Grundlagen und Probleme der Quantenmechanik

Thomas Filk

Vorlesung gehalten in Freiburg

Wintersemester 1999/2000

Wintersemester 2004/2005

Sommersemester 2008

In verkürzter Form diente dieses Skript als Vorlage für

die Physik-Combo Jena-Halle-Leibzig im Wintersemester 2005/6

und die Sommerschule Saalburg, Sept. 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **9**

1.1 Historischer Überblick 11

2 Grundlagen der Quantenmechanik **15**

2.1 Der mathematische Formalismus der Quantenmechanik 15

2.2 Die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik 17

2.2.1 Die allgemeine Zuordnungsvorschrift: Axiom 1 und 2 19

2.2.2 Konkrete Interpretationsvorschriften: Axiom 3 und 4 21

2.2.3 Zeitentwicklung in der Kopenhagener Interpretation: Axiom 5 und 6 . . . 22

2.3 Superauswahlregeln 22

3 Observable und Zustände **27**

3.1 Observable und Messvorschrift 27

3.2 Observable als C^*-Algebra 28

3.3 Zustände 30

3.4 Observable und Zustände in der Physik 31

3.4.1 Observable und Zustände in der klassischen Mechanik 31

3.4.2 Observable und Zustände in der Quantenmechanik 32

4 Propositionen und Verbände **35**

4.1 Propositionen in der klassischen Mechanik 36

4.2 Propositionen in der Quantenmechanik . . . 37
4.3 Kommensurable und inkommensurable Eigenschaften . . . 39
4.4 Quantenlogik . . . 40
4.5 Verbandstheorie . . . 41
4.5.1 Ordnung . . . 41
4.5.2 Verbände . . . 42
4.5.3 Die Verbandsstruktur im physikalischen Propositionenkalkül . . . 44
4.5.4 Weitere Verbandseigenschaften . . . 45

5 Gedankenexperimente 47
5.1 Das Doppelspaltexperiment . . . 47
5.1.1 Das Experiment und die beobachteten Effekte . . . 48
5.1.2 Welle oder Teilchen? . . . 50
5.1.3 Nachweis des Elektrons . . . 51
5.1.4 Unschärferelation und Superpositionsprinzip . . . 52
5.1.5 AND und OR . . . 54
5.2 Stern-Gerlach Anordnungen . . . 54
5.3 Ortsbestimmung eines Elektrons durch ein Mikroskop . . . 57
5.4 Messungen ohne Störung des Messobjekts . . . 61
5.5 De Broglies Paradoxon . . . 62
5.5.1 Der „experimentelle Aufbau“ . . . 62
5.5.2 Die Vollständigkeit der Quantenmechanik und verborgene Variable . . . 63
5.5.3 Feynmans Summation über Möglichkeiten und „viele Welten“ . . . 64
5.5.4 Der instantane Kollaps der Wellenfunktion . . . 64
5.6 Schrödingers Katze . . . 66
5.7 Wigners Freund . . . 67

6 Das EPR-Paradoxon 71

6.1 Die Arbeit von Einstein, Podolsky und Rosen 71
6.2 Die Modelle von Bohm und EPR 74
6.2.1 Das Spin-Modell von Bohm und Aharanov 74
6.2.2 Das ursprüngliche EPR-Modell 76
6.3 Reaktionen auf EPR 77
6.3.1 Brief von Pauli an Heisenberg 77
6.3.2 Bohrs Antwort auf EPR 79
6.4 Ist die Quantenmechanik lokal? 80
6.4.1 Wechselwirkungsfrei und unabhängig 80
6.4.2 Raumartige Korrelationen? 81

7 Modernere Versionen von Gedankenexperimenten 83
7.1 Der Quanten-Zeno-Effekt 83
7.1.1 Der Quanten-Zeno-Effekt am 2-Zustandssystem 84
7.1.2 Realisierung des Quanten-Zeno-Effekts durch optische Filter 86
7.2 Messung ohne Wechselwirkung 87
7.2.1 Das Mach-Zehnder-Interferometer 88
7.2.2 Das Grundexperiment 89
7.2.3 Das Prinzip von „Messung ohne Wechselwirkung“ 90
7.2.4 Der Elitzur-Vaidman „Superbomben-Tester 91
7.2.5 Änderung der Durchlass- und Reflektionswahrscheinlichkeiten 92
7.2.6 100%-Messung ohne Wechselwirkung 94
7.3 Verschränkung ohne Wechselwirkung 95
7.4 Wheelers „Delayed Choice“ Experimente 97
7.4.1 Wheelers klassisches delayed-choice Experiment 98
7.4.2 Wheelers großes delayed-choice Experiment 99

8 Die Bell’schen Ungleichungen 101

8.1 Vorbemerkungen . . . 101
8.2 Die Bell'schen Ungleichungen . . . 103
8.2.1 Der Beweis von Bell . . . 103
8.2.2 Der Beweis von D'Espagnat . . . 106
8.3 Folgerungen aus den Bell'schen Ungleichungen . . . 109
8.4 Das GHZ-Experiment . . . 111
8.4.1 Definitionen und experimenteller Aufbau . . . 111
8.4.2 Argumentation bei Annahme, es gäbe „Elemente der Realität“ . . . 113
8.4.3 Argumentation der Quantenmechanik . . . 114
8.4.4 Reaktionen auf GHZ . . . 115

9 Verborgene Variable 117

9.1 Verborgene Variable für die Spin-Physik . . . 117
9.2 Der von Neumannsche Beweis . . . 119
9.2.1 Die Annahmen . . . 119
9.2.2 Der Beweis . . . 121
9.2.3 Bemerkungen . . . 122
9.3 Der Beweis von Jauch und Piron . . . 124
9.4 Gleason . . . 126
9.4.1 Annahmen und Behauptung von Gleason . . . 126
9.4.2 Beweis des Theorems . . . 128
9.4.3 Kommentar . . . 129
9.5 Die Bohmsche Interpretation der Quantenmechanik . . . 130
9.5.1 Die allgemeine Idee . . . 131
9.5.2 Das Quantenpotential . . . 132
9.5.3 Kritikpunkte . . . 135

10 Der Messprozess 139

10.1 Zusammensetzung zweier Systeme 140
10.2 Zerlegung des Messprozesses 145
10.3 Die Wechselwirkung des Messprozesses 148
10.3.1 Der Übergangsoperator von von Neumann 149
10.3.2 Der Stern-Gerlach Operator von Gottfried 151
10.3.3 Der Mess-Hamiltonian von Wigner 152
10.3.4 Kritikpunkte 153
10.4 Von reinen Zustand zur Dichtematrix 154
10.4.1 „Vernünftige“ Observable 155
10.4.2 Ausspuren unbeobachteter Freiheitsgrade 160
10.5 Die Basis der Zeigerstellung 161
10.5.1 Vorbemerkungen 161
10.5.2 Gemisch und Gemenge 163
10.5.3 Umgebungsbedingte Superauswahlregeln 164
10.6 Vom „Und“ zum „Oder“ 165
10.7 Der Kollaps der Wellenfunktion 169
10.7.1 Autorenmeinungen 169
10.7.2 Erklärungen? 171
10.8 Against “Measurement” 173

11 Interpretationen der Quantenmechanik 175

11.1 Nochmals Kopenhagener Deutung 175
11.1.1 Axiom 1: Zustände 175
11.1.2 Axiom 2: Die Observablen 176
11.1.3 Axiom 3: die Messwerte 177
11.1.4 Axiom 4: Die Wahrscheinlichkeitsamplituden 178
11.1.5 Axiom 5: Die ungestörte Zeitentwicklung eines Quantensystems 179
11.1.6 Axiom 6: Der Messprozess 180

11.2 Ensemble-Interpretation der QM . . . 180
11.3 Die Wellenfunktion als Ausdruck unseres Wissens . . . 184

12 „Relative States“ und „Consistent Histories“ 187
12.1 “Relative States” und die Many Worlds-Interpretation . . . 187
12.1.1 Relative states . . . 188
12.1.2 Beobachtung . . . 190
12.1.3 Interpretation . . . 191
12.1.4 Reaktionen . . . 192
12.2 Consistent Histories . . . 192
12.2.1 Histories . . . 193
12.2.2 Beispiele von Histories . . . 193
12.2.3 Consistent Histories . . . 193

13 Quanteninformation 195
13.1 Klassische Information . . . 195
13.2 Qubits . . . 196
13.3 Quanten-Teleportation . . . 199
13.4 „Quantum dense coding“ oder „Superdense coding“ . . . 201
13.5 RSA-Kryptographie . . . 201
13.6 Quantenkryptographie . . . 202

Literaturverzeichnis 204

Index 210

Kapitel 1

Einleitung

Grundlagenfragen bzw. Grundlagenprobleme sind im Allgemeinen nicht Gegenstand einer Kursvorlesung. Gerade die Quantenmechanik bildet aber einen Zweig der Physik, bei dem für viele Physiker noch wesentliche Grundlagenfragen ungeklärt sind. Kaum eine Theorie hat über einen so langen Zeitraum immer wieder zu Kontroversen geführt. Für einige Physiker *kann* die Quantenmechanik nur eine effektive Theorie sein, die früher oder später durch eine zufriedenstellende Theorie ersetzt wird, wobei zu klären ist, was eine „zufriedenstellende“ Theorie eigentlich auszeichnet. Für andere Physiker ist die Quantenmechanik das Paradebeispiel einer gut funktionierenden fundamentalen Theorie.

Vom formalen Standpunkt betrachtet erfüllt die Quantenmechanik alle Kriterien einer guten Theorie:

- der mathematische Formalismus ist widerspruchsfrei und wohl verstanden,
- die Vorschriften für die Zuordnung zur physikalischen Realität sind eindeutig,
- die Quantenmechanik ist auf nahezu alle Systeme anwendbar, bevorzugt auf fundamentale Systeme mit wenigen Freiheitsgraden, grundsätzlich jedoch auf jeden begrenzten Teilbereich des Universums,
- und schließlich gibt es keinen Widerspruch zu irgendeinem experimentellen Ergebnis.

Den meisten Gegnern der Quantenmechanik fehlt eine „anschauliche“ Interpretation der mathematischen Größen, auf denen die Quantenmechanik aufgebaut ist, insbesondere der Wellenfunktion. Verfechter der Quantenmechanik halten dem entgegen, dass eine fundamentale Theorie der Mikrowelt auch nicht mit den Begriffen der Anschauung, wie wir sie im Alltag bzw. aus der klassischen Physik entwickelt haben, erklärbar sein muss. Mehr als eine Veranschaulichung des Formalismus selber sei nicht zu erwarten.

Andere Gegner der Quantenmechanik sehen innere Widersprüchlichkeiten, beispielsweise den unerklärbaren Kollaps der Wellenfunktion. Hier argumentieren die Verfechter, dass der

Kollaps ein Axiom der Quantenmechanik sei und insofern keiner Erklärung bedarf. Oder aber es wird angeführt, dass dieses Problem nur dann wirklich auftritt, wenn das gesamte Universum zum Gegenstand der Quantenmechanik gemacht wird. Für einige ist dies mit der statistischen Interpretation der Quantenmechanik nicht vereinbar. Andere wiederum stellen sich auf den Standpunkt, dass in diesem Fall der Kollaps auch gar nicht auftritt (Many-Worlds-Interpretation).

Verfechter der Quantenmechanik sind oft schwer davon zu überzeugen, dass es Grundlagenprobleme geben soll. Der Formalismus ist widerspruchsfrei, nahezu uneingeschränkt anwendbar und erfolgreich - mehr kann man nicht erwarten. Die Einwände der Kritiker werden oft als „metaphysisch“ angesehen, d.h., sowohl die Fragestellungen als auch die möglichen Antworten liegen nicht im Rahmen des quantenmechanischen Formalismus und können daher nicht Gegenstand wissenschaftlicher Argumentation sein. Umgekehrt sagen die Kritiker, dass gewisse Fragen für einen „suchenden“ Wissenschaftler einfach stellbar sein müssen, und wenn die Theorie ihre Beantwortung nicht zulässt, dann ist diese Theorie eben nicht „vollständig“ bzw. nicht „zufriedenstellend“.

Die folgende Liste fasst einige der Probleme der Quantenmechanik zusammen:

- Die Quantenmechanik basiert auf dem Begriff der Wahrscheinlichkeit, und zwar nicht aus Unkenntnis (wie die statistische Mechanik), sondern als fundamentales Prinzip.
- Aus diesem Grund widerspricht die Quantenmechanik dem „Prinzip des hinreichenden Grundes“ (Leibniz): Selbst jemand, der die Zusammenhänge „hinlänglich kennte“, kann nicht mit sagen, weshalb der Ausgang eines Experiments so und nicht anders war. Gerade dieser Aspekt macht den Philosophen oft sehr zu schaffen.
- Die Unsicherheiten in der Frage „Was ist Wahrscheinlichkeit?“ übertragen sich auch auf die Interpretation der Quantenmechanik: Interpretiert man Wahrscheinlichkeit ausschließlich im Sinne von „relativer Häufigkeit“, so wird man auf die so genannte Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik geführt. Lässt man auch eine „belief“-Interpretation von Wahrscheinlichkeit zu, so gelangt man zu einer subjektiven Deutung der Quantenmechanik.
- Die Quantenmechanik vermischt „Virtuelles“ (Möglichkeiten) mit „Reellem“. Der Übergang vom ersten zum zweiten ist undeutlich.
- Die Quantenmechanik beschreibt nicht den Übergang vom AND zum ODER (Bell). Dieses Problem hängt eng mit dem Problem des „Kollaps der Wellenfunktion“ zusammen.
- Die Quantenmechanik beinhaltet eine „spooky action at a distance“ (Einstein).
- Ist die Wellenfunktion bzw. der Zustandsbegriff der Quantenmechanik ontisch oder epistemisch? Wird hier nur auf besonders effektive und geschickte Weise unser Wissen über ein System zusammenfasst (rein epistemische Deutung), oder kommt dem Zustandsbegriff ein Seins-Charakter zu?
- Erfüllt die Quantenmechanik die Kriterien, die man von einer wirklich fundamentalen Theorie erwarten würde?

Diese Liste ist bei weitem nicht vollständig und würde auch von jedem Physiker anders formuliert und gewichtet werden.

Die Vorlesung hat im wesentlichen die folgenden Ziele:

- Die Formulierung der Grundlagen in einer Form, die für die Grundlagendiskussion angemessen ist, bzw. die von vielen Kritikern der Quantenmechanik benutzt wird.
- Die Analyse der quantenmechanischen Axiome in Bezug auf „Schwachstellen“.
- Einen Überblick über die bisherige Diskussion zu Grundlagenproblemen der Quantenmechanik und die Zusammenfassung der wichtigsten Meinungen.
- Ansätze für alternative Formulierungen zur Quantenmechanik sowie die Nachteile dieser Modelle und Einschränkungen an mögliche Modelle.

1.1 Historischer Überblick

Oftmals wird das Jahr 1927 als das Geburtsjahr der Quantenmechanik in ihrer heutigen Form bezeichnet. In diesem Jahr formulierten und verteidigten Bohr und Heisenberg auf der Solvay-Konferenz die statistische Deutung der Quantenmechanik. Heisenberg fand in diesem Jahr die Unbestimmtheitsrelation und Bohr prägte den Begriff der Komplementarität.

Das Jahr 1927 kennzeichnet somit einen ersten Abschluss der Suche nach einen neuen Theorie zur Beschreibung der Vorgänge im atomaren Bereich, hatte sich die sogenannte Kopenhagener Deutung doch durchgesetzt. Gleichzeitig wuchsen jedoch auch die Widerstände, insbesondere von Einstein, aber auch von Schrödinger und de Broglie, gegen die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik. Die Vorstellungen Schrödingers, „seine“ Wellenfunktion als eine Art „Ladungsdichteverteilung“ zu interpretieren, waren fehlgeschlagen. Doch schon im Jahre 1928 entwickelte de Broglie erste Ideen für eine „klassische“ Interpretation der Quantenmechanik mit verborgenen Variablen, die später in der „Führungsfeldtheorie“ von Bohm wieder aufgegriffen wurden.

1932 erschienen die *Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik* von von Neumann [62], wo er einen Beweis für die Unmöglichkeit von Theorien mit verborgenen Variablen präsentierte. Auch wenn viele Physiker diesen Beweis nicht verstanden - für damalige Verhältnisse war er sehr mathematisch -, so akzeptierten sie doch das Resultat und betrachteten die Frage nach einer Deutung der Quantenmechanik durch eine Theorie mit verborgenen Variablen als endgültig erledigt. Dabei hatte von Neumann selber in seinem Buch auf die Schwachstellen bei den Annahmen zu seinem Beweis hingewiesen. Und 1934 erschien ein Artikel von der Philosophin Grete Hermann über die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik [47], in dem sie explizit auf eine Annahme von Neumanns aufmerksam macht, die für eine physikalische Theorie nicht gefordert werden muss, und durch die ihrer Meinung nach die Einzigartigkeit der Quantenmechanik in den Beweis hineingeschmuggelt wird. Diese Einwände blieben jedoch größtenteils unbeachtet.

Im Jahre 1935 erscheint ein Artikel von Einstein, Podolsky und Rosen (kurz EPR), in der die Frage nach dem fundamentalen Charakter der Quantenmechanik und nach ihrer Vollständigkeit durch ein einfaches Gedankenexperiment auf den Punkt gebracht wird. Auch wenn die damalige Reaktion vieler Physiker eher sarkastisch war, hat kaum ein Experiment (heutzutage handelt es sich nicht mehr nur um ein Gedankenexperiment) die Gemüter und die Diskussion um die Quantenmechanik mehr angeregt. Hier treten die Schwachpunkte deutlich zu Tage, bzw. hier zeigt sich, welche Grenzen dem Physiker durch die Quantenmechanik bei seiner Beschreibung der Welt auferlegt sind.

Trotz des von Neumannschen Theorems versuchten einige wenige Physiker, die mehr „ihrem Bauch“ vertrauten als ihrem Kopf, eine akzeptablere Erklärung für den Formalismus der Quantenmechanik zu finden. 1952 gelang David Bohm [12] eine Erweiterung der Quantenmechanik mit verborgenen Variablen, die nicht im Widerspruch zur Quantenmechanik steht. Damit war gezeigt, dass solche Modelle möglich sind. Da umgekehrt die Arbeit Bohms aber sehr schwer verständlich war, und sein Modell in komplizierter Form von Annahmen zum Messprozess abhängig war, machte sich zunächst niemand die Mühe, nach dem Schlupfloch in dem Beweis von Neumanns zu suchen.

In den 50er und 60er Jahren versuchten mehrere Gruppen (unter anderem Jauch & Piron, sowie indirekt Gleason) den von Neumannschen Beweis dahingehend zu verschärfen, dass die Annahmen aus dem Bereich der Quantenmechanik auf ein Minimum eingeschränkt wurden. Erst 1966 fand J. Bell [8] die Lücke in den verschiedenen No-Go-Theoremen zu Theorien mit verborgenen Variablen, insbesondere in den von Neumannschen Annahmen. Damit wuchs gleichzeitig auch wieder die Anzahl der Physiker, die nach Theorien mit verborgenen Variablen zur Erklärung der Quantenmechanik suchten.

