\alpha + \cos^2\Delta\alpha} = \sin^2\Delta\alpha - \cos^2\Delta\alpha = -\cos 2\Delta\alpha \tag{1.11}$$

$\sin^2\Delta\alpha$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Teilchen denselben Messwert liefern (beide + oder beide −) und $\cos^2\Delta\alpha$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie verschiedene Werte liefern (+− bzw. −+).

Für die Winkel $a = 0°$, $a' = 45°$, $b = 22{,}5°$ und $b' = 67{,}5°$ gibt es letztendlich für $\Delta\alpha$ nur zwei Kombinationen: $(a,b') \to \Delta\alpha = 67{,}5°$ und $(a,b),(a',b),(a',b') \to \Delta\alpha = \pm 22{,}5°$. Damit folgt schließlich:

$$E(S) = \cos(2\cdot 67{,}5°) - 3\cdot\cos(2\cdot 22{,}5°) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \approx -2{,}828 \tag{1.12}$$

Dieses Ergebnis liegt also um einen Faktor $\sqrt{2}$ außerhalb des Bereichs, der nach der CHSH-Ungleichung erlaubt wäre (man bezeichnet $2\sqrt{2}$ manchmal auch als „quantum bound“). Das erscheint im ersten Augenblick zwar viel, doch da sich jede Unsicherheit, beispielsweise bei der Ansprechgenauigkeit der Detektoren, zu Ungunsten des Ergebnisses auswirkt, war der experimentelle Nachweis der Verletzung nicht einfach.

In die CHSH-Ungleichung gehen nur zwei der drei in Abschnitt 1.2.1 genannten Annahmen ein. Die kontrafaktische Implikation ist nicht erforderlich, da die Korrelation oder Antikorrelation bezüglich derselben Orientierungen nicht vorausgesetzt wurde. Allerdings kann die Ungleichung nur an einem verschränkten Zustand verletzt werden.

1.3.3 Zusammenfassung

Fassen wir das Ergebnis nochmals zusammen: Die Annahme, dass die Messergebnisse schon vor der Messung festliegen, führt auf de CHSH-Ungleichung. Diese ist in der Quantentheorie verletzt, sodass diese Annahme nicht gültig ist. Die Ergebnisse entstehen also erst im Augenblick der Messung, allerdings nicht willkürlich und an beiden Teilsystemen unabhängig, da in diesem Fall die CHSH-Ungleichung erfüllt sein müsste. Man kommt also nicht umhin, in der Quantentheorie eine Form von Nicht-Lokalität zu fordern; anders lassen sich die Ergebnisse nicht erklären. Diese Nicht-Lokalität ist allerdings nicht direkt beobachtbar, da die Korrelationen nicht zur gezielten Übertragung von Signalen genutzt werden können. Gibt man die Lokalität auf, lassen sich zwar kausale Modelle konstruieren, welche die Verletzung der CHSH-Ungleichung beschreiben, allerdings entstehen die Eigenschaften, die den Messergebnissen entsprechen, erst im Augenblick der Messung. Sie sind nicht vorherbestimmt.

Wie bei allen No-Go-Theoremen in der Physik ist es auch hier schwierig, genau alle Annahmen aufzuzählen, die man als selbstverständlich in die Schlussfolgerungen gesteckt hat. Es wurde schon der sogenannte Superdeterminismus erwähnt, manchmal spricht man auch von „no conspiracy„ oder vom „freien Willen“ der Experimentierenden, die Einstellungen (a oder a' im einen Fall und b oder b' im anderen Fall) zu wählen. Alle Annahmen beziehen sich darauf, dass zwischen den Entscheidungen, welche beiden Observablen an einem konkreten Teilchenpaar gemessen werden, und den verborgenen Parametern dieses Teilchenpaars, keine Beziehungen bestehen: Die Ensembles, an denen zwei Observable gemessen werden, sind bezüglich der Verteilung ihrer verborgenen Variablen gleich.

Eine zweite Annahme betrifft die Struktur der Raumzeit. Sollte es bei verschränkten Systemen eine Art Wurmloch in der Raumzeit geben, d.h., auch wenn die Teilsysteme für uns weit voneinander entfernt scheinen, sind sie doch noch unmittelbar zusammen, kann die Nicht-Lokalität umgangen werden. Weitere Annahmen beziehen sich auf die Natur des „Zustands“. Sofern damit lediglich das Wissen einer Person gemeint ist (und dieses Wissen breitet sich bestenfalls mit Lichtgeschwindigkeit aus), kann man das Paradoxe umgehen. Allerdings erhebt sich dann die Frage, ob es überhaupt eine Realität unabhängig von unserer Wahrnehmung gibt.

Anmerkungen

Die Richtungsunabhängigkeit des EPR-Zustands (Herleitung 1)

Eine allgemeine unitäre Transformation in einem 2-dimensionalen komplexen Vektorraum hat die Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad aa^* + bb^* = 1\,. \tag{1.13}$$

Auf eine beliebige Basis $\{|\boldsymbol{e}_1\rangle,|\boldsymbol{e}_2\rangle$ wirkt diese Transformation in der Form:

$$|\boldsymbol{f}_1 = a|\boldsymbol{e}_1\rangle + b|\boldsymbol{e}_2\rangle \quad , \quad |\boldsymbol{f}_2 = -b^*|\boldsymbol{e}_1\rangle + a^*|\boldsymbol{e}_2\rangle\,. \tag{1.14}$$