Einen großen Dämpfer erteilte jedoch J. Bell selber solchen Theorien 1964 [9] in Form seiner berühmten Ungleichungen. Hier wurde zum ersten Mal eine experimentell überprüfbare Vorhersage gemacht, die zwischen der Quantenmechanik und einer sehr großen Klasse von Theorien mit verborgenen Variablen unterschied. Die Experimente waren recht schwierig und die Ergebnisse lange Zeit nicht eindeutig. Erst Anfang der 80er Jahre zeigten die Resultate von Aspect [3, 4], dass die Ungleichungen in der Natur tatsächlich verletzt waren und somit die Quantenmechanik „Recht behielt“. Für viele Physiker waren diese experimentellen Ergebnisse ein großer Schock, hatten sie doch bis zuletzt geglaubt, hier einen Beweis *gegen* die Gültigkeit der Quantenmechanik in Händen zu halten.

Aber auch andere Deutungen der Quantenmechanik, ohne den Versuch einer Erweiterung, waren immer wieder aufgekommen. Insbesondere das Axiom des Kollapses der Wellenfunktion im Anschluss an eine Messung bereitete interpretatorische Schwierigkeiten. In Russland setzte sich unter dem Einfluss eines kollektiven, staatsgesteuerten materialistischen Denkens die sogenannte „Ensembleinterpretation“ durch, wonach die Quantenmechanik nicht auf Einzelsysteme anwendbar ist. Andere Physiker, zeitweise auch Heisenberg, sahen in der Wellenfunktion weniger ein Attribut eines quantenmechanischen Systems als den Ausdruck unseres Wissens über dieses System. Wieder andere, allen voran Wigner, glaubten hier den direkten Einfluss des menschlichen Bewusstseins zu erkennen.

Für manche Physiker war es wie die Zerschlagung des gordischen Knotens, als 1957 H. Ever-

ett und J.A. Wheeler eine Vorstellung entwarfen [33, 83], wonach der Kollaps der Wellenfunktion überhaupt nicht auftrat. In dieser sogenannten „Many-Worlds-Interpretation“ entwickelt sich die Wellenfunktion des Universums nur nach der Schrödinger-Gleichung. Für uns tritt scheinbar ein Kollaps auf, weil wir mit unseren Observablen die anderen Teile der Wellenfunktion (die anderen Universen) nicht mehr wahrnehmen können.

Doch was die einen Physiker als naheliegende Erklärung ansahen, wurde (und wird) von anderen als „vollkommen absurd“ abgelehnt. So ging die Suche nach alternativen Interpretationen der Quantenmechanik weiter. Trotz seiner weitreichenden Bedeutung für die Interpretation der Quantenmechanik wurde diese Idee erst 1970 durch Bruce deWitt aufgegriffen und populär gemacht. Die Anhänger der Many-Worlds-Interpretation finden sich bezeichnender Weise in erster Linie unter den Quantenkosmologen. Ein relativ moderner Ansatz aus den 80er Jahren ist die sogenannte „Consisten History“-Interpretation. Doch auch auch hier hat eine genauere Analyse in den letzten Jahren die alten Probleme wieder zu Vorschein gebracht.

Auch andere Aspekte des Messprozesses wurden in den vergangenen 20–30 Jahren eingehend untersucht. Dazu zählt das Problem der „Zeigerbasis“. Etwas lax ausgedrückt handelt es sich um die Frage, welche Eigenschaften einer Quantentheorie (ausgedrückt in den Hamilton-Operatoren) festlegen, bezüglich welcher Basis wir makroskopisch keine Superpositionen wahrnehmen. Ein anderes Problem beschäftigt sich mit der Frage, warum wir kein „Zerlaufen“ der Wellenfunktion, so wie es die Schrödinger-Gleichung beschreibt, beobachten. Teilchenspuren in Blasenkammern beispielsweise sind wesentlich lokalisierter, als es nach der Schrödinger-Gleichung sein sollte. Das Stichwort hier lautet „Dekohärenz“. In diesem Zusammenhang versucht man den Übergang von Systemen mit quantenmechanischem Verhalten zu klassischen Systemen besser zu verstehen.

Durch verschiedene experimentelle und theoretische Fortschritte ausgelöst, kam es in den vergangenen 20 Jahren zu einem neuen Boom in der quantenmechanischen Grundlagenforschung. Durch verbesserte Techniken ließen sich Experimente realisieren, die in den Gründerjahren der Quantenmechanik nur als „Gedankenexperimente“ galten. Außerdem erfuhr das Photon als experimentelles Quantenobjekt eine größere Bedeutung. Wurden früher viele Gedankenexperimente, wie das bekannte Doppelspaltexperiment, meist am Beispiel des Elektrons diskutiert, so erkannte man nun, dass das Photon sich für Grundlangenexperimente der Quantenmechanik oftmals weit besser eignet. Der Doppelspalt wurde durch das Mach-Zehnder-Interferometer ersetzt. Der neue Zweig der „Quantenoptik“ wurde gleichzeitig zum Spielfeld der Grundlagenforschung der Quantenmechanik.

Nicht zuletzt haben auch die neueren Bereiche der Quanteninformatik und die Möglichkeit von Quantenrechnern zur neueren Entwicklung beigetragen. Begriffe wie Quantenteleportation oder Quantenkryptologie haben für eine neuerliche Faszination für die Grundlagen der Quantenmechanik gesorgt. Gerade aus den 90er Jahren des letzten (20.) Jahrhunderts stammen viele modernere Versionen von „Gedankenexperimenten“, aus denen die scheinbaren Paradoxien der Quantenmechanik, sofern man sie mit klassischen Vorstellungen zu beschreiben versucht, noch deutlicher werden. Allen voran geht das Experiment von Greenberger, Horne und Zeilinger aus dem Jahre 1989. Aber auch die „Wechselwirkungsfreie Messung“ zählt dazu.

Damit wurden eingige der Grundlagenprobleme und Grundfragen in der Quantenmechanik

angesprochen, die in dieser Vorlesung eingehender behandelt werden sollen.

Kapitel 2

Grundlagen der Quantenmechanik

Dieses Kapitel behandelt Stoff, der zum größten Teil aus der Vorlesung zur Quantenmechanik bekannt sein sollte. Es dient daher in erster Linie als Auffrischung sowie zur Festlegung der Notation.

2.1 Der mathematische Formalismus der Quantenmechanik

(Reine) *Zustände* eines quantenmechanischen Systems werden durch Strahlen in einem separablen, komplexen Hilbert-Raum beschrieben. Ein solcher Strahl entspricht einem (komplex)-eindimensionalen linearen Teilraum. Als Repräsentant eines solchen Strahls dient meist ein Vektor Ψ, der in diesem Teilraum liegt. Zur Vereinfachung der Notation wird dieser Vektor oft auf Eins normiert. Vektoren, die sich nur um einen komplexen Faktor, bzw. Einheitsvektoren, die sich nur um eine Phase unterscheiden, repräsentieren somit denselben physikalischen Zustand.

Wir werden oft die Notation von Dirac benutzen und Vektoren in einem Hilbert-Raum durch „kets“ kennzeichnen: $|\Psi\rangle$. Auf einem komplexen Hilbert-Raum ist ein positiv-definites, hermitesches Skalarprodukt mit folgenden Eigenschaften definiert:

$$\begin{aligned} \langle \alpha\Phi|\Psi\rangle &= \bar{\alpha}\langle\Phi|\Psi\rangle \\ \langle\Phi|\Psi\rangle &= \overline{\langle\Psi|\Phi\rangle}\,. \end{aligned}$$

Wir werden auch endlich-dimensionale Vektorräume mit positiv-definitem Skalarprodukt als Hilbert-Raum bezeichnen. Es gehört zur Definition eines Hilbert-Raums, dass dieser für

unendlich-dimensionale Vektorräume abgeschlossen ist hinsichtlich der durch das Skalarprodukt definierten Norm

Nach dem Theorem von Riesz ist der Hilbert-Raum isomorph zu seinem Dualraum, d.h. zu jedem $f \in \mathcal{H}'$ gibt es ein $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}$, so dass

$$f(\Psi) \;=\; \langle\Phi|\Psi\rangle \;.$$

Anmerkung: Streng genommen haben wir bei der Einführung der Dirac-Notation schon vom Riesz'schen Theorem Gebrauch gemacht. Zunächst müsste man das Skalarprodukt $(,)$ zwischen zwei ket-Vektoren $|\Phi\rangle$ und $|\Psi\rangle$ in der Form $(|\Phi\rangle, |\Psi\rangle)$ schreiben. Doch wegen des Riesz'schen Theorems gibt es zu jedem „ket" $|\Phi\rangle$ ein eindeutiges „bra" $\langle\Phi|$ im Dualraum, sodass wir

$$(|\Phi\rangle, |\Psi\rangle) \simeq \langle\Phi|\Psi\rangle$$

schreiben dürfen. Im Folgenden werden wir diese Feinheiten in der Notation nicht mehr unterscheiden.

Der *adjungierte* Operator A^+ zu einem linearen Operator A ist definiert durch

$$\langle\Phi|A|\Psi\rangle \;\equiv\; \langle\Phi|A\Psi\rangle \;=\; \langle A^+\Phi|\Psi\rangle \;.$$

Ein Operator heißt *regulär*, wenn er mit seinem adjungierten kommutiert. Ein regulärer Operator lässt sich immer als Funktion eines selbstadjungierten Operators schreiben. Bekannte reguläre Operatoren sind die *unitären* Operatoren, für die

$$U^{-1} \;=\; U^+ \;.$$

Zu jedem unitären Operator U gibt es einen selbstadjungierten Operator H, so dass

$$U \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}H} \;.$$

Eine weitere wichtige Klasse von selbstadjungierten Operatoren sind die *orthogonalen Projektionsoperatoren*. Für sie gilt

$$P \;=\; P^+ \;, \quad P^2 \;=\; P \;.$$

Die Menge aller komplexen Zahlen λ, so dass $\lambda\mathbf{1} - A$ ein Inverses hat, bezeichnet man als *Resolvente* von A. Das Komplement der Resolvente ist sein *Spektrum*. Gibt es einen Vektor $\Phi \in \mathcal{H}$, so dass

$$A|\Phi\rangle \;=\; \lambda|\Phi\rangle \;,$$

so nennt man λ einen *Eigenwert* von A und $|\Phi\rangle$ einen zugehörigen *Eigenvektor*. Eigenwerte sind immer Teil des Spektrums eines Operators. Die Eigenwerte eines Operators bilden eine diskrete Menge.

Beispiel: Im Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen über der reellen Achse wählt man für den Ortsoperator meist die Darstellung als Multiplikationsoperator mit x. Dieser Operator hat die gesamte reelle Achse als Spektrum, allerdings keinen Eigenwert. Das Gleiche gilt in diesem Fall für den Impulsoperator, d.h. den Ableitungsoperator.

Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators ist reell. Für einen regulären Operator (und damit insbesondere für einen selbstadjungierten Operator) sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Das Spektrum eines Projektionsoperators besteht aus den Eigenwerten $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$. Jeder reguläre Operator, dessen Spektrum durch seine Eigenwerte gegeben ist, besitzt eine Zerlegung nach Projektionsoperatoren. Seien $\{\lambda_i\}$ die Eigenwerte des Operators A und $\{P_i\}$ die Projektionsoperatoren auf die zugehörigen Eigenräume, dann gilt

$$A \;=\; \sum_i \lambda_i P_i \;.$$

Die Verallgemeinerung für reguläre Operatoren mit kontinuierlichem Anteil im Spektrum führt auf eine Integraldarstellung, die wir aber nicht benötigen werden.

Der Erwartungswert eines Operators A im Zustand Φ ist

$$\langle A \rangle_\Phi \;=\; \frac{\langle \Phi | A | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} \;.$$

Sei $\{\Phi_i\}$ eine Basis des Hilbertraums, so nennt man

$$\mathrm{Spur}\, A \;\equiv\; \mathrm{tr}\, A \;=\; \sum_i \langle \Phi_i | A | \Phi_i \rangle$$

die Spur des Operators A (sofern die Summe existiert). Operatoren, für die diese Summe endlich ist, bezeichnet man als *spurklasse* Operatoren. Die Spur eines solchen Operators ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Ein Operator ρ, der folgenden Bedingungen genügt,

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^+ \\ \mathrm{Spur}\,(\rho A^+ A) &\geq 0 \quad \text{für alle } A \\ \mathrm{Spur}\,\rho &= 1 \;, \end{aligned}$$

heißt *Dichtematrix*. Dichtematrizen bilden *allgemeine Zustände*. Der Erwartungswert eines Operators in einem allgemeinen Zustand ist

$$\langle A \rangle_\rho \;=\; \mathrm{Spur}\,(\rho A) \;.$$

Projektionsoperatoren auf eindimensionale lineare Teilräume des Hilbert-Raums sind besondere Dichtematrizen, die den reinen Zuständen entsprechen. Sei Ψ ein normierter Vektor in diesem eindimensionalen Teilraum zum Projektionsoperator P_Ψ, so gilt

$$\mathrm{Spur}\,(P_\Psi A) \;=\; \langle \Psi | A | \Psi \rangle \;=\; \langle A \rangle_\Psi \;.$$

2.2 Die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik

Wir werden später noch eingehender auf verschiedene Interpretationen der Quantenmechanik eingehen (Kap. 11) und bei dieser Gelegenheit auch die Kopenhagener Deutung nochmals behandeln. Hier wollen wir eher das Kochrezept angeben, das sich aus der Kopenhagener Deutung

ergibt und das es erlaubt, den mathematischen Formalismus mit der Physik, insbesondere mit den Ergebnissen physikalischer Experimente, in Verbindung zu bringen.

1. (Reine) physikalische Zustände werden durch eindimensionale Teilräume eines separablen Hilbert-Raums dargestellt. Ein normierter Vektor $|\Phi\rangle$ dieses Teilraums kann als Repräsentant dieses Zustands dienen.

2. Die Observablen an einem physikalischen System werden durch die selbstadjungierten Operatoren des Hilbert-Raumes dargestellt. Orts- und Impulsoperator erfüllen dabei folgende Bedingung:
$$[Q, P]0\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\mathbf{1}\,.$$

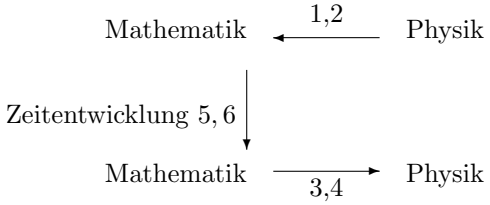
3. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators entspricht den möglichen Messwerten einer Messung der zugehörigen Observablen an dem System.

4. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Observablen zu einem Operator A im Zustand $|\Phi\rangle$ den Messwert λ mit zugehörigem Eigenvektor $|\lambda\rangle$ zu finden, ist gleich
$$|\langle\lambda|\Phi\rangle|^2\,.$$

5. Die ungestörte Zeitentwicklung eines abgeschlossenen quantenmechanischen Systems wird durch die Schrödinger-Gleichung,
$$-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Phi\rangle \;=\; H|\Phi\rangle\,,$$
beschrieben, wobei H der Energieoperator des Systems ist.

6. Nach einer Messung der Observablen A an einem physikalischen System und dem Ergebnis λ als Messwert befindet sich das physikalische System in dem zugehörigen Eigenzustand $|\lambda\rangle$.

Im Folgenden wollen wir die einzelnen Axiome kurz erläutern. Ganz allgemein geben die Axiome 1 und 2 an, wie wir ein physikalisches System in den mathematischen Formalismus zu übertragen haben. Axiome 3 und 4 sagen uns, wie wir bestimmte Resultate im mathematischen Formalismus physikalisch zu deuten haben. Und die Axiome 5 und 6 schließlich spezifizieren, wodurch die Zeitentwicklung des quantenmechanischen Systems mathematisch repräsentiert wird.



2.2.1 Die allgemeine Zuordnungsvorschrift: Axiom 1 und 2

Die Punkte 1 und 2 machen eine allgemeine Aussage darüber, durch welche mathematischen Objekte die physikalischen Objekte „Zustand“ und „Observable“ dargestellt werden. Durch diese beiden Punkte ist jedoch noch keine Zuordnungsvorschrift definiert. Da nach einem mathematischen Theorem alle unendlichdimensionalen separablen Hilbert-Räume isomorph sind, unterscheiden sich verschiedene physikalische Systeme also nicht in ihrem Hilbert-Raum, sondern in der Darstellung ihrer Observablen auf diesem Hilbert-Raum. Oftmals legt jedoch eine bestimmte physikalische Situation auch eine bestimmte Darstellung des Hilbert-Raumes nahe.

Zunächst ist zu klären, was ein „physikalischer Zustand“ und eine „physikalische Observable“ überhaupt sind. Unter einer physikalischen Observablen versteht man im Allgemeinen eine Äquivalenzklasse von Messvorschriften an einem physikalischen System Zwei Messvorschriften sind dabei äquivalent, wenn sie immer dieselben Messergebnisse liefern. Der Begriff des physikalischen Zustands wird meist über die Observablen definiert: Zwei Systeme befinden sich in demselben physikalischen Zustand, wenn die Erwartungswerte aller Observablen an diesen beiden Systemen gleich sind. Ein Zustand ist somit durch die Erwartungswerte sämtlicher Observablen definiert. Diese Definition basiert somit darauf, wie sich uns Zustände *zeigen*, nicht, was Zustände *sind*.

Eine interessante Eigenschaft von Quantensystemen ist, dass sämtliche Observable, die klassisch sinnvoll sind, auch quantenmechanisch sinnvolle Observable zu sein scheinen. Dazu zählen insbesondere der Ort, der Impuls, der Drehimpuls und die Energie. Darüberhinaus gibt es noch weitere Observable, die klassisch nicht existieren, beispielsweise der Spin. Die Zuordnungsvorschrift von klassischen Observablen zu selbstadjungierten Operatoren erfolgt über die kanonischen Vertauschungsrelationen für den Orts- und Impulsoperator, Q und P:

$$[Q, P] \;=\; \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\mathbf{1}\,.$$

Bei vektoriellen Größen bzw. bei Mehrteilchensystemen hat man entsprechend mehrere Komponenten bzw. mehrere Orts- und Impulsoperatoren:

$$[Q_i, P_j] \;=\; \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta_{ij}\,\mathbf{1}\,,\quad [Q_i, Q_j] \;=\; [P_i, P_j] \;=\; 0\,.$$

Die folgende „Herleitung“ der kanonischen Vertauschungsrelationen ist mathematisch nicht ganz rigoros, da es im Hilbert-Raum keine Eigenzustände $|x\rangle$ zum Ortsoperator gibt. Eine rigorose Herleitung ist aber mit einigem mathematischen Aufwand kein Problem.