Für den EPR-Zustand (ausgedrückt in der $\boldsymbol{f}$-Basis) folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\boldsymbol{f}_1\rangle \otimes |\boldsymbol{f}_2\rangle - |\boldsymbol{f}_2\rangle \otimes |\boldsymbol{f}_1\rangle\big) \quad = \tag{1.15}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(a|\boldsymbol{e}_1\rangle + b|\boldsymbol{e}_2\rangle\big) \otimes \big(-b^*|\boldsymbol{e}_1\rangle + a^*|\boldsymbol{e}_2\rangle\big) - \big(-b^*|\boldsymbol{e}_1\rangle + a^*|\boldsymbol{e}_2\rangle\big) \otimes \big(a|\boldsymbol{e}_1\rangle + b|\boldsymbol{e}_2\rangle\big)\Big) \tag{1.16}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(aa^* + bb^*)\big(|\boldsymbol{e}_1\rangle \otimes |\boldsymbol{e}_2\rangle - |\boldsymbol{e}_2\rangle \otimes |\boldsymbol{e}_1\rangle\big) \tag{1.17}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\boldsymbol{e}_1\rangle \otimes |\boldsymbol{e}_2\rangle - |\boldsymbol{e}_2\rangle \otimes |\boldsymbol{e}_1\rangle\big) \tag{1.18}$$

Die Teilspur zum EPR-Zustand (Herleitung 2)

Der Projektionsoperator zum EPR-Zustand (in einer Basis $\{|\boldsymbol{e}_i\rangle\}$) ist

$$P_{\text{EPR}} = \frac{1}{2}\big(|\boldsymbol{e}_1\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{e}_2\rangle_2 - |\boldsymbol{e}_2\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{e}_1\rangle_2\big)\big({}_2\langle \boldsymbol{e}_2| \otimes {}_1\langle \boldsymbol{e}_1| - {}_2\langle \boldsymbol{e}_1| \otimes {}_1\langle \boldsymbol{e}_2|\big) \tag{1.19}$$

wobei hier der Übersichtlichkeit halber die Vektoren noch mit einem Index versehen sind, der anzeigt, ob der Vektor sich auf Hilbert-Raum 1 oder 2 bezieht. Bilden wir nun die Teilspur zu Hilber-Raum 2 und nutzen die Orthogonalität der Basisvektoren aus, ${}_2\langle \boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j\rangle_2 = \delta_{ij}$, erhalten wir:

$$\text{Sp}_2 P_{\text{EPR}} \quad = \quad \sum_{i=1}^{2} {}_2\langle \boldsymbol{e}_i|P_{\text{EPR}}|\boldsymbol{e}_i\rangle_2 \tag{1.20}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} {}_2\langle \boldsymbol{e}_i|\big(|\boldsymbol{e}_1\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{e}_2\rangle_2 - |\boldsymbol{e}_2\rangle_1 \otimes |\boldsymbol{e}_1\rangle_2\big)\big({}_2\langle \boldsymbol{e}_2| \otimes {}_1\langle \boldsymbol{e}_1| - {}_2\langle \boldsymbol{e}_1| \otimes {}_1\langle \boldsymbol{e}_2|\big)|\boldsymbol{e}_i\rangle_2 \tag{1.21}$$

$$= \quad \frac{1}{2}\big(|\boldsymbol{e}_1\rangle_{11}\langle \boldsymbol{e}_1| + |\boldsymbol{e}_2\rangle_{11}\langle \boldsymbol{e}_2|\big) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_1\,. \tag{1.22}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir den Erwartungswert von einer beliebigen Observablen im Hilbert-Raum 1 betrachten, also von $A \otimes \mathbf{1}_2$:

$$\text{Sp}P_{\text{EPR}}(A \otimes \mathbf{1}_2) = \frac{1}{2}\big({}_1\langle \boldsymbol{e}_1|A|\boldsymbol{e}_1\rangle_1 + {}_1\langle \boldsymbol{e}_2|A|\boldsymbol{e}_2\rangle_1\big) = \frac{1}{2}\text{Sp}_1 A\,\mathbf{1}_1\,. \tag{1.23}$$

Literaturverzeichnis

[1] Aspect, A., Grangier, Ph., Roger, G.; Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities; Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 91–94.
Aspect, A., Dalibard, J., Roger, G.; Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers; Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1804–1807.

[2] Bell, J.S.; *Speakable and Unspeakable in Quantum Physics*, 2. edition, Cambridge University Press (2004).

[3] Bell, J.S.; *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*; Physics 1 (1964) 195. Abgedruckt in [2].

[4] Bell, J.S.; *On the problem of hidden variables in quantum theory*; Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 447. Abgedruck in [2].

[5] Bohr, N.; *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*; Phys. Rev. 48 (1935) 696.

[6] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., Holt, R. A.; *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 880-884.

[7] Einstein, A., Podolski, B., Rosen, N.; *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*; Phys. Rev. 47 (1935) 777–780.

[8] D'Espagnat, B.; *Quantentheorie und Realität*; Spektrum der Wissenschaft 1 (1980) 69.

[9] Gilder, L.; *The Age of Entanglement: When Quantum Physics was Reborn*; Penguin Vintage (2009).

[10] Heisenberg, W.; Anmerkungen im Anschluss des Artikels: Renninger, M.; *Messung ohne Störung des Meßobjekts*; Z. Physik 158 (1960) 417.

[11] von Neumann, J.; *Mathematische Grundlagen der Quantentheorie*; Springer (1932).

[12] Pauli, W., Brief an Heisenberg vom 15. Juni 1935, in *Wolfgang Pauli - Scientific Correspondence with Bohr, Einstein, Heisenberg a.o.*, Karl von Meyenn (Hrsg.), Band II 1930–1939, Springer (1985).

[13] Schrödinger, E.; *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*; Die Naturwissenschaften 23 (1935) 807–812, 823–828, 844-849.

[14] Yin, J., et al.; *Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers*; Science 356 (2017) 1140.

Index