Wir gehen aus von Zuständen $|x\rangle$, die die Relation

$$Q|x\rangle \;=\; x|x\rangle$$

erfüllen, also als Eigenzustände des Ortsoperators interpretiert werden können. Es gebe einen Translationsoperator $U(\alpha)$ mit der Eigenschaft

$$U(\alpha)|x\rangle \;=\; |x+\alpha\rangle\,.$$

Dann folgt offensichtlich:

$$\begin{aligned} QU(\alpha)|x\rangle &= (x+\alpha)U(\alpha)|x\rangle \\ U(\alpha)Q|x\rangle &= xU(\alpha)|x\rangle \ , \end{aligned}$$

bzw.

$$[QU(\alpha) - U(\alpha)Q]|x\rangle \ = \ \alpha U(\alpha)|x\rangle \ .$$

Da diese Relation für alle $|x\rangle$ gültig ist, also für eine vollständige Basis von Zuständen, gilt sie generell:

$$QU(\alpha) - U(\alpha)Q \ = \ \alpha U(\alpha) \ . \tag{2.1}$$

$U(\alpha)$ ist eine unitärer Darstellung einer 1-parametrigen Gruppe. Wir können in diesem Fall den Generator dieser Transformationen definieren:

$$P \ := \ \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial\alpha} U(\alpha)\Big|_{\alpha=0} \ .$$

Ableitung von Gl. 2.1 nach α an der Stelle $\alpha = 0$ führt auf die Relation:

$$QP - PQ \ = \ \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \ .$$

Neben den Axiomen 1 und 2 des quantenmechanischen Formalismus haben wir also vorausgesetzt, dass der Impulsoperator der Generator der Ortsraumtranslationen ist. Das entspricht aber auch seiner klassischen Interpretation: *Wenn* ein Lagrange-System invariant unter räumlichen Translationen ist, dann gibt es eine Erhaltungsgröße, die wir als Impuls bezeichnen. Diese Größe ist der Generator der Translationen. Den Impuls gibt es natürlich auch, wenn keine Invarianz vorliegt, aber dann ist er auch keine Erhaltungsgröße.

Jeder klassischen Observablen, d.h. jeder Funktion $f(x,p)$ auf dem Phasenraum, lassen sich nun selbstadjungierte Operatoren $F(Q,P)$ zuordnen, wobei diese Zuordnung wegen der möglichen Reihenfolge der Operatoren nicht eindeutig ist. So entsprechen die drei Operatoren

$$QPQ \ , \ \ \frac{1}{2}\left(Q^2P + PQ^2\right) \ , \ \ \frac{1}{3}\left(Q^2P + QPQ + PQ^2\right)$$

derselben klassischen Observablen x^2p. Die manchmal geforderte Bedingung, wonach die klassische Poisson-Algebra

$$\{f(x,p), g(x,p)\} \ = \ h(x,p)$$

durch die Kommutatoralgebra

$$[F(Q,P), G(Q,P)] \ = \ -\frac{\hbar}{\mathrm{i}} H(Q,P)$$

zu ersetzen ist, lässt sich nach dem Groenewald-van Hove Theorem nicht konsistent durchführen. Man kann lediglich die Bedingung

$$[F(Q,P), G(Q,P)] \ = \ -\frac{\hbar}{\mathrm{i}} H(Q,P) \cdot \left[1 + O(\hbar)\right]$$

fordern, hat in diesem Fall aber viele Freiheiten.

Hat man die physikalischen Observablen durch selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbert-Raum dargestellt, so sagt uns Punkt 6 der obigen Liste, wie wir die Zuordnung der Zustände vorzunehmen haben: Nach einer Messung befindet sich ein physikalisches System in dem entsprechenden Eigenzustand.

Wir sollten betonen, daß wir durch obige Vorschrift zwar eine Darstellung der „klassischen“ Observablen in einem Hilbert-Raum gefunden haben, es wurde jedoch nicht geklärt, durch welche physikalische Messanordnung diese Observable zu bestimmen ist. In der klassischen Mechanik müssen wir nur wissen, wie wir an einem System eine Orts- und Impulsmessung vornehmen können, dann können wir auch eine beliebige Funktion des Ortes und des Impulses messen. Dies gilt in der Quantenmechanik jedoch nicht mehr, da die Orts- und Impulsmessung nicht mehr vertauschen. Beispielsweise hat die Vorschrift zur Messung der Energie eines Wasserstoffatoms nichts mit den Orts- und Impulsmessungen zu tun, wie sie sich aus der Kombination $H = \frac{1}{2m}P^2 - \frac{e^2}{|Q|}$ ergeben. Auf dieses Problem werden wir noch mehrfach zurückkommen.

Abschließend wollen wir kurz darauf eingehen, wie wir eine geeignete Darstellung für den Hilbert-Raum erhalten. Manche Probleme lassen sich rein algebraisch lösen, also ausgehend von den kanonischen Vertauschungsrelationen und dem als bekannt vorausgesetzen Hamilton-Operator, ausgedrückt durch Orts- und Impulsoperatoren. Beispiele sind der harmonische Oszillator und das Coulomb-Problem. In diesem Fall läßt sich das Spektrum des Hamilton-Operators aus den Vertauschungsrelationen ableiten und somit auch eine Energie- bzw. Besetzungszahlbasis finden. In anderen Fällen ist es einfacher, von einer geeigneten Darstellung des Hilbert-Raums und der kanonischen Vertauschungsrelationen zu beginnen. Üblicherweise wählt man meist die Ortsdarstellung: $Q \simeq x$ und $P \simeq \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial/\partial x$, bzw. $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(M)$, wobei M der klassische Konfigurationsraum des bzw. der Teilchen ist. Beispielsweise für das Kastenpotential,

$$H \;=\; \frac{P^2}{2M} + V(Q) \qquad \text{mit} \;\; V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \le L/2 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \;,$$

ist es sinnvoll, als Hilbert-Raum die Menge der integrablen Funktionen zu wählen, die auf dem Rand und außerhalb des Intervalls $[-L/2, L/2]$ verschwinden, da die Potentialbedingung in diesem Fall automatisch erfüllt ist. In diesem Fall führt die konkrete Darstellung der Operatoren auf Differentialgleichung für die Eigenwertprobleme.

2.2.2 Konkrete Interpretationsvorschriften: Axiom 3 und 4

Punkt 3 und 4 konkretisieren die Beziehungen zwischen bestimmten mathematischen Größen - den Eigenwerten eines Operators und dem Skalarprodukt zwischen zwei Zuständen - und physikalischen Größen und bilden damit die Grundlage zur Interpretation des Formalismus. Punkt 3 macht eine Aussage über die möglichen Messwerte einer Observablen und Punkt 4 sagt uns, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser Messwert in einem Zustand Φ gemessen wird. Hier liegt die eigentliche *statistische* Interpretation der Quantenmechanik. Dem Skalarprodukt $\langle\Psi|\Phi\rangle$ wird dabei selber keine unmittelbare Bedeutung zugeschrieben (der Begriff „Wahrscheinlichkeitsamplitude“ ist nur eine Bezeichnung ohne eine direkte physikalische Interpretation), sondern nur seinem Absolutquadrat.

Statt Punkt 3 und 4 hätten wir auch fordern können, dass für alle Observablen A und alle Zustände $|\Phi\rangle$ der Erwartungswert der Observablen A in dem Zustand $|\Phi\rangle$ durch

$$\langle A\rangle_\Phi \;=\; \langle\Phi|A|\Phi\rangle$$

gegeben ist. Für den Spezialfall

$$A \;=\; P_\psi \;=\; |\psi\rangle\langle\psi|$$

erhalten wir:

$$\langle\Phi|P_\psi|\Phi\rangle \;=\; |\langle\Phi|\psi\rangle|^2\,,$$

also Axiom 4. Für einen Eigenzustand $|\lambda\rangle$ von A zum Eigenwert λ folgt

$$\langle\lambda|A|\lambda\rangle \;=\; \lambda\,,$$

d.h. in diesem Fall ist der Erwartungswert gleich dem Eigenwert, was Axiom 3 entspricht. Allgemeiner seien $\{\lambda_i\}$ die Eigenwerte von A und $|\lambda_i\rangle$ die zugehörigen Eigenvektoren, so gilt:

$$\langle\Phi|A|\Phi\rangle \;=\; \sum_i \lambda_i |\langle\lambda|\Phi\rangle|^2\,.$$

2.2.3 Zeitentwicklung in der Kopenhagener Interpretation: Axiom 5 und 6

Die Punkte 5 und 6 sagen etwas über die zeitliche Entwicklung eines Systems aus. Nach Punkt 5 erfolgt die ungestörte Entwicklung eines quantenmechanischen Systems nach der Schrödinger-Gleichung. Diese Entwicklung ist hinsichtlich der Zustände deterministisch. Punkt 6 beschreibt, was bei einer Wechselwirkung des zu untersuchenden Systems mit der makroskopischen Messapparatur (oder allgemeiner einem klassischen System) geschieht. Das Problem, inwieweit sich Punkt 6 aus Punkt 5 herleiten lässt, wenn man das Messgerät als Teil des physikalischen Systems auffasst, wird uns noch eingehender beschäftigen (vgl. Abschnitt 10).

Die Axiome 4 und 6 machen die eigentliche Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik aus. Alle anderen Axiome werden grundsätzlich von allen Interpretationen geteilt. Axiom 4 betont dabei den statistischen Charakter der Interpretation. Axiome 6 verdeutlicht, dass die Kopenhagener Deutung ganz wesentlich von der Aufteilung der Welt in ein Quantensystem und den klassischen Rest abhängt. Die Interpretation der Quantenmechanik basiert eher auf der klassischen Physik als umgekehrt, wie man es von einer fundamentalen Theorie eigentlich erwarten würde. Daher gehen die meisten Bestrebungen heute dahin, diesen Punkt 6 aus der Quantenmechanik heraus zu verstehen. Damit eng verbunden sind auch die bekannten Fragen nach dem Kollaps der Wellenfunktion und der Anwendbarkeit der Quantenmechanik auf das gesamte Universum.

2.3 Superauswahlregeln

Auswahlregeln kennt man als Physiker in erster Linie aus dem Bereich der Atomphysik, wo damit eine Gruppe von Regeln bezeichnet werden, die Einschränkungen an die erlaubten

Übergänge zwischen verschiedenen elektronischen Zuständen in der Atomhülle darstellen. Meist ist eine Symmetrie des Hamilton-Operators für diese Regel verantwortlich, d.h., die verbotenen Übergänge würden die Erhaltungsgrößen zu dieser Symmetrie verletzen. Sei H der Hamilton-Operator der Elektronen in der Atomhülle, einschließlich ihrer Wechselwirkung mit Strahlung, d.h. der Emission und Absorbtion von Photonen, so ist ein Übergang von einem Zustand $|\alpha\rangle$ zu einem dazu orthogonalen Zustand $|\beta\rangle$ verboten, wenn

$$\langle\beta|H|\alpha\rangle \;=\; 0\,.$$

($|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ sind Zustände der Atomhülle. Der Gesamtzustand ist eigentlich $|\alpha\rangle\otimes|Photonen\rangle$.) Aus dieser Bedingung folgt nämlich für die Zeitentwicklung:

$$\langle\beta|\exp\left(-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}Ht\right)|\alpha\rangle = \langle\beta|\mathbf{1}|\alpha\rangle = 0\,.$$

Auswahlregeln beziehen sich also darauf, dass die Dynamik des Systems, ausgedrückt durch den Hamilton-Operator, gewisse Übergänge zwischen Zuständen nicht zulässt. Anders ausgedrückt: Auswahlregeln erhält man, wenn *Symmetrien* vorliegen, d.h., wenn es Observable G gibt, die den Generatoren einer Symmetriegruppe entsprechen, und für die gilt:

$$[H,G] = 0\,.$$

Superauswahlregeln bilden eine Verallgemeinerung dieses Sachverhalts. In diesem Fall gibt es keine physikalisch realisierbare Messvorschrift - bzw. allgemeiner, keine physikalisch realisierbare experimentelle Anordnung -, so dass ein Übergang von einer Klasse von Zuständen $\{|\alpha\rangle\}$ in eine Klasse von Zuständen $\{\beta\rangle\}$ möglich wird. Für alle selbstadjungierten Operatoren A, die physikalisch realisierbaren experimentellen Anordnungen entsprechen, gilt somit

$$\langle\beta|A|\alpha\rangle \;=\; 0\,.$$

In diesem Fall gibt es selbstadjungierte Operatoren Q, die mit sämtlichen Observablen A des Systems kommutieren:

$$[A,Q] = 0\,.$$

Diese Observablen Q kommutieren also insbesondere auch mit dem Hamilton-Operator, daher bezeichnet man sie ebenfalls oft als Generatoren zu einer Symmetrie. Doch in diesem Fall liegt mehr vor, als eine gewöhnliche Symmetrie; man sollte eher von einer *Redundanzsymmetrie* sprechen. Eine solche Redundanzsymmetrie liegt immer dann vor, wenn die Beschreibung der Zustände des Systems Parameter enthalten, die prinzipiell nicht beobachtbar sind und damit die Zustände „überbeschreiben“. (Beispielsweise ist die absolute Phase eines Einheitsvektors im Hilbert-Raum – also eines Repräsentaten eines Zustands – eine solche Variable.) Ob eine Symmetrie oder eine Redundanzsymmetrie vorliegt, d.h., ob es solche experimentellen Anordnungen gibt oder nicht, ist eine Erfahrungstatsache.

Im Allgemeinen wird im Formalismus der Quantenmechanik angenommen, dass es zu jedem selbstadjungierten Operator auf dem Hilbert-Raum auch eine Messvorschrift gibt, die durch diesen Operator repräsentiert wird. Gibt es jedoch Superauswahlregeln, so ist dies nicht der Fall. Der Hilbert-Raum zerfällt dann meist in Klassen von Zuständen, zwischen denen es keinerlei

Übergänge geben kann, und die Operatoren, die physikalischen Prozessen entsprechen, haben eine verallgemeinerte Blockdiagonalgestalt.

Bekannte Beispiele für Superauswahlregeln sind

1. Die elektrische Ladungserhaltung:
   Durch kein Experiment kann Ladung erzeugt oder vernichtet werden. Zustände zu verschiedener elektrischer Ladung gehören damit verschiedenen Klassen an und die Matrixelemente aller Observablen zwischen Zuständen verschiedener Klassen verschwinden.
2. Die Fermionenzahl modulo 2:
   Es ist keine Wechselwirkung bekannt, die aus einem Zustand mit einer geraden Fermionenzahl einen Zustand mit einer ungeraden Fermionenzahl macht. Die physikalischen Zustände zerfallen hier in zwei Klassen, so dass für alle Observable die Matrixelemente zwischen Zuständen aus verschiedenen Klassen verschwinden.

Da streng genommen sämtliche Messvorschriften bzw. Observable auf physikalischen Prozessen beruhen, die sich durch einen geeigneten Hamilton-Operator beschreiben lassen, handelt es sich auch bei Superauswahlregeln um Einschränkungen an mögliche Hamilton-Operatoren. Daher hängen Superauswahlregeln mit exakten Symmetrien des fundamentalen Hamilton-Operators der Teilchenphysik zusammen (einschließlich gravitativer Effekte), da letztendlich sämtliche Prozesse auf diesen Hamilton-Operator zurückgeführt werden können.

Bei den Auswahlregeln zur Atomphysik beschränkt man sich auf einen ganz bestimmten Hamilton-Operator, nämlich denjenigen, der neben den Elektronen noch die elektromagnetische Strahlung berücksichtigt. Oftmals handelt es sich bei den Auswahlregeln sogar um einen Effekt „führender Ordnung“ in der elektromagnetischen Kopplungskonstanten: Es wird nur ein Ein-Photon-Prozess berücksichtig. Superauswahlregeln beziehen sich jedoch auf sämtliche realisierbaren Hamilton-Operatoren und können daher in keinem Prozess verletzt werden.

Wenn sämtliche selbstadjungierten Operatoren auch physikalischen Observablen entsprechen, dann ist die Observablenalgebra irreduzibel. Das bedeutet insbesondere, dass es abgesehen von den komplexen Vielfachen des Einheitsoperators keinen Operator gibt, der mit allen Observablen kommutiert. Dies gilt nicht mehr im Falle von Superauswahlregeln. Ein Operator, der auf jeder Klasse von Zuständen, zwischen denen gewisse Observablen nicht verschwinden, konstant ist, aber der auf verschiedenen Klassen auch verschiedene Werte annimmt, kommutiert mit allen Observablen. Im Fall der elektrischen Ladungserhaltung kommutiert der Ladungsoperator Q mit allen Observablen, im Fall der Fermionenzahlerhaltung modulo 2 der Fermionenzahloperator mod 2: $(-1)^F$. Beide Operatoren sind keine Vielfache des Identitätsoperators, die Observablenalgebra ist somit reduzibel.

Gibt es Superauswahlregeln, so hört man oft, dass Zustände zu verschiedenen Klassen nicht superponiert werden können. Seien $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ Zustände aus verschiedenen Klassen bezüglich der Superauswahlregel, so bedeutet diese Aussage, dass es den Zustand

$$|\Phi\rangle \;=\; a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle$$

nicht gebe. Diese Aussage ist in dieser Strenge falsch, bzw. sie kann nicht überprüft werden. Die korrektere Aussage ist, dass ein solcher reiner Zustand von keiner physikalischen Observablen

von einem Gemisch unterschieden werden kann. Betrachten wir beispielsweise den Erwartungswert einer Observablen in diesem Zustand, so gilt:

$$\langle\Phi|A|\Phi\rangle \;=\; |a|^2\langle\alpha|A|\alpha\rangle + |b|^2\langle\beta|A|\beta\rangle \;=\; \text{Spur}\, A\rho$$

mit

$$\rho \;=\; |a|^2|\alpha\rangle\langle\alpha| + |b|^2|\beta\rangle\langle\beta| \;.$$

Die gemischten Terme verschwinden, da nach Voraussetzung für alle Observablen $\langle\alpha|A|\beta\rangle = 0$ gilt. Der reine Zustand $|\Phi\rangle$ und der gemischte Zustand ρ sind somit physikalisch nicht unterscheidbar. Eine andere, dazu äquivalente Aussage, ist, dass die relative Phase zwischen den beiden Anteilen des Zustands $|\Phi\rangle$ nicht gemessen werden kann.

Gemischte Zustände mit Anteilen verschiedener Ladungszahl treten in der Physik durchaus auf. So enthält der statistische Operator für die großkanonische Gesamtheit geladener Teilchen eine Summation über alle Ladungszahlen.

Abschließend wollen wir noch auf den Zusammenhang zwischen Superauswahlregeln und Eichsymmetrien eingehen. Die Ladungserhaltung ist ja die Folge einer Symmetrie, die im Standardmodell der Teilchenphysik als Eichsymmetrie implementiert ist, nämlich der Invarianz des Hamilton-Operators unter Multiplikation der Felder mit einer (ortsabhängigen) Phase. Die Tatsache, dass sämtliche Observablen, d.h. sämtliche konstruierbaren Hamilton-Operatoren, mit einer nicht-trivialen Größe vertauschen (s.o.) bedeutet, dass diese Größe eine Erhaltungsgröße ist. Zu einer solche Erhaltungsgröße gehört auch eine Symmetrie, die von dieser Erhaltungsgröße generiert wird.

Doch warum sollte es sich bei dieser Symmetrie um eine Eichsymmetrie handeln? Die folgenden Argumente sind eher anschaulich, da die strenge mathematische Rechtfertigung des Zusammenhangs zwischen Superauswahlregeln und Eichsymmetrien recht aufwendig ist.

Wie schon früher erwähnt, sollte man eigentlich den Begriff der Eichsymmetrie schärfer unterteilen. Insbesondere sollte man zwischen „Symmetrie“ und „Redundanzsymmetrie“ unterscheiden. „Symmetrie“ bezieht sich auf eine Eigenschaft des Hamilton-Operators eines Systems. Wenn der Hamilton-Operator mit den Transformationen einer Gruppe vertauscht, dann bezeichnet man diese Gruppe als Symmetriegruppe. Beispielsweise ist der Hamilton-Operator des Coulomb-Problems rotationsinvariant. Die zugehörige Erhaltungsgröße ist der Drehimpuls, also der Generator der Rotationen. Das bedeutet aber nicht, dass sämtliche Zustände des Coulombproblems ebenfalls rotationsinvariant sind. Im Gegenteil, die Zustände lassen sich nach den Quantenzahlen des Drehimpulsoperators klassifizieren, und da treten natürlich auch Zustände zu nichtverschwindendem Drehimpuls auf. Solche Zustände sind aber nicht *invariant* unter Rotationen, sondern transformieren sich lediglich in einer ganz bestimmten Weise.

Doch wie kommt es, dass wir Zustände zu verschiedenem Drehimpuls überhaupt unterscheiden können, wenn doch der Hamilton-Operator invariant ist? Der Grund ist, dass nicht sämtliche Hamilton-Operatoren in der Natur rotationsinvariant sind. Wir besitzen Observable, mit denen wir Zustände zu verschiedenem Drehimpuls unterscheiden können. D.h., obwohl $[H, L] = 0$, gilt nicht generell $[A, L] = 0$ für alle Observablen A. Die Emission oder Absorption von Photonen kann beispielsweise Übergänge zwischen Zuständen zu verschiedenem Drehimpuls induzieren, und diese Strahlung können wir wahrnehmen. Doch die Drehimpulserhaltung gilt doch auch

für das Gesamtsystem Atom + Strahlung? Das ist richtig, aber wir können die Strahlung und das Atom getrennt wahrnehmen. Die Drehimpulserhaltung gilt nicht für die Einzelsysteme. Die Rotationssymmetrie ist eben keine lokale Symmetrie.

Bei einer lokalen Symmetrie sind die Verhältnisse anders. Hier gilt die Invarianz lokal. Daher können wir in diesem Fall auch nur invariante Zustände beobachten. „Redundanzsymmetrie“ bedeutet, dass man zur Beschreibung eines Systems eigentlich Freiheitsgerade benutzt, die physikalisch nicht unterscheidbar bzw. beobachtbar sind. Genau dies ist bei Superauswahlregeln der Fall: bestimmte Freiheitsgrade eines Systems - beispielsweise die Phase der Wellenfunktion - sind durch keine Observable beobachtbar. Zustände, die bezüglich dieser Symmetrie zu verschiedenen Darstellungen gehören, lassen sich daher durch keinen physikalischen Prozess ineinander überführen.

Kapitel 3

Observable und Zustände

Die Begriffe „Observable“ und „Zustand“ sind grundlegende Begriffe der Quantenmechanik. Wir kennen sie auch aus der klassischen Mechanik, der statistischen Mechanik oder der Thermodynamik, aber dort nehmen sie nicht die zentrale Rolle ein wie in der Quantenmechanik.

3.1 Observable und Messvorschrift

Streng genommen sollte man zwischen der „Observablen“ und der zugehörigen „Messvorschrift“ unterscheiden. Eine Messvorschrift ist eine experimentelle Vorgabe, wie ein bestimmtes Experiment aufzubauen und durchzuführen ist. Als Ergebnis dieses Experiments erhält man ein Messergebnis. In den meisten Fällen tritt ein System M (das Messinstrument) mit einem anderen System O (dem zu untersuchenden Quantensystem) in Wechselwirkung. Als Ergebnis dieser Wechselwirkung hat das Messinstrument seinen Zustand in beobachtbarer Weise verändert: Es zeigt einen Messwert an. Diese Bedingung kennzeichnet das Messinstrument als klassisches System: Bestimmte Freiheitsgrade dieses Systems (die „Zeigerstellung“) müssen sich unmittelbar beobachten lassen, ohne diese Freiheitsgrade zu beeinflussen.

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik müssen wir in der Quantenmechanik davon ausgehen, dass die Wechselwirkung, die bei einer Observablen zwischen Messinstrument und System stattfindet, auch den Zustand des Systems verändert. Dabei benutzen wir den Begriff „Zustand“ noch in einem naiven Sinn als eine Aussage über die Beschaffenheit eines Systems. Wir werden später den Begriff des Zustands noch genauer definieren.

Eine Observable ist ein mathematisches Objekt, das eine Messvorschrift repräsentiert. Im Allgemeinen wird eine Observable A zweierlei machen: Sie transformiert einen Zustand Ψ_i in einen anderen Zustand Ψ_a, und sie liefert einen Messwert a:

$$A \;:\; \Psi_i \;\longrightarrow\; (\Psi_a, a)\;.$$

Der Messwert a wird dabei als Eigenschaft des Endzustands Ψ_a verstanden und nur bedingt als

Eigenschaft des Ausgangszustands Ψ_i. Derselbe Zustand Ψ_i kann bei derselben Messvorschrift A auch einen anderen Messwert b und einen anderen Endzustand Ψ_b liefern. Daher ist es auch ungeschickt, hier von einer „Messung“ zu sprechen, denn über den Zustand Ψ_i kann oftmals überhaupt nichts ausgesagt werden. Man sollte eigentlich von der „Präparierung“ eines Systems sprechen. Der Messwert a sagt uns, in welchem Zustand Ψ_a das System durch die Durchführung der Messvorschrift zu der Observablen A präpariert wurde.

Auf eine genaue Analyse des „Messprozesses“ werden wir noch eingehen. Wir wollen uns hier zunächst mit den Eigenschaften von Observablen und der Definition von Zuständen beschäftigen. Dabei gehen wir zunächst von der mathematischen Definition aus und werden anschließend die physikalische Bedeutung untersuchen.

Um die Unterscheidung zwischen der Messvorschrift und der zugehörigen Observablen noch deutlicher werden zu lassen, betrachten wir zwei verschiedene physikalische Systeme, die aber durch denselben Formalismus beschrieben werden: System (1) bestehe aus zwei 1-dimensionalen harmonischen Oszillatoren (beispielsweise zwei unabhängige aber gleichartige Federn, an denen jeweils gleiche Massen hängen), System (2) bestehe aus einem 2-dimensionalen harmonischen Oszillator (beispielsweise einer Kugel in einem 2-dimensionalen harmonischen Oszillatorpotenzial). Beide Systeme lassen sich durch die Ortsoperatoren Q_1, Q_2 und Impulsoperatoren P_1, P_2 beschreiben, und der Hamilton-Operator, ausgedrückt durch die Orts- und Impulsoperatoren, ist

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{\omega^2}{2}(Q_1^2 + Q_2^2)\,.$$

Die beiden physikalischen Systeme sind sehr verschieden, und auch die Messvorschriften für die Orte bzw. Auslenkungen und Impulse sind verschieden. Trotzdem werden beide Systeme durch dieselbe Algebra von Observablen beschrieben.

3.2 Observable als C^*-Algebra

Angenommen, wir kennten sämtliche Observable $A, B, C, ...$ eines Systems. Es handelt sich in diesem Fall um eine Menge. Können wir dieser Menge noch weitere Strukturen geben?

In der Physik wird oft postuliert, dass die Menge der Observablen die Struktur einer C^*-Algebra besitzt. Dies ist sicherlich der Fall für die Observablen der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik. Daher wollen wir die Axiome einer C^*-Algebra kurz zusammenfassen.

Definition: Eine komplexe *Algebra* A ist ein komplexer Vektorraum mit einer assoziativen und distributiven Multiplikation. Außerdem soll zur Multiplikation ein Eins-Element existieren.

Damit gelten in einer Algebra folgende Relationen:
Vektorraumaxiome, für alle $a, b, c \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a + (b + c) &= (a + b) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a+0 &= a \\ a+(-a) &= 0 \\ \lambda(a+b) &= \lambda a+\lambda b \\ \lambda(\gamma a) &= (\lambda\gamma)a \end{aligned}$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} (a\cdot b)\cdot c &= a\cdot(b\cdot c) \\ 1\cdot a &= a\cdot 1 = a \\ a\cdot(b+c) &= a\cdot b+a\cdot c \\ \lambda(a\cdot b) &= (\lambda a)\cdot b\,. \end{aligned}$$

Definition: Eine *normierte* Algebra ist eine Algebra mit eine Norm, d.h. einer Abbildung $\|\ \| : A \to \mathbf{R}$ mit

$$\begin{aligned} \|a\| &\geq 0 \\ \|\lambda a\| &= |\lambda|\|a\| \\ \|a+b\| &\leq \|a\|+\|b\| \\ \|a\cdot b\| &\leq \|a\|\|b\|\,. \end{aligned}$$

Definition: Eine **-Algebra* ist eine Algebra mit einer Involution, d.h. einer Abbildung $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit

$$\begin{aligned} (a^*)^* &= a \\ (\lambda a)^* &= \bar{\lambda}a^* \\ (a\cdot b)^* &= b^*\cdot a^*\,. \end{aligned}$$

Definition: Eine *Banach-*-Algebra* ist eine normierte *-Algebra mit der Bedingung $\|a^*\| = \|a\|$, welche bezüglich dieser Norm abgeschlossen ist.

Definition: Eine *C^*-Algebra* ist eine Banach-Algebra mit der zusätzlichen sogenannten C^*-Bedingung an die Norm:

$$\|a^*\cdot a\| = \|a\|^2\,.$$

Ob diese Regeln für die Observablen in der Physik wirklich immer erfüllt sein müssen ist zweifelhaft. Zunächst kann man schon hinterfragen, warum das Ergebnis einer physikalischen Messung überhaupt immer eine Zahl sein muss. Bei psychologischen Tests wäre eine solche Einschränkung möglicherweise zu grob.

Dass es sich bei der Observablen-Algebra um eine komplexe Algebra handelt ist eher eine technische Forderung. Die reellen Elemente dieser Algebra ($a^* = a$) werden als die eigentlichen Observablen angesehen.

Während jedoch die Multiplikation einer Observablen mit einer Zahl immer operationell definiert werden kann - es handelt sich dabei einfach um eine Änderung der Messskala -, sind die

anderen Operationen weniger offensichtlich. So ist beispielsweise operationell nicht definiert, wie man die Summe oder das Produkt zweier Observabler - d.h. zweier gegebener Messvorschriften - wieder als Messvorschrift realisiert. Für die Quantenmechanik sicherlich falsch wäre die Vorschrift, die beiden Messungen getrennt auszuführen und von den Ergebnissen die Summe bzw. das Produkt zu bilden. Häufig wird auch behauptet, die „zeitliche Hintereinanderausführung" zweier Messvorschriften A und B entspräche dem Produkt dieser Observablen. Diese Aussage ist noch nicht einmal in der Quantenmechanik erfüllt. Richtig bleibt in der Quantenmechanik lediglich, dass zwei Messvorschriften genau dann in ihrer zeitlichen Reichenfolge vertauschbar sind, wenn die zugehörigen Operatoren vertauschen.

So bleibt als Rechtfertigung dieser Axiome nur die Tatsache, dass sie in der klassischen Mechanik und in der Quantenmechanik, d.h. in den fundamentalen Theorien der Physik, erfüllt sind.

3.3 Zustände

In der Physik werden Zustände über das, was man von ihnen weiß bzw. wissen kann, definiert, also über die möglichen Beobachtungsergebnisse. Hierbei handelt es sich somit weniger um ein ontologisches Verständnis von „Zustand" als um ein epistemisches bzw. sogar operationelles.

Definition: Ein *Zustand* ist ein lineares, positives, normiertes Funktional auf der Observablen-Algebra.

Damit erfüllt ein Zustand ω folgende Axiome für alle $a, b \in \mathcal{A}$ und $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \omega(\alpha a + \beta b) &= \alpha\omega(a) + \beta\omega(b) \\ \omega(a^* a) &\geq 0 \\ \omega(1) &= 1 \,. \end{aligned}$$

Ein Zustand ω ordnet somit jeder Observablen a eine Zahl zu. Diese Zahl ist jedoch nicht das Messergebnis der Observablen a im Zustand ω, sondern der Erwartungswert. Daher bezeichnet man Zustände auch manchmal als *Erwartungswertfunktionale*. Diese allgemeinere Deutung eines Zustands ist durch die Quantenmechanik notwendig geworden, wo dieselbe Messvorschrift angewandt auf denselben quantenmechanischen Zustand nicht immer dasselbe Messergebnis liefert. $\omega(a)$ ist also der Erwartungswert der Observablen a im Zustand ω.

Damit werden die Bedingungen der Positivität und der Norm eines Zustandes einsichtig: Eine Observable mit nur positiven Messwerten hat auch einen positiven Erwartungswert, und die Observable, deren Messwert immer 1 ist, hat auch den Erwartungswert 1.

Weniger einsichtig ist die Forderung der Linearität. Tatsächlich wurde diese Bedingung schon 1935 von Grete Hermann in einer Arbeit mit dem Titel *Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik* [47] in Frage gestellt. Später hat J.S. Bell dieses Axiom im Zusammenhang mit der Möglichkeit von Theorien mit verborgenen Parametern genauer untersucht und gezeigt, dass es für die Erwartungswerte in einer physikalischen Theorie nicht notwendigerweise gelten

muss [7]. Da das von Neumannsche Theorem über die Unmöglichkeit verborgener Variabler in der Quantemechanik auf dieser Annahme beruhte, war die Frage nach solchen Variablen wieder offen. Vergleiche auch Abschnitt 9.2.

Zustände bilden eine konvexe Menge, d.h., mit zwei Zuständen ω_1 und ω_2 ist auch die Kombination

$$\omega \;=\; \alpha\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2 \qquad 0 \leq \alpha \leq 1$$

ein Zustand. Für diese Kombination gilt die Linearität trivialerweise; Positivität und Norm folgen aus der speziellen Wahl der Koeffizienten.

Definition: Ein Zustand ω heißt *rein*, wenn er sich nicht als Linearkombination zweier Zustände ω_1 und ω_2 mit $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 1$ schreiben lässt. Andernfalls heißt der Zustand *gemischt*. Reine Zustände bilden somit den Rand der konvexen Zustandsmenge.

3.4 Observable und Zustände in der Physik

Wir wollen nun überprüfen, ob die Observablen und Zustände der klassischen Mechanik bzw. der Quantenmechanik die obigen Axiome erfüllen und bei der Gelegenheit den Zusammenhang mit der bekannten Notation in der klassischen Mechanik und Quantenmechanik herstellen. Außerdem werden wir sehen, worin der wesentliche Unterschied zwischen den klassischen und den quantenmechanischen Observablen liegt.

3.4.1 Observable und Zustände in der klassischen Mechanik

Der Konfigurationsraum eines klassischen Systems ist sein Phasenraum. Der Einfachheit halber betrachten wir ein klassisches Punktteilchen, d.h., sein Phasenraum P besteht aus der Menge der Punktepaare (x, p), wobei x die Position und p den Impuls kennzeichnen.

Die Observablen $\mathcal{A}_K$ der klassischen Mechanik sind beliebige beschränkte, komplexwertige Funktionen über dem Phasenraum:

$$\mathcal{A}_K \;:\; \{f : P \to \mathbf{C}\} \; .$$

Dass wir komplexwertige Funktionen zulassen, hat wiederum nur technische Gründe. Gerade für die klassische Observablenalgebra können wir uns auch ohne Probleme auf die reellwertigen Funktionen beschränken.

Die Funktionen über dem Phasenraum lassen sich punktweise addieren und multiplizieren, und es lässt sich leicht zeigen, dass sie eine Algebra bilden. Es handelt sich in diesem Fall sogar um eine kommutative Algebra, d.h. es gilt:

$$f \cdot g \;=\; g \cdot f \; .$$

Das Eins-Element ist die konstante Funktion mit Wert 1. Als Norm können wir die Supremumsnorm wählen, d.h.

$$\|f\| \;=\; \max_{x,p}\{|f(x,p)|\} \; .$$

Die *-Operation ist die komplexe Konjugation:

$$f^*(x,p) \;=\; \bar{f}(x,p)\;.$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Observablenalgebra der Funktionen über dem Phasenraum eine C^*-Algebra bildet.

Zustände sind zunächst lineare Funktionale auf der Observablenalgebra. Im Fall einer Funktionenalgebra, wie in der klassischen Mechanik, lassen sich solche Zustände immer in der Form

$$\omega(f) \;=\; \int_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\;\omega(x,p)\,f(x,p)$$

schreiben. $\omega(x,p)$ ist dabei eine Distribution. Distributionen bilden gerade die linearen Funktionale auf Funktionenräumen. Positivität und Norm bedeuten

$$\begin{aligned}\int_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\;\omega(x,p)\,|f(x,p)|^2 \;&\geq\; 0\\ \int_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\;\omega(x,p) \;&=\; 1\;.\end{aligned}$$

Solche Distributionen bezeichnet man auch als *Dichtefunktionale*. Sie definieren eine Dichteverteilung auf dem Phasenraum.

Reine Zustände lassen sich nicht als Linearkombination anderer Zustände schreiben. Das sind in der klassischen Mechanik gerade die Delta-Funktionen zu einem Phasenraumpunkt:

$$\omega_{x_0,p_0} \;=\; \delta(x-x_0)\,\delta(p-p_0)\;,$$

bzw.

$$\omega_{x_0,p_0}(f) \;=\; \int_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}p\;\delta(x-x_0)\,\delta(p-p_0)\,f(x,p) \;=\; f(x_0,p_0)\;.$$

Ein reiner Zustand entspricht also genau einem Punkt im Phasenraum. Er ordnet jeder Observablen den Wert dieser Observablen an diesem Punkt zu. Wenn wir also sagen: „Das Teilchen befindet sich am Punkte x und hat den Impuls p“, so meinen wir damit, dass es sich in dem reinen Zustand zum Punkt x und Impuls p befindet.

3.4.2 Observable und Zustände in der Quantenmechanik

In der Quantenmechanik bilden die beschränkten, linearen Operatoren auf einem (separablen) Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ die Observablenmenge. Die eigentlichen Observablen sind die selbstadjungierten Operatoren, aber in diesem Fall ist es sinnvoll, die Observablen-Algebra auf die Menge aller linearen Operatoren zu erweitern. Dass wir nur beschränkte Observable zulassen, hat ebenfalls technische Gründe, da anderenfalls - wie schon bei der klassischen Observablenalgebra - die Norm nicht definiert wäre. Physikalisch ist das keine Einschränkung, denn jede Messvorschrift ist nach oben und unten beschränkt. Es gibt kein Messgerät, das auch „unendlich“ als sinnvollen Messwert anzeigt. (Meist bedeutet „unendlich“ nur, dass der Messwert über einer gegebenen Obergrenze liegt.)

Beschränkte, lineare Operatoren auf einem Hilbert-Raum können wir wiederum addieren und multiplizierten und leicht die Axiome einer Algebra überprüfen. In diesem Fall ist die Algebra jedoch nicht kommutativ, d.h., im Allgemeinen gilt:

$$A \cdot B \neq B \cdot A \, .$$

Als Norm eines Operators definieren wir die starke Operatornorm:

$$\|B\| = \max_{\langle\psi|\psi\rangle=1}\{\|A|\psi\rangle\|\} \, ,$$

und als Involution die hermitesche Konjugation (genauer die Abbildung auf den adjungierten Operator)

$$A^* = A^+ \, .$$

Wiederum lassen sich die Bedingungen einer C^*-Algebra für diese Observablenalgebra leicht überprüfen. Beschränkte lineare Operatoren auf einem Hilbert-Raum bilden bzgl. der starken Operatornorm das Paradebeispiel einer nicht-kommutativen C^*-Algebra.

Lineare Funktionale auf dieser Algebra lassen sich immer durch eine Spur-Operation definieren:

$$\omega(A) = \operatorname{tr} \omega A = \sum_{ij} \omega_{ij} A_{ji} \, .$$

Positivität und Norm legen ω als *Dichtematrix* fest, d.h. für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \omega &= \omega^+ \\ \omega &\geq 0 \qquad \text{d.h. } \langle\psi|\omega|\psi\rangle \geq 0 \\ \operatorname{tr} \omega &= \sum_i \omega_{ii} = 1 \, . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Dichtematrizen sind also Zahlen zwischen 0 und 1 deren Summe gerade 1 ergibt. Bei reinen Zuständen können die Eigenwerte der Dichtematrizen, die nur die Eigenwerte 0 und 1 haben. Da ihre Summe 1 sein muss, hat nur ein einziger Eigenwert den Wert 1, alle anderen sind 0. Die Dichtematrizen zu reinen Zuständen sind somit Projektionsoperatoren auf eindimensionale Teilräume ψ des Hilbert-Raumes:

$$\omega = \omega^2 \quad \Longrightarrow \quad \omega = P_\psi \, .$$

Jeder solche Projektionsoperator definiert eindeutig einen Vektor ψ im Hilbert-Raum, und umgekehrt gibt es zu jedem normierten Vektor ψ einen Projektionsoperator. Reine Zustände stehen somit in Eins-zu-Eins Beziehung mit den eindimensionalen Teilräumen im Hilbert-Raum, also den üblichen Zuständen der Quantenmechanik. Für einen reinen Zustand gilt

$$\omega(A) = \operatorname{tr} P_\psi A = \operatorname{tr} |\psi\rangle\langle\psi| A = \langle\psi|A|\psi\rangle \, .$$

Auch hier liefert uns der allgemeine Formalismus wieder die bekannten Formeln. Vom Standpunkt der C^*-Algebra ist der einzige Unterschied zwischen der Observablenalgebra der klassischen Mechanik und der Observablenalgebra der Quantenmechanik die Kommutativität.

Ein allgemeines Theorem von von Neumann besagt, dass sich jede kommutative C^*-Algebra als Funktionenalgebra über einer geeigneten Menge (dem Konfigurationsraum) darstellen lässt. Dieser Konfigurationsraum ist isomorph zur Menge der reinen Zustände. Und jede nichtkommutative C^*-Algebra lässt sich als Algebra beschränkter Operatoren auf einem Hilbert-Raum darstellen. Im Wesentlichen ist also durch die Forderung, dass die Observablenalgebra in der Physik eine C^*-Algebra bildet, der mathematische Rahmen vorgegeben.

Kapitel 4

Propositionen und Verbände

Propositionen sind Elementaraussagen über ein System. Eine Elementaraussage ist dabei eine Aussage der Art: Das System hat eine bestimmte Eigenschaft bzw. hat eine bestimmte Eigenschaft nicht. Zumindest in der Physik sollte es immer möglich sein, Aussagen in Elementaraussagen zu zerlegen.

Propositionen werden durch (reelle bzw. selbstadjungierte) idempotente Observable dargestellt, d.h.

$$P^2 \;=\; P \qquad \text{und} \qquad P \;=\; P^* \,.$$

Zu zwei Propositionen P_1 und P_2 gibt es eine Vereinigung („ODER“) und einen Durchschnitt („UND“):

$$\begin{aligned} P_\cup &= P_1 \cup P_2 \\ P_\cap &= P_1 \cap P_2 \,. \end{aligned}$$

Im Sinne der Aussagenlogik bezeichnet $P_\cup$ die Eigenschaft „P_1 oder P_2“, $P_\cap$ bezeichnet „P_1 und P_2“, wobei wir hier die Aussage bezüglich einer Eigenschaft mit der entsprechenden Observablen identifiziert haben. Die Aussage „P_1 und P_2“ ist in diesem Fall immer richtig, wenn sowohl die Aussage P_1 als auch die Aussage P_2 richtig ist. Wir werden jedoch sehen, dass in der Quantenmechanik nicht unbedingt gilt, dass die Aussage „P_1 oder P_2“ immer dann richtig ist, wenn entweder P_1 oder P_2 gilt.

Zu jeder Aussage gibt es auch das Komplement bzw. die Negation $P^c = 1 - P$: „Das System hat die Eigenschaft P nicht“. (Wie wir sehen werden, wird der Begriff „komplementär“ leider in unterschiedlicher Bedeutung verwendet.)

Die drei Operationen – Negation, ODER und UND – sind nicht unabhängig. Jede von ihnen lässt sich durch die beiden anderen ausdrücken. Für die Negation gilt beispielsweise:

$$P \cup P^c = 1 \qquad \text{und} \qquad P \cap P^c = 0 \,,$$

wobei 1 die triviale Proposition ist ($P \cap 1 = P$ für alle P) und 0 die leere Proposition ($P \cup 0 = P$ für alle P). Die Vereinigung zweier Propositionen lässt sich schreiben als:

$$P_1 \cup P_2 = (P_1^c \cap P_2^c)^c \, .$$

Diese Verknüpfungsregeln für Propositionen erfüllen in der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik bestimmte Regeln, die sie zu so genannten Verbänden machen. Im Folgenden wollen wir diese Regeln herleiten und einen elementaren Einstieg in die Verbandstheorie vornehmen.

4.1 Propositionen in der klassischen Mechanik

Idempotente Observable in der klassischen Mechanik sind so genannte charakteristische Funktionen über dem Phasenraum, d.h., sie nehmen nur die Werte 0 bzw. 1 an. Sie entsprechen Teilmengen des Phasenraums. Zu jeder Teilmenge A gibt es eine entsprechende charakteristische Funktion χ_A, die auf dieser Teilmenge den Wert 1 hat und ansonsten den Wert 0.

Der Durchschnitt zweier charakteristischer Funktionen ist das Produkt dieser Funktionen:

$$\chi_\cap \;=\; \chi_A \cdot \chi_B \, .$$

Es entspricht der charakteristischen Funktion zum mengentheoretischen Durchschnitt der zugehörigen Teilmengen im Phasenraum.

Die Vereinigung ist die Summe der beiden charakteristischen Funktionen minus ihrem Durchschnitt:

$$\chi_\cup \;=\; \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B \, .$$

Wie immer können wir die Vereinigung auch über das Komplement und den Durchschnitt definieren:

$$\chi_\cup \;=\; 1 - (1 - \chi_A) \cdot (1 - \chi_B) \, .$$

Auch hier entspricht diese Vorschrift der mengentheoretischen Vereinigung der zugehörigen Teilmengen.

In der klassischen Mechanik entsprechen also die Definitionen von UND, ODER und Komplementbildung genau den mengentheoretischen Vorschriften für die zugehörigen Teilmengen im Phasenraum. Daher erfüllen diese Vorschriften auch alle Eigenschaften der *Aussagenlogik* der Mengentheorie. Dazu zählen insbesondere:

1. die Kommutativität:

$$P_A \cup P_B \;=\; P_B \cup P_A \qquad \text{und} \qquad P_A \cap P_B \;=\; P_B \cap P_A \, , \tag{4.1}$$

2. die Assoziativität:

$$(P_A \cup P_B) \cup P_C \;=\; P_A \cup (P_B \cup P_C) \qquad \text{und} \qquad (P_A \cap P_B) \cap P_C \;=\; P_A \cap (P_B \cap P_C) \, , \tag{4.2}$$

3. das Absorptionsgesetz:

$$P_A \cup (P_B \cap P_A) \;=\; P_A \quad \text{und} \quad (P_A \cup P_B) \cap P_A \;=\; P_A \tag{4.3}$$

4. und die Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} \chi_A \cap (\chi_B \cup \chi_C) &= (\chi_A \cap \chi_B) \cup (\chi_A \cap \chi_C) \\ \chi_A \cup (\chi_B \cap \chi_C) &= (\chi_A \cup \chi_B) \cap (\chi_A \cup \chi_C)\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.2 Propositionen in der Quantenmechanik

Propositionen in der Quantenmechanik werden durch selbstadjungierte Projektionsoperatoren dargestellt. Einer Proposition entspricht somit ein linearer Teilraum des Hilbert-Raumes. Das Komplement ist wiederum

$$P^c \;=\; \mathbf{1} - P\,.$$

Anschaulich lassen sich auch die Vereinigung und der Durchschnitt zweier Propositionen leicht verstehen:

Die Vereinigung $P_\cup$ zweier Propositionen P_A und P_B entspricht der Projektion auf den kleinsten linearen Teilraum des Hilbert-Raums, der die Teilräume zu P_A und P_B enthält. Der Durchschnitt $P_\cap$ zweier Propositionen P_A und P_B ist der größte lineare Teilraum des Hilbert-Raums, der in den Teilräumen zu P_A und P_B enthalten ist.

Die Konstruktion von Durchschnitt und Vereinigung durch die Operationen auf dem Hilbert-Raum erfordert eine Grenzwertbildung. Der Durchschnitt lässt sich beispielsweise in der Form

$$P_A \cap P_B \;=\; \lim_{n\to\infty} (P_A \cdot P_B)^n$$

darstellen. Die Vereinigung ist dann:

$$P_A \cup P_B \;=\; 1 - (1 - P_A) \cap (1 - P_B) \;=\; 1 - \lim_{n\to\infty} ((1 - P_A) \cdot (1 - P_B))^n \;.$$

Wir erkennen nun auch, dass die UND-Operation - der Durchschnitt - von zwei Propositionen P_A und P_B als quantenmechanische Proposition für all solche Systeme richtig ist, für die sowohl P_A als auch P_B gilt. Die Durchschnittsbildung entspricht ja gerade dem linearen Teilraum, der in beiden Teilräumen enthalten ist. Das bedeutet, die Durchschnittsbildung entspricht auch der Teilmenge im mengentheoretischen Sinn.

Dies gilt nicht mehr für die ODER-Operation, also die Vereinigung. $P_A \cup P_B$ ist der kleinste lineare Teilraum, der von den Teilräumen zu P_A und P_B aufgespannt wird. Hierbei handelt es sich somit nicht um eine mengentheoretische Vereinigung, da dieser Teilraum im Allgemeinen wesentlich mehr lineare Teilräume enthält als nur die Teilräume zu P_A und P_B. Betrachten wir als Beispiel den 2-dimensionalen Hilbert-Raum eines Spin-1/2 Systems. Sei P_A der Teilraum zu $|s_3 = +1\rangle$ und P_B der Teilraum zu $|s_1 = +1\rangle$. Die Vereingung - d.h. die ODER-Operation - entspricht dem gesamten Hilbert-Raum, da die beiden Zustände linear unabhängig sind. Dieser

Raum enthält aber auch beispielsweise den Zustand $|s_3 = -1\rangle$, also das Komplement von P_A. Dieser Zustand hat weder die Eigenschaft P_A noch die Eigenschaft P_B.

Operationell lässt sich der Durchschnitt durch eine unendliche Folge von Filtern darstellen, wobei ein Filter nur solche Systeme „durchlässt“, die eine bestimmte Bedingung erfüllen. Seien A und B zwei Eigenschaften eines Systems mit zugehörigen Projektionsoperatoren P_A und P_B und den entsprechenden Filtern $\mathcal{F}_A$ und $\mathcal{F}_B$. Schalten wir nun alternierend diese beiden Filterarten unendlich oft hintereinander, so treten nur solche Systeme hindurch, für die sowohl Eigenschaft A als auch Eigenschaft B gilt. Bei nicht-kommutierenden Größen (beispielsweise „$A \simeq$ Teilchen in einem bestimmten Volumen“ und „$B \simeq$ Teilchen in bestimmtem Impulsintervall“) kann es sein, dass schließlich überhaupt kein System mehr übrigbleibt, obwohl einige Systeme die ersten paar Filter durchdringen könnten.

Viele der bekannten Relationen für Vereinigung und Durchschnitt gelten auch in der Quantenmechanik, beispielsweise

1. die Kommutativität (Gl. 4.1),
2. die Assoziativität (Gl. 4.2),
3. und das Absorptionsgesetz (Gl. 4.3).

Die Distributivgesetze gelten jedoch für den quantenmechanischen Propositionenkalkül nicht.

Wir geben dafür ein einfaches Beispiel. Es gilt

$$P_A \cap (P_B \cup P_B^c) \;=\; P_A \cap (P_B \cup (1 - P_B)) \;=\; P_A \cap 1 \;=\; P_A \,.$$

Andererseits ist

$$(P_A \cap P_B) \cup (P_A \cap (1 - P_B) \;=\; \lim_{n\to\infty} (P_A P_B)^n \;\cup\; \lim_{n\to\infty} (P_A(1 - P_B))^n \,.$$

Die rechte Seite kann aber verschwinden, obwohl P_A und P_B bzw. $1 - P_B$ nicht-triviale Projektionsoperatoren sind. Beispiel:

$$P_A \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$P_A P_B \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$(P_A P_B)^n \;=\; \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} (P_A P_B)^n \;=\; 0 \,.$$

Andererseits ist

$$P_A(1-P_B) \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit ebenfalls

$$\lim_{n\to\infty} (P_A(1-P_B))^n \;=\; 0\;.$$

Durch den ständigen Wechsel zweier Projektionen auf nicht-kolineare Räume wird jeder Vektor immer weiter verkürzt und schließlich zu Null.

4.3 Kommensurable und inkommensurable Eigenschaften

Für einen reinen Zustand gilt in der klassischen Mechanik immer

$$\omega_{x,p}(P) \;=\; 0 \;\text{ oder }\; 1\;.$$

In der Quantenmechanik können wir für einen reinen Zustand jedoch nur die Aussage

$$0 \;\leq\; \langle\psi|P|\psi\rangle \;\leq\; 1$$

treffen.

Es sei A eine Eigenschaft und P_A der zugehörige Projektionsoperator. Erfüllt ein Zustand $|\psi\rangle$ die Gleichung

$$P_A|\psi\rangle \;=\; |\psi\rangle\;,$$

so sagen wir, dass der Zustand $|\psi\rangle$ die Eigenschaft A hat. Gilt andererseits

$$P_A|\psi\rangle \;=\; 0 \qquad \text{bzw.} \qquad P_A^c|\psi\rangle \;=\; (1-P_A)|\psi\rangle \;=\; 1\;,$$

dann sagen wir, dass der Zustand $|\psi\rangle$ die Eigenschaft A nicht hat, bzw. dass er die Eigenschaft „nicht A“ oder $\neg A$ hat. In beiden Fällen - d.h., immer wenn ein Zustand ein Eigenzustand von P_A ist - ist es sinnvoll, in Bezug auf $|\psi\rangle$ eine Aussage zur Eigenschaft A zu machen. Gilt jedoch

$$0 \;<\; \langle\psi|P_A|\psi\rangle \;<\; 1\;,$$

so sollte man in Bezug auf $|\psi\rangle$ überhaupt nicht von der Eigenschaft A sprechen.

Zwei Eigenschaften A und B heißen *kommensurabel*, wenn

$$P_AP_B \;=\; P_BP_A\;,$$

anderenfalls heißen sie *inkommensurabel*. In der klassischen Mechanik sind offensichtlich alle Eigenschaften relativ zueinander kommensurabel, während es in der Quantenmechanik auch inkommensurable Eigenschaften gibt.

Sind zwei Eigenschaften kommensurabel, so gilt auch

$$P_A \cap P_B \;=\; P_AP_B\;,$$

da

$$(P_A P_B)^n \;=\; P_A^n P_B^n \;=\; P_A P_B \;.$$

Entsprechend ist

$$P_A \cup P_B \;=\; 1-(1-P_A)(1-P_B) \;=\; P_A + P_B - P_A P_B \;.$$

Für kommensurable Eigenschaften in der Quantenmechanik gelten somit dieselben Relationen wie für Eigenschaften der klassischen Mechanik. Insbesondere gelten für kommensurable Eigenschaften auch die Distributivgesetze.

4.4 Quantenlogik

Für den Aussagenkalkül der Quantenmechanik, wie er sich in den Eigenschaften der Projektionsoperatoren offenbart, findet man auch die Bezeichnung *Quantenlogik*. Dieser Begriff kann irreführend sein, da er zu implizieren scheint, dass es neben unserer gewöhnlichen, eingängigen und scheinbar selbstverständlichen Form der Logik noch eine zweite, von dieser abweichende Form der Logik gibt. Wir wollen im Folgenden kurz erläutern, worauf sich dieser Begriff der Quantenlogik bezieht. Eine ausführlichere Darstellung findet man bei Mittelstaedt [61].

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zu überprüfen, ob eine Aussage wahr oder falsch ist. In der Mathematik wird man im Allgemeinen einen Beweis für eine Aussage verlangen, um ihren Wahrheitscharakter anzuerkennen. In der Physik wird man eine Aussage der Form „das System besitzt die Energie E“ durch eine Messung überprüfen. Liefert die Messung der Energie den Messwert E so gilt die Aussage als erwiesen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen mathematischen Aussagen und physikalischen Aussagen besteht in der sogenannten *Verfügbarkeit*. In der Mathematik geht man davon aus, dass eine einmal bewiesene Aussage die Eigenschaft der *unbeschränkten Verfügbarkeit* besitzt, d.h. jederzeit in einem Beweis verwandt werden darf. In der Physik gilt diese unbeschränkte Verfügbarkeit einer Aussage nicht.

Gegeben seien ein physikalisches System und zwei inkommensurable Eigenschaften A und B, die diesem System im Prinzip zukommen können. Wenn jemand behauptet, das System habe die Eigenschaft A, so können wir diese Aussage leicht durch eine Messung überprüfen. Angenommen, die Messung hat diese Aussage als wahr erwiesen. Nun können wir eine zweite Aussage machen und behaupten, das System habe auch die Eigenschaft B. Die Überprüfung erfolgt wiederum durch eine Messung der Eigenschaft B, die gegebenenfalls diese Aussage ebenfalls bestätigt. Wollen wir nun jedoch gewisse Schlussfolgerungen ziehen, die auf den Eigenschaften A und B beruhen, so dürfen wir nach der Messung der Eigenschaft B die erste, ursprünglich durch eine Messung bestätigte Aussage - das System habe die Eigenschaft A - nicht mehr als richtig vorraussetzen. Diese erste Aussage steht uns also für eine Schlussfolgerung nicht mehr zur Verfügung.

Eine Grundregel logischer Schlussfolgerungen lautet

$$A \to (B \to A) \;,$$

die man etwas vereinfacht folgendermaßen deuten kann: „Wenn A als richtig erwiesen wurde, dann folgt daraus, dass, wenn B als richtig erwiesen wurde, die Aussage A ebenfalls richtig ist.“ Dieser Satz scheint trivial. Da die Aussage A als richtig erwiesen wurde, kann man aus der Richtigkeit der Aussage B immer schließen, dass A auch richtig ist.

Versteht man unter „beweisen“ bzw. „als richtig erweisen“ jedoch einen quantenmechanischen Messprozess, so ist obiger Satz nicht mehr richtig. Wenn die Eigenschaft A als richtig (vorhanden) gemessen wurde, dann kann man aus dem Vorhandensein der Eigenschaft B - überprüft in einer zweiten Messung - nicht mehr auf das Vorhandensein (die Richtigkeit) der Eigenschaft A schließen.

Die erlaubten Schlussfolgerungen, die man aus quantenmechanischen Messungen ziehen darf, bezeichnet man auch als Quantenlogik. Es zeigt sich, dass unter den gängigen mathematischen logischen Schlussfolgerungen nur die obige nicht auf die Quantenlogik übertragen werden kann. Alle anderen Sätze der bekannten Logik behalten ihre Richtigkeit.

4.5 Verbandstheorie

Neben den Formalismen der Operatoralgebra und des Propositionenkalküls wird oft eine dritte Form zur Charakterisierung quantenmechanischer Aussagen benutzt: die Verbandstheorie. Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Aussagenstrukturen. Der Vorteil der Verbandstheorie ist, dass sich viele ihrer Aussagen und Sätze in Form von einfachen Graphen darstellen lassen, und dadurch auch in komplizierteren Fällen oft leichter eingängig und übersichtlicher sind.

Ein Verband ist eine geordnete Menge, in der es zu je zwei Elementen ein Supremum und ein Infimum gibt. Bevor wir diese Definition näher erläutern und verfeinern, wollen wir die wesentlichen Begriffe für geordnete Mengen zusammenfassen. Die meisten Definitionen in diesem Kapitel entstammen dem *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* [26], einige Beweise sowie einige deutsche Begriffe dem *Handbuch der Mathematik* [48], Abschnitt A.III.3.

4.5.1 Ordnung

Definition: Eine *Relation* $\sim$ auf einer Menge M ist eine Teilmenge R von $M \times M$. Die Notation $x \sim y$ bedeutet $(x, y) \in R$.

Definition: Eine Menge M heißt *geordnet* (*halbgeordnet, semigeordnet*), wenn es eine Relation $\leq$ auf M gibt, die

- reflexiv: $x \leq x$,
- antisymmetrisch: $x \leq y$ und $y \leq x$ impliziert $x = y$, und
- transitiv: $x \leq y$ und $y \leq z$ impliziert $x \leq z$

ist.

Wenn für je zwei Elemente x und y aus M entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt, dann bezeichnet man M als *total geordnet*.

Die Notation $x < y$ ist äquivalent zu $x \leq y$ und $x \neq y$. $x \geq y$ ist äquivalent zu $y \leq x$, und $x > y$ ist äquivalent zu $y < x$.

Eine Teilmenge von M der Form $\{x|a < x < b\}$ bezeichnet man mit (a, b). Teilmengen von M von der Form (a, b), $\{x|x < a\}$ oder $\{x|x > a\}$ nennt man *Intervalle*. Falls $a < x < b$ oder $b < x < a$ so sagt man, x liegt *zwischen* a und b. Gilt $a < b$ und es gibt kein Element aus M, das zwischen a und b liegt, so bezeichnet man b als den *Nachfolger* von a und umgekehrt a als den *Vorgänger* von b.

Sei X eine Teilmenge einer geordneten Menge M. Ein Element $a \in M$ heißt *obere Schranke* von X, wenn $x \leq a$ für alle $x \in X$. Gibt es eine obere Schranke zu einem X, so heißt X *von oben beschränkt*. Ganz entsprechend definiert man eine *untere Schranke* bzw. die Aussage, dass eine Teilmenge *von unten beschränkt* ist. Ist das Element a eine obere Schranke von X und es gilt $a \in X$, so bezeichnet man a als *größtes Element* von X bzw. als *Maximum*. Ein größtes Element ist immer eindeutig. Entsprechend definiert sind das *kleinste Element* bzw. das *Minimum*.

Gibt es ein kleinstes Element in der Menge der oberen Schranken von X, so bezeichnet man es als *kleinste obere Schranke* (*obere Grenze*) oder auch *Supremum*. Entsprechend wird die *größte untere Schranke* (*untere Grenze*) bzw. das *Infimum* definiert.

4.5.2 Verbände

Die folgenden zwei Definitionen eines Verbandes (engl. lattice) sind äquivalent:

Definition (1): Ein *Verband* ist eine geordnete Menge L, in der es zu je zwei Elementen x und y ein Supremum (bezeichnet mit $x \cup y$) und ein Infimum (bezeichnet mit $x \cap y$) gibt.

Definition (2): Ein *Verband* ist eine Menge L mit zwei Verknüpfungsrelationen $\cup$ und $\cap$, die folgenden Bedingungen genügen:

- Kommutativität:

$$\begin{aligned} x \cup y &= y \cup x \\ x \cap y &= y \cap x \end{aligned}$$

- Assoziativität:

$$\begin{aligned} x \cup (y \cup z) &= (x \cup y) \cup z \\ x \cap (y \cap z) &= (x \cap y) \cap z \end{aligned}$$

- Absorptionsgesetz:

$$(a) \qquad x \cup (y \cap x) = x$$

$$(b) \qquad (x \cup y) \cap x) \;=\; x\,.$$

Es ist relativ leicht, aus den Eigenschaften der Halbordnung und der Definition eines Supremums bzw. Infimums die drei obigen Eigenschaften der Verknüpfungsrelationen herzuleiten.

Umgekehrt folgt aus den Eigenschaften der Verknüpfungsrelationen die folgende Äquivalenz:

$$x \cup y \;=\; y \iff x \cap y \;=\; x\,.$$

Beweis: Das Absorptionsgesetz lässt sich auch in der Form

$$y \cup (x \cap y) \;=\; y$$

schreiben. Gilt nun $x \cap y = x$, so folgt offensichtlich $y \cup x = y$. Umgekehrt folgt aus dem Absorptionsgesetz in der Form

$$(x \cup y) \cap x \;=\; x$$

unter der Bedingung $x \cup y = y$ die Relation $y \cap x = x$. Damit ist die Äquivalenz der beiden obigen Eigenschaften bewiesen.

Wir können nun auf einer solchen Menge eine Relation definieren:

$$x \leq y \iff x \cup y \;=\; y\,, \tag{4.5}$$

bzw.

$$x \leq y \iff x \cap y \;=\; x\,. \tag{4.6}$$

Diese Relation $\leq$ erfüllt die drei Axiome einer Ordnungsrelation.

Beweis:

- (Reflexivität). Es ist zu zeigen, dass

  $$x \cup x \;=\; x$$

  gilt. Dies folgt aber, indem wir die Form (b) des Absorptionsgesetzes (kommutiert) einsetzen und dann die Form (a) ausnutzen:

  $$x \cup x \;=\; x \cup [x \cap (x \cup y)] \;=\; x$$

  Wegen obiger Äquivalenz folgt daher auch

  $$x \cap x \;=\; x\,.$$

  Diese beiden Gesetze bezeichnet man auch als *Idempotenzgesetze*.

- (Anti-Symmetrie). Folgt unmittelbar aus der Kommutativität:

  $$x \cup y \;=\; y \quad \text{und} \quad y \cup x \;=\; x \quad \Longrightarrow \quad x \;=\; y\,.$$

- (Transitivität). Es ist zu zeigen

$$x \cup y = y \quad \text{und} \quad y \cup z = z \quad \Longrightarrow \quad x \cup z = z \, .$$

Diese Relation folgt aus dem Assoziativitätsgesetz, da

$$x \cup y = y \quad \text{und} \quad y \cup z = z \quad \Longrightarrow \quad (x \cup y) \cup z = z \, ,$$

und

$$x \cup (y \cup z) \; = \; z \quad \text{und} \quad y \cup z = z \quad \Longrightarrow x \cup z = z \, .$$

4.5.3 Die Verbandsstruktur im physikalischen Propositionenkalkül

Wir haben gesehen, dass im Propositionenkalkül sowohl der klassischen Mechanik als auch der Quantenmechanik die Operationen $\cup$ und $\cap$ definiert sind und den drei Verknüpfungsregeln eines Verbandes (Kommutativität, Assoziativität und Absorptionsgesetz) genügen. Somit bilden der klassische und der quantenmechanische Propositionskalkül einen Verband.

Wir können uns zunächst fragen, was die Ordnungsrelation auf diesen Verbänden ist. Nach Gleichung (4.6) soll gelten

$$P_A \leq P_B \quad \Longleftrightarrow \quad P_A \cap P_B \; = \; P_A \, .$$

In der klassischen Mechanik gilt somit

$$\chi_A \leq \chi_B \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_A \cdot \chi_B \; = \; \chi_A \, ,$$

oder

$$\chi_A \leq \chi_B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B \, .$$

Die Ordnungsrelation entspricht in der klassischen Mechanik also der Teilmengenrelation auf dem Phasenraum.

In der Quantenmechanik kann man sich ebenfalls leicht davon überzeugen, dass die Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} (P_A P_B)^n \; = \; P_A$$

äquivalent ist zu

$$P_A P_B \; = \; P_A \, .$$

Und da die Projektionsoperatoren selbstadjungierte Operatoren sein sollen, gilt auch

$$P_A \; = \; P_A^+ \; = \; (P_A P_B)^+ \; = \; P_B^+ P_A^+ \; = \; P_B P_A \, .$$

Wir erhalten somit

$$P_A \leq P_B \quad \Longleftrightarrow \quad P_A P_B \; = \; P_B P_A \; = \; P_A \, .$$

Die Ordnungsrelation kann in der Quantenmechanik somit nur zwischen kommensurable Eigenschaften gelten. $P_A \leq P_B$, wenn der lineare Teilraum zu P_A in dem linearen Teilraum zu P_B enthalten ist.

4.5.4 Weitere Verbandseigenschaften

Definition: Eine geordnete Menge L heißt *vollständiger Verband*, wenn jede nichtleere Teilmenge von L ein Supremum und ein Infimum in L hat.

Definition: Ein Verband L heißt *komplementär*, wenn es ein größtes Element 1 und ein kleinstes Element 0 in L gibt, und wenn es zu jedem Element x ein Element x' gibt, so dass $x \cup x' = 1$ und $x \cap x' = 0$. Ein solches Element x' bezeichnet man auch als *Komplement* von x.

Diese Eigenschaften sind ebenfalls im klassischen und im quantenmechanischen Propositionenkalkül erfüllt. Im klassischen Propositionenkalkül ist 1 die Funktion, die auf dem gesamten Phasenraum den Wert 1 annimmt, d.h. die charakteristische Funktion gesamten Phasenraums. 0 ist die charakteristische Funktion der leeren Menge. Das Komplement zu einer charakteristischen Funktione χ_A ist $1-\chi_A$ und entspricht der charakteristischen Funktion des Komplements der Menge A.

Im quantenmechanischen Propositionenkalkül ist 1 der Identitätsoperator, d.h. der Projektionsoperator auf den gesamten Hilbert-Raum. 0 ist der Nulloperator und entspricht dem Projektionsoperator auf das Null-Element des Hilbert-Raums. Das Komplement eines Projektionsoperators P_A ist $1 - P_A$ und entspricht der Projektion auf dem zu A orthogonalen Teilraum im Hilbert-Raum.

Definition: Ein Verband L heißt *distributiv*, wenn für alle $x, y, z \in L$ die folgenden äquivalenten Bedingungen (*Distributivgesetze*) erfüllt sind:

$$
\begin{aligned}
(i) \qquad & x \cup (y \cap z) \;=\; (x \cup y) \cap (x \cup z) \\
(ii) \qquad & x \cap (y \cup z) \;=\; (x \cap y) \cup (x \cap z) \\
(iii) \qquad & (x \cup y) \cap (y \cup z) \cap (z \cup x) \;=\; (x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x)\,.
\end{aligned}
$$

Wie wir gesehen haben, ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ein distributiver Verband bezüglich der Vereinigung und dem Durchschnitt von Teilmengen von M. Ein solcher Verband heißt auch *Mengenverband*. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass jeder distributive Verband isomorph zu einem geeigneten Mengenverband ist.

Definition: Ein distributiver und komplementärer Verband L heißt *Boolescher Verband* (oder auch *Boolesche Algebra*).

Ein Mengenverband ist offensichtlich auch immer ein Boolescher Verband. Somit ist auch der klassische Propositionskalkül ein Boolescher Verband. Der quantenmechanische Propositionskalkül ist jedoch nicht distributiv und damit auch kein Boolescher Verband.

Kapitel 5

Gedankenexperimente

„Gedankenexperimente sind das Labor des theoretischen Physikers“ wird manchmal behauptet, und in der Tat haben auch Gedankenexperimente schon zu überraschenden Ergebnissen geführt und die Entwicklung mancher Theorie maßgeblich beeinflusst.

Zwei Aspekte der Quantenmechanik scheinen unserer Alltagsvorstellung von physikalischer Realität am meisten entgegenzustehen: die Heisenberg'schen Unschärferelationen – allgemein die Unmöglichkeit, einem System gewisse Eigenschaften gleichzeitig in streuungsfreier Schärfe zuordnen zu können – und der Kollaps der Wellenfunktion. Dementsprechend haben insbesondere die Kritiker der Quantenmechanik immer wieder versucht, durch geschickte experimentelle Anordnungen einen dieser Aspekte als mit den Grundlagen der Quantenmechanik nicht verträglich zu erweisen, oder doch zumindest auf die teilweise absurd erscheinenden Konsequenzen aus diesen Annahmen hinzuweisen. In allen Fällen hat die Quantenmechanik schließich Recht behalten. Trotzdem, oder vielleicht auch gerade deswegen, geben viele dieser Experimente einen besonders tiefen Einblick in die Mechanismen der Quantenmechanik.

5.1 Das Doppelspaltexperiment

Kaum ein anderes Experiment zeigt die wesentlichen Grundzüge der seltsamen „Logik“ der Quantenmechanik deutlicher als das Doppelspaltexperiment, also die Streuung von Elementarteilchen an zwei Spalten. Feynman bezeichnet es sogar als das eigentliche Mystikum der Quantenmechanik. Ursprünglich handelte es sich dabei nur um ein Gedankenexperiment, da die experimentelle Realisation sehr hohe Anforderungen stellt, der man in den Gründerjahren der Quantenmechanik noch nicht nachkommen konnte. So haben die Physiker in den 20er Jahren hauptsächlich darüber diskutiert, was vermutlich beobachtet würde, wenn das Experiment in der entsprechenden Form ausgeführt werden könnte. Mittlerweile lässt sich die Streuung von Elektronen an Doppelspalten mit großer Genauigkeit durchführen, und die Vorhersagen der Quantenmechanik wurden durchweg bestätigt.

Doch nicht nur mit Elektronen wurden solche Experimente durchgeführt. Auch mit Neutronen und einfachen Atomen konnten entsprechende Experimente gemacht werden. Die größten Objekte, bei denen noch das Phänomen der Superposition nachweisbar war, sind so genannte Buckminster Follene, das sind „Kugeln“ aus 60 bzw. 70 Kohlenstoffatomen.

5.1.1 Das Experiment und die beobachteten Effekte

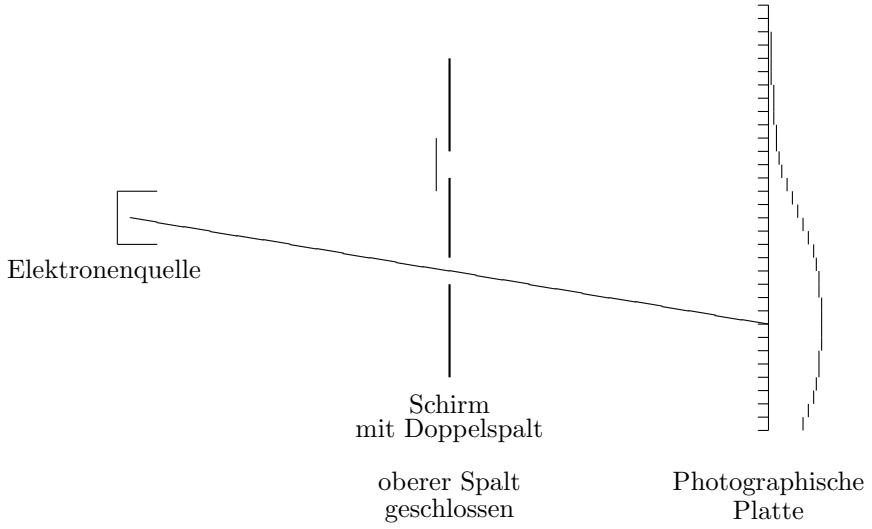


Abbildung 5.1: Das Doppelspaltexperiment. Aus einer Elektronenquelle treten Elektronen mit einer festen Geschwindigkeit aus und treffen auf einen Schirm mit zwei Spalten. Hinter dem Schirm befindet sich eine photographische Platte. Zunächst ist ein Spalt geschlossen. Die Kurve hinter der Platte deutet an, wieviele Elektronen pro Fläche auf die Platte getroffen sind.

Die experimentelle Grundausstattung ist in Abb. 5.1 wiedergegeben. Aus einer Elektronenquelle treffen Elektronen mit nahezu gleicher Geschwindigkeit auf einen Schirm. Dieser Schirm enthält zwei schmale Spalte, durch die die Elektronen hindurchtreten können. In einigem Abstand hinter dem Schirm befindet sich eine photographische Platte, auf der ein auftreffendes Elektron eine chemische Reaktion auslöst, die sich später als kleiner heller Punkt zeigt.

Die meisten Elektronen treffen auf den Schirm oder werden von diesem reflektiert. Uns interessieren hier jedoch nur die Elektronen, die tatsächlich durch die Spalte hindurchgehen und auf der anderen Seite auf die photographischen Platte treffen. Damit die Elektronen sich nicht gegenseitig beeinflussen lässt sich das Experiment so durchführen, dass nur alle paar Sekunden ein Elektron durch die Spalte tritt.

Ist einer der beiden Spalte geschlossen, und sind einige hundert oder tausend Elektronen durch den verbleibenden Spalt hindurchgetreten, so finden wir eine breite Streuung der Elektro-

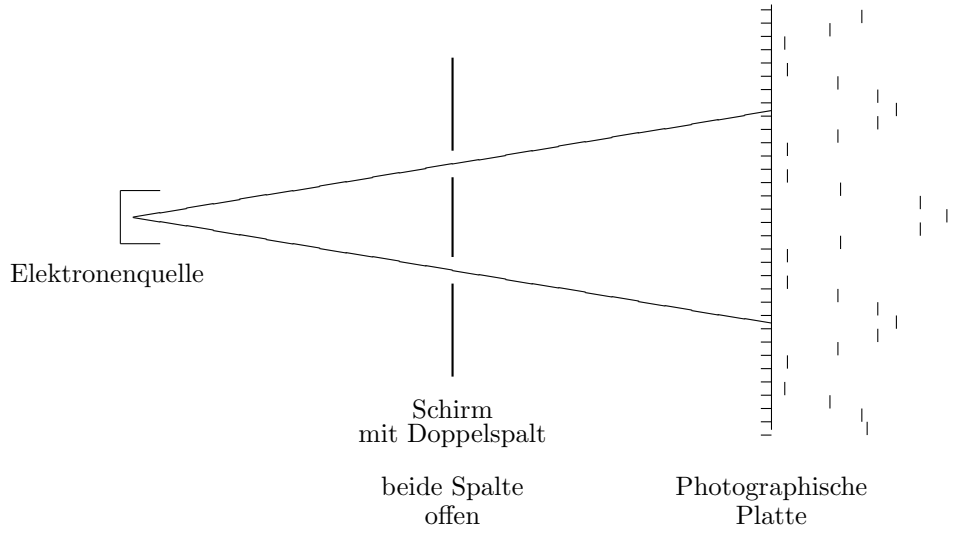


Abbildung 5.2: Das Doppelspaltexperiment. Beide Spalte sind offen. Man erkennt auf der Platte die Interferenzstreifen in Form von oszillierenden Dichteschwankungen.

nen auf der Platte mit einem Maximum an der Stelle, die der klassischen Ausbreitungsrichtung eines geradlinig fliegenden Teilchens entspricht (Abb. 5.1). Je enger der Spalt, um so breiter ist die Verteilung der Elektronen auf der Platte. Auch diese Streuung der Elektronen ist ein Quanteneffekt. Doch man könnte auch auf die Idee kommen, dass einige der Elektronen an der Kante des Spaltes in eine andere Richtung abgelenkt wurden.

Sind jedoch beide Spalte geöffnet und wartet man wiederum lange genug, bis ausreichend viele Elektronen auf die Platte aufgetroffen sind, so ergeben die Markierungen auf der Platte ein Interferenzmuster (Abb. 5.2): An manchen Stellen finden wir sehr viele Elektronen, an anderen fast gar keine.

Warum ist dieses Ergebnis so verblüffend? Wenn wir uns die Elektronen als Teilchen vorstellen – punktförmig, oder doch zumindest in einem sehr kleinen Raumgebiet konzentriert –, dann würden wir von unserer Erfahrung aus der Makrowelt vermutlich folgendermaßen argumentieren: Entweder geht ein Elektron durch den rechten oder durch den linken Spalt. Unabhängig davon, durch welchen Spalt es geht, wird es in seiner Bahn nicht davon beeinflusst, ob der jeweils andere Spalt geöffnet ist oder nicht. Wenn daher ungefähr die Hälfte der Elektronen durch den einen Spalt und die andere Hälfte durch den anderen Spalt gehen, dann sollte die Verteilung der Elektronen, wenn beide Spalte geöffnet sind, sich aus der Summe der beiden Verteilungen ergeben, wenn jeweils nur ein Spalt geöffnet ist.

Das Ergebnis sieht jedoch ganz anders aus. An manchen Stellen sind wesentlich mehr Elektronen auf dem Schirm aufgetroffen als es der Summe der einzelnen Spalte entspricht, beispielsweise in dem Bereich genau in der Mitte der Platte. Eine Auswertung der Messdaten zeigt, dass dort die vierfache Menge an Elektronen angekommen ist. Andererseits finden wir direkt

neben der Mitte einen Bereich, wo überhaupt keine Elektronen ankommen, wenn beide Spalte geöffnet sind, wohl aber wenn nur ein Spalt offen ist.

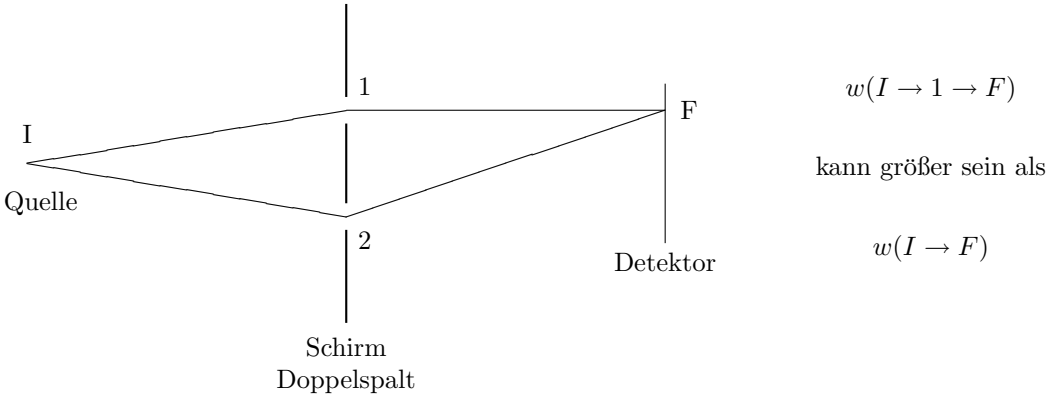


Abbildung 5.3: Die Wahrscheinlichkeit, von I nach F zu gelangen, kann größer oder auch kleiner sein als die Summe der Wahrscheinlichkeiten, von I über 1 bzw. 2 nach F zu gelangen.

Die Wahrscheinlichkeit $w(I \to F)$ vom Anfangspunkt I zum Endpunkt F zu gelangen, kann, je nach Punkt F, größer oder auch kleiner sein als die Summe der Wahrscheinlichkeiten, von I durch Spalt 1 nach F zu gelangen ($w(I \to 1 \to F)$) bzw. von I durch Spalt 2 nach F zu gelangen ($w(I \to 2 \to F)$):

$$w(I \to F) \neq w(I \to 1 \to F) + w(I \to 2 \to F)\,,$$

sie kann sogar kleiner sein als die Wahrscheinlichkeit für jeden der beiden „Teilprozesse“.

Offensichtlich dürfen die Intensitäten, die sich aus dem Experiment mit jeweils nur einem Spalt ergeben, nicht einfach addiert werden. Da die Intensität der Elektronenquelle beliebig verringert werden kann, können sich die Elektronen nicht gegenseitig beeinflussen. Auch die Annahme, dass die Elektronen an den Kanten der Spalte irgendwie abgelenkt oder gestreut würden, hilft nicht weiter. Stellen wir uns das Elektron als Punktteilchen vor, so stehen wir vor dem Erklärungsproblem, woher Elektron, das nur durch einen der Spalte zur photographischen Platte gelangen konnte, „weiß“ ober der andere Spalt geöffnet ist oder nicht.

5.1.2 Welle oder Teilchen?

Das Interferenzmuster der Elektronenverteilung auf der photographischen Platte legt nahe, dass es sich bei Elektronen um Wellen handelt. Wellen treffen als Ganzes auf beide Spalte und treten durch beide Spalte hindurch. Hinter den Spalten treffen die verschiedenen Anteile der Welle wieder aufeinander, sie überlagern sich und führen so zu dem Interferenzmuster.

Als Erwin Schrödinger 1926 die *Wellenmechanik* entwickelte und zur Beschreibung von Elektronen die *Wellenfunktion* einführte, waren ganz ähnliche Überlegungen dafür ausschlaggebend.

Schrödinger dachte dabei zunächst an eine Art „Ladungsdichtewelle“. Er konnte damit jedoch nicht die punktförmigen Flecken erklären, die ein Elektron auf der photographischen Platte hinterlässt. Er konnte auch nicht erklären, warum sich ein Elektron bei einem direkten Nachweis immer nur als ganzes, punktförmiges Teilchen erweist. Nie misst man nur einen Teil eines Elektrons – einen Teil seiner Ladung oder seiner Energie – wie man es bei einer Ladungsdichtewelle vermuten würde.

5.1.3 Nachweis des Elektrons

Man könnte auf den Gedanken kommen, zwischen der Wellen- oder Teilchennatur der Elektronen zu unterscheiden, indem man versucht, den Spalt, durch den ein Elektron tritt, ausfindig zu machen. Eine solche Messung lässt sich vergleichsweise leicht realisieren. Elektronen tragen eine feste Ladung. Legt man daher eine Drahtschlaufe um einen der Spalte, und fliegt ein Elektron durch eine solche Schlaufe hindurch, so induziert es in dem Draht einen Strom, der mit einem geeigneten Strommesser nachgewiesen werden kann. Eine andere Möglichkeit wäre, den Bereich hinter den Spalten zu beleuchten, also mit Photonen zu bestrahlen. Fliegt ein Elektron durch einen Spalt hindurch, so macht es sich in dem „Scheinwerferlicht“ hinter dem Spalt durch einen kleinen Lichtblitz bemerkbar.

Beide Methoden haben den Nachteil, dass sie das Elektron in seiner Bewegung beeinflussen. Im ersten Fall verliert das Elektron etwas Energie, damit in dem Draht ein Strom erzeugt wird. Außerdem befinden sich in dem Draht geladenen Teilchen als Stromträger, und durch die Wechselwirkung mit diesen Teilchen kann das Elektron von seiner Bahn abgelenkt werden. Im zweiten Fall müssen die Photonen eine bestimmte Mindestenergie haben, damit das Elektron eindeutig hinter einem der Spalte nachgewiesen werden kann. Die Wellenlänge des Photons darf nicht größer sein, als es dem Abstand der beiden Spalte entspricht.

Führt man das Experiment trotz dieser Nachteile durch, so findet man kein Interferenzmuster mehr. Statt dessen erzeugen die Elektronen auf der Platte eine breite Verteilung von Punkten, wie man sie bei punktförmigen Teilchen erwarten würde. Wir können zwar nun registrieren, durch welchen Spalt die einzelnen Elektronen fliegen, und tatsächlich finden wir auch, dass die Elektronen bei dieser Messanordnung immer nur durch einen der beiden Spalte treten, aber offensichtlich haben wir durch die Beobachtung des Elektrons das System so wesentlich verändert, dass die Resultate völlig anders ausfallen.

Man könnte auf die Idee kommen, den Eingriff abzuschwächen. Wir beleuchten wiederum beide Spalte mit dem Licht einer bestimmten Wellenlänge, die ausreicht, das Elektron hinter dem Spalt zu lokalisieren, aber wir drehen die Intensität dieser Photonenquelle so weit herab, dass das Licht nur noch sehr schwach erscheint. Nun wird jedoch nicht mehr jedes Elektron wahrgenommen. Es kann nun vorkommen, dass ein Elektron zwar durch die Spalte fliegt und auf der photographischen Platte seine Markierung hinterlässt, aber es wurde kein Lichtblitz gesehen. Je weiter wir die Intensität des Lichtes herabdrehen und je seltener wir einen Lichtblitz beobachten, der uns sagt, durch welchen Spalt das Elektron getreten ist, um so deutlicher wird auf der Platte das Interferenzmuster wieder sichtbar. Markiert man die Punkte auf der photographischen Platte, bei denen ein Elektron registriert wurde, so stellt man fest, dass die unregistrierten Elektronen das Interferenzmuster erzeugen und die registrierten Elektronen eine

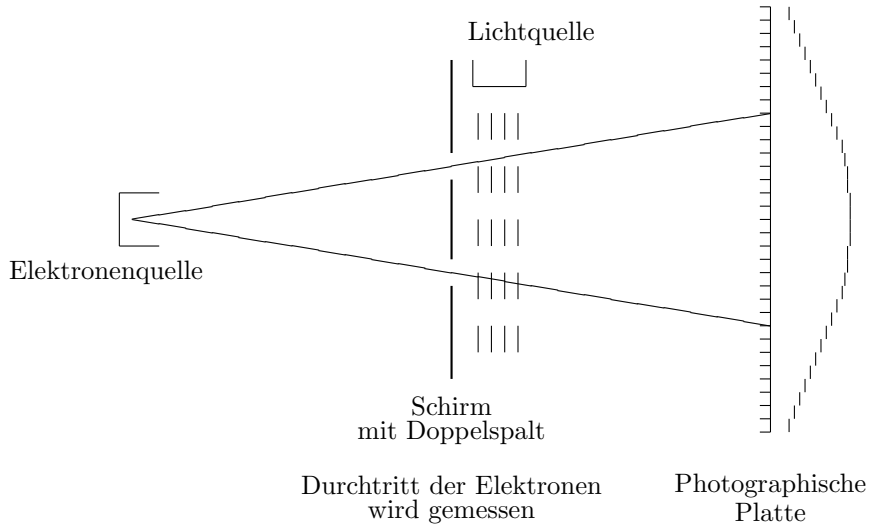


Abbildung 5.4: Das Doppelspaltexperiment. Misst man, durch welchen Spalt die Elektronen fliegen, ist das Interferenzmuster verschwunden.

breite Verteilung.

Statt die Lichtintensität zu verringern, können wir auch die Wellenlänge vergrößern. Die Energie der Lichtquelle wird dadurch ebenfalls kleiner. Doch nun wird auch der Lichtblitz, den ein Elektron hinter den Spalten erzeugt, breiter, so dass wir in einigen Fällen nicht mehr entscheiden können, hinter welchem der beiden Spalte er erzeugt wurde. Wiederum taucht nach und nach das Interferenzmuster auf. Diesmal erzeugen diejenigen Elektronen das Muster, bei denen wegen der Breite des Lichtblitzes nicht entschieden werden konnte, durch welchen Spalt sie getreten sind.

Immer wenn die experimentelle Anordnung die Entscheidung ermöglicht, durch welchen Spalt ein Elektron tritt, verschwindet das Interferenzmuster. Und immer, wenn eine solche Entscheidung prinzipiell unmöglich ist, entspricht die Verteilung der Elektronen auf der Platte dem Interferenzmuster. Als die Physiker in den zwanziger Jahren des 20. Jahrhunderts über dieses und ähnliche Experimente zur Quantenmechanik nachdachten, haben sie sich viele raffinierte Experimente ausgedacht, doch das Ergebnis war immer dasselbe: Wenn wir „wissen“, durch welchen Spalt die Elektronen gehen, finden wir kein Interferenzmuster. Nur wenn wir prinzipiell nicht wissen können, durch welchen Spalt die Elektronen geflogen sind, tritt das Interferenzmuster auf.

5.1.4 Unschärferelation und Superpositionsprinzip

Das Doppelspaltexperiment zeigt die „Wirkungsweise“ der Unschärferelation zwischen Ort und Impuls sehr eindrucksvoll. Die Elektronen treffen mit einer festen Geschwindigkeit, also ei-

ner kleinen Impulsunschärfe, auf den Doppelspalt. Diese Impulsunschärfe gilt einerseits für die Ausbreitungsrichtung: Dies ist notwendig, damit wir dem Elektron eine scharfe Wellenlänge zuordnen können, die zu klaren Interferenzmustern führt. Sie gilt aber auch für die transversalen Richtungen. Dadurch lässt sich aber nicht sagen, auf welchen der beiden Spalte die Elektronen treffen, da ihre Ortsunschärfe in der zur Ausbreitungsrichtung orthogonalen Richtung zu groß ist. Nachdem sie durch beiden Spalte hindurchgetreten sind, ist ihre Ortsunschärfe immer noch so groß, wie es dem Abstand der beiden Spalte entspricht. Dazu gehört eine senkrechte Impulsunschärfe, so dass die Elektronen nicht mehr in der Linie direkt hinten den Spalten auf die Platte auftreffen: Das Muster auf der Platte ist verbreitert. Je enger die Spalte beeinander sind, umso kleiner ist die Ortsunschärfe, um so größer also die Impulsunschärfe und daher auch um so breiter das Muster.

Das Interferenzmuster wird meist mit Hilfe des Superpositionsprinzips erklärt: Die Elektronen verlassen die Quelle in einem Zustand $|\Psi_p\rangle$, dem ein vergleichsweise scharfer Impuls in Ausbreitungsrichtung entspricht. Am Schirm werden viele Elektronen absorbiert, einige der Elektronen treten aber durch Spalt 1 bzw. 2 hindurch. Der Schirm wirkt also wie ein Filter: er projiziert aus der Wellenfunktion $|\Psi_p\rangle$ zwei Teilzustände $|\Psi_1\rangle$ (Elektron tritt durch Spalt 1) und $|\Psi_2\rangle$ (Elektron tritt durch Spalt 2) heraus. Hinter dem Schirm können wir den Zustand des Systems Elektron als Superposition schreiben:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle\big)\,. \tag{5.1}$$

An einem bestimmten Punkt x auf dem Schirm wird das Elektron im Zustand $|x\rangle$ gemessen. Nach den Axiomen der Quantenmechanik ist die Wahrscheinlichkeit dafür durch

$$|\langle x|\Psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\big(|\langle x|\Psi_1\rangle|^2 + |\langle x|\Psi_2\rangle|^2 + \langle\Psi_2|x\rangle\langle x|\Psi_1\rangle + \langle\Psi_1|x\rangle\langle x|\Psi_2\rangle\big) \tag{5.2}$$

gegeben. Die ersten beiden Terme entsprechen den üblichen Wahrscheinlichkeiten für das Elektron, entweder durch den ersten oder den zweiten Spalt zu treten. Die letzten beiden Terme sind Interferenzterme. Sind sie positiv, kann die Gesamtwahrscheinlichkeit größer als die Summe der beiden Teilwahrscheinlichkeiten sein. Sind sie negativ, kann sie kleiner als die Teilwahrscheinlichkeiten sein und sogar Null werden. Die Überlagerung der beiden Anteile der Wellenfunktion führt also zu den charakteristischen Interferenzmustern in der Intensität (dem Absolutquadrat).

Eine andere, äquivalente Erklärung ergibt sich aus der Feynmanschen Vorschrift der „Summation über Möglichkeiten“. Für jeden Punkt auf der photographischen Platte gibt es eine lokal minimale Verbindungsstrecke zwischen Elektronenquelle, durch einen der beiden Spalte und schließlich zu dem Punkt x. Mit der üblichen Näherung, die alle nicht-minimalen Wege vernachlässigt, weil sich für diese die rasch fluktuierenden Amplituden gegenseitig wegheben, haben wir somit zwei relevante Wege: die beiden möglichen Wege durch die beiden Spalte. Jedem dieser Wege wird eine Amplitude zugeordnet, deren Phase der klassischen Wirkung dieses Weges entspricht. Im Wesentlichen sind diese beiden Amplituden genau durch die Wellenfunktionen gegeben:

$$A(I \to 1 \to x) = \langle x|\Psi_1\rangle \qquad \text{und} \qquad A(I \to 2 \to x) = \langle x|\Psi_2\rangle\,.$$

Diese beiden Amplituden werden schließlich addiert, und das Quadrat dieser Summe ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, am Punkte x ein Teilchen anzutreffen.

5.1.5 AND und OR

Das Doppelspaltexperiment verdeutlicht den Unterschied zwischen AND und OR, der später im Zusammenhang mit dem Messprozess noch von besonderer Bedeutung sein wird. AND bezeichnet eine Superposition: Hinter dem Doppelspalt befindet sich das Elektron im Zustand 1 UND im Zustand 2; das Elektron ist *sowohl* durch den Spalt 1 *als auch* durch den Spalt 2 getreten. Klassische Teilchen hingegen (bwz. Elektronen, die unmittelbar hinter dem Spalt registriert werden) treten *entweder* durch Spalt 1 *oder* durch Spalt 2; sie befinden sich im Zustand 1 ODER im Zustand 2.

Die Superposition von Zuständen, die sich klassisch ausschließen, ist ein typisch quantenmechanisches Phänomen. Es handelt sich nicht um eine Unkenntnis, welcher Zustand vorliegt (dies entspricht eher dem OR). Es liegen tatsächlich beide Zustände vor, wie das Interferenzmuster beweist.

5.2 Stern-Gerlach Anordnungen

Tritt ein (unpolarisierter) Elektronenstrahl durch ein inhomogenes Magnetfeld, so spaltet sich der Strahl in zwei Teilstrahlen auf, von denen einer in Richtung des Gradienten des Magnetfeldes abgelenkt wird, der andere Teilstrahl in die entgegengesetzte Richtung. Diese Ablenkung eines Elektrons in einem inhomogenen Magnetfeld wird dem Spin des Elektrons zugeschrieben. Für einen der beiden Teilstrahlen ist der Spin in Richtung des Gradienten orientiert, für den anderen Teilstrahl hat die entsprechende Spinkomponente das umgekehrte Vorzeichen. Diesen Effekt bezeichnet man als Stern-Gerlach-Effekt.

Eine Stern-Gerlach-Anordnung ist ein sehr einfaches Messinstrument. Gemessen wird die Komponente des Spins eines Elektrons in Richtung des Gradienten. Die „Zeigerstellung“ für das Ergebnis der Messung ist zunächst der Ort des Elektrons, d.h. die Richtung, in die es abgelenkt wurde. Makroskopisch registrieren lässt sich diese Richtung entweder durch eine photographische Platte, auf die die Elektronen auftreffen, oder aber durch eine Leiterschlaufe bzw. ein Strahlungsfeld, ähnlich wie beim Doppelspaltexperiment. Diese beiden letztgenannten Möglichkeiten haben den Vorteil, dass mit dem Elektronenstrahl weiter experimentiert werden kann.

Wegen dieser einfachen Versuchsanordnung wurde das Stern-Gerlach-Experiment auch immer wieder als Beispiel für einen quantenmechanischen Messprozess herangezogen. Auch wir werden später im Zusammenhang mit der Diskussion um den Messprozess das Stern-Gerlach-Experiment genauer untersuchen (Abschnitt 10.3.2). Hier interessieren uns eigentlich eher gewisse quantenmechanische Eigenheiten, die sich durch Hintereinanderschaltung mehrerer Stern-Gerlach-Anordnungen diskutieren lassen.

Der Spin eines Teilchens ist wiederholt messbar. Dazu kann man beispielsweise mehrere Anordnungen mit derselben Richtung des Magnetfeldgradienten hintereinanderschalten. Wurde ein Elektron einmal in eine bestimmte Richtung abgelenkt, so wird es immer wieder in dieselbe Richtung abgelenkt.

Die Spin-Komponenten zu verschiedenen Richtungen sind inkommensurable Größen. Sind die Richtungen orthogonal, so ist die Inkommensurabilität sogar maximal in dem Sinne, dass ein polarisierter Elektronenstrahl mit einer festen Spin-Komponente in einem dazu orthogonalen Feld zu 50% in die orthogonalen Anteile aufgespalten wird. Nach einer solchen Messung einer zweiten Spinkomponente ist die ursprüngliche Spinorientierung zerstört. Stellt man drei Magnete hintereinander mit Gradientenrichtungen in Richtung der z-, x- und wieder der z-Achse, so werden sämtliche Strahlen jeweils zu 50% in Teilstrahlen aufgeteilt. Selbst wenn man sich also auf den Teilstrahl mit Komponente $s_z = +1$ beschränkt und eine Messung in x-Richtung vornimmt, wird eine anschließende Messung in z-Richtung wieder eine 50%ige Aufspaltung ergeben.

Ein interessanter Effekt tritt auf, wenn man nach der „Messung“ der Spinkomponente, d.h. nach dem Durchtritt durch das Magnetfeld und der Aufspaltung des Strahls, die beiden Teilstrahlen durch ein geeignetes Magnetfeld wieder zusammenführt und dann durch weitere Stern-Gerlach-Anordnungen schickt. Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel:

Eine erste Stern-Gerlach-Anordnung präpariere einen Elektronenstrahl mit $s_x = +1$-Spinkomponenten. Diese Elektronen treffen nun auf eine zweite Anordnung mit einem Magnetfeldgradienten in z-Richtung. Der Strahl spaltet zu 50% auf. Ohne jedoch diese Aufspaltung zu registrieren führen wir die Teilstrahlen wieder zusammen und schicken sie wieder durch einen Magnetfeldgradienten in x-Richtung. Es zeigt sich, daß sämtliche Elektronen in die $s_x = +1$-Richtung abgelenkt werden, so als ob die zwischenzeitliche Aufspaltung hinsichtlich der z-Komponente gar nicht stattgefunden hätte.

Registrieren wir aber nach dem Magnetfeld in z-Richtung die Aufspaltung (beispielsweise durch ein Strahlungsfeld oder eine elektrische Schleife), führen dann die Teilstrahlen wieder zusammen und schicken sie nun erneut durch ein Feld in x-Richtung, so spaltet der Strahl in zwei Teilstrahlen auf.

Diese Experiment zeigt deutlich den Unterschied zwischen der Superposition zweier Zustände (AND)und einem Gemisch (OR). Wir haben einen Eigenzustand $|s_x = +1\rangle$ der durch das z-Magnetfeld tritt. Die Aufspaltung erfolgt in zwei Komponenten $|s_z = +1\rangle$ und $|s_z = -1\rangle$. Werden die beiden Teilstrahlen ohne Registrierung wieder zusammengeführt, so entsteht der Zustand

$$|s_x = +1\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|s_z = +1\rangle + |s_z = -1\rangle)$$

im Sinne des Superpositionsprinzips. Man erhält also wieder den Eigenzustand zur x-Komponente. Dieser lässt sich auch als Dichtematrix, d.h. als Projektionsoperator scheiben:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}\left(|s_z = +1\rangle\langle s_z = +1| + |s_z = +1\rangle\langle s_z = -1|\right.\\ &\qquad \left. + |s_z = -1\rangle\langle s_z = +1| + |s_z = -1\rangle\langle s_z = -1|\right)\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Werden die beiden Teilstrahlen jedoch registriert, so erhält man nach dem Durchgang durch

das Magnetfeld in z-Richtung ein Gemisch:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{2}\left(|s_z=+1\rangle\langle s_z=+1| \;+\; |s_z=-1\rangle\langle s_z=-1|\right)\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die beiden Nicht-Diagonalterme der Dichtematrix zu dem reinen Zustand sind also durch die Registrierung des Teilstrahls zu Null gesetzt worden. Jeder dieser beiden Eigenzustände zur z-Komponente spaltet nun im x-Magnetfeld wieder zu 50% auf.

Die Situation ist in mehrfacher Hinsicht dem Doppelspalt-Experiment ähnlich: Wir haben einen präparierten Elektronenstrahl (hier Eigenzustande zur Spin-x-Komponente, bei Doppelspalt zum Impuls) der durch eine zweite Anordnung trifft, bei der der Strahl in zwei Teilstrahlen aufgespalten wird. Die beiden Teilstrahlen entsprechen zunächst verschiedenen Komponenten zu einer inkommensurablen Größe (hier zur Spin-z-Komponente, bei Doppelspalt zum Ort). Werden diese Teilstrahlen jedoch kohärent - also ohne Registrierung - wieder zusammengeführt, so erhalten wir eine Superposition der beiden Teilstrahlen. Wird jedoch der Teilstrahl registriert, so erhalten wir ein Gemisch der beiden Teilstrahlen. Der Unterschied wird in einer anschließenden Messung deutlich. Beim Doppelspalt führt eine Ortsmessung zum Interferenzmuster (keine Registrierung des Teilstrahls) bzw. einer breiten Verteilungsfunktion (Registrierung des Teilstrahls). Bei der Stern-Gerlach-Anordnung zeigt sich der Unterschied in der Tatsache, dass der Strahl bei einer anschließenden Messung der x-Komponente in ein bzw. zwei Teilstrahlen aufspaltet.

Es gibt jedoch auch einen wesentlichen Unterschied. Beim Doppelspaltexperiment hat die Beobachtung des Elektrons beispielsweise durch ein Strahlungsfeld oder eine Leiterschleife seine Energie bzw. seinen Impuls verändert. Das Elektron wurde in unkontrollierter Weise von seiner ursprünglichen Bahn abgelenkt, so dass das Interferenzmuster zerstört wurde. Bei der Stern-Gerlach-Anordnung wird ebenfalls der Impuls bzw. die Energie beeinflusst. Dies lässt sich in beliebig kleinem Maße erreichen, da die Teilstrahlen beliebig weit auseinandergeführt werden können und somit zur Registrierung nur ein beliebig schwach-energetisches Strahlungsfeld nötig ist. Die Spin-Komponente des Elektrons wird bei diesem Nachweis des Teilstrahls jedoch überhaupt nicht berührt. Man kann also davon ausgehen, dass ein $|s_z=+1\rangle$-Zustand auch nach der Registrierung des Teilstrahls ein $|s_z=+1\rangle$-Zustand geblieben ist.

Trotzdem hat die Messung den Zustand beeinflusst: Sie hat seine Phase in unkontrollierbarer Weise verändert. Auch wenn das Strahlungsfeld eine beliebig schwache Energie hat, so muss in diesem Fall der Teilstrahl doch eine entsprechend große Strecke zurücklegen, und die Phase ist unter anderem proportional zu der Strecke, die sich das Elektron im Strahlungsfeld befindet. Es entsteht nach der Zusammenführung zwar ein reiner Zustand,

$$|\psi\rangle \;=\; |s_z=+1\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|s_z=-1\rangle\,,$$

aber die Phase ist willkürlich. Bei der Bestimmung von Erwartungswerten an vielen dieser Systeme mittelt sich die Phase heraus:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\alpha\,\langle\psi|A|\psi\rangle \;=\; \langle s_z=+1|A|s_z=+1\rangle + \langle s_z=-1|A|s_z=-1\rangle\,.$$

Der gemessene Erwartungswert entspricht somit wiederum dem eines Gemischs.

Die beschriebene Stern-Gerlach-Anordnung hat noch einen weiteren interessanten Aspekt, der mit der Frage zusammenhängt, *wann* wir eine Wechselwirkung eines Quantensystems mit einem anderen System eigentlich eine Messung nennen. In dem mittleren Magnetfeld wird der Elektronenstrahl hinsichtlich der z-Komponente des Spins aufgespalten. Der gemessene Freiheitsgrad ist die Spinkomponente, die Position des Strahls die „Zeigerstellung“, die nach dem Durchgang durch das Magnetfeld mit der Spinkomponente korreliert ist. Wir können die Teilstrahlen makroskopisch weit voneinander entfernen, trotzdem hat man den Eindruck, es ist noch keine Messung erfolgt. Wir können nämlich die „Zeigerstellung“ wieder rückgängig machen, ohne dass sie von der Umgebung registriert wurde. In diesem Fall ist der Zustand derselbe, als ob überhaupt keine Messung erfolgt wäre. Erst die makroskopische Registrierung der Position - der ersten „Zeigerstellung“ - mit einem zweiten Messgerät scheint den Zustand zu zerstören. Doch wäre es nicht auch denkbar, dass sich diese zweite Messung ebenfalls wieder rückgängig machen lässt, ohne dass Spuren hinterlassen wurden? Bedeutet „Messung“ soviel wie „irreversible Registrierung“? Aber ab wann ist eine Registrierung irreversibel? Auf diese Fragen werden wir im Zusammenhang mit dem Messprozess (Abschnitt 10) intensiver eingehen.

Mithilfe einer Stern-Gerlach-Anordnung lässt sich auch eine einfache Version der „Messung ohne Wechselwirkung“ durchführen (vgl. Abschnitt 7.2). Angenommen, wir haben einen Elektronenstrahl im $|s_x = +1\rangle$-Zustand präpariert, und wir lassen diesen Strahl durch eine Messanordnung für die z-Komponente traten. In einen der beiden Teilstrahlen nach dieser z-Komponentenaufspaltung des Spins platzieren wir ein Hindernis. Nur der andere Teilstrahl breitet sich weiter aus. Führen wir diesen Teilstrahl wieder durch eine x-Anordnung, so kann sowohl $s_x = +1$ als auch $s_x = -1$ gemessen werden. Während wir im ersten Fall keine Aussage über das Vorhandensein des Hindernisses treffen können, da auch ohne Hindernis und bei Zusammenführung beider Teilstrahlen dieses Ergebnis zu erwarten wäre, wissen wir im zweiten Fall mit Sicherheit, dass das Hindernis vorhanden ist. Wir haben also eine Information über das Vorhandensein des Hindernisses erhalten, obwohl das Elektron gar nicht auf das Hindernis getroffen ist und im klassischen Sinne auch keine Wechselwirkung (Energieaustausch) mit dem Hindernis stattgefunden hat.

5.3 Ortsbestimmung eines Elektrons durch ein Mikroskop

Es wird oft behauptet, dass Eigenschaften wie “Ort“ und „Impuls“ keine Eigenschaften eines Elementarteilchens sind, sondern Eigenschaften des Systems „Elementarteilchen + Messanordnung“. Diese Eigenschaften sind also eher ein Ausdruck der Wechselwirkung zwischen dem Quantensystem und der Messapparatur. Eine große Klassen von Gedankenexperimenten beschäftigt sich mit so genannten „delayed choice“-Anordnungen, bei denen die Entscheidung über die zu messende Größe erst nach der Wechselwirkung mit dem Quantensystem gefällt wird. Diese Klasse von Experimenten zeigt, wie weit der Begriff „System + Messanordnung“ zu fassen ist, damit sich die obige Behauptung aufrecht erhalten lässt. Wir beschreiben hier ein einfaches Experiment dieser Art.

Im Jahre 1931 erschien in der *Zeitschrift für Physik* ein Artikel von C.F. von Weizsäcker

mit dem gleichlautenden Titel dieses Abschnitts [81]. In diesem Artikel werden Orts- und Impulsmessung an einem Elektron diskutiert, das sich frei in einer Ebene bewegen kann. Die Beobachtung des Elektrons erfolgt durch ein Mikroskop. Die folgende Beschreibung dieses Gedankenexperiments stammt aus [82] (S. 547). Das Experiment wird auch bei Grete Hermann ([47], S. 109) diskutiert.

> Die angenommene Versuchsanordnung war eine optische Linse, unter der sich ein Elektron irgendwo in einer vorweg bestimmten, zur Mittelebene der Linse parallelen Ebene („Objektebene“) befindet. Ferner sei sein Impuls parallel zur Ebene vor dem Versuch bekannt. Das Elektron hat also eine möglichst scharf bekannte z-Koordinate. Ein Lichtquant fällt von der Seite ein, wird am Elektron gestreut, geht durch die Linse und wird auf einer photographischen Platte jenseits (d.h. oberhalb) der Linse absorbiert. Es macht dort auf einem Punkt mit den Koordinaten ξ, η eine Schwärzung. Was kann man daraus für das Elektron folgern? Wenn die Platte, wie man es gewöhnlich tun wird, in die der Objektebene zugeordnete *Bildebene* gelegt war, so folgen aus den Gesetzen der Optik die Ortskoordinaten, x, y in der Objektebene, an denen das Lichtquant vom Elektron gestreut wurde. Hat man aber statt dessen die *Brennebene* der Linse für die Lage der Platte gewählt, so folgt aus ξ, η die Flugrichtung des Lichtquants vor dem Durchgang durch die Linse, also, gemäß dem Impulssatz, der Impuls des Elektrons nach der Streuung. Nun kann der Beobachter im Prinzip (bei großen Dimensionen und rasch beweglicher Platte) erst *nach* dem Streuprozess am Elektron *wählen*, in welche Ebene er eine vorher bereitgelegte Platte von der Seite her einschieben will. Also entscheidet er hierdurch erst nach der Messwechselwirkung, ob das Elektron durch sie einen gut definierten Ort oder einen gut definierten Impuls erhält.

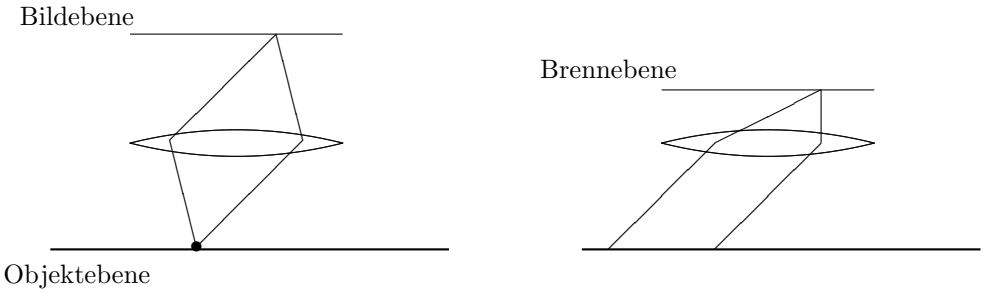


Abbildung 5.5: Messung eines Elektrons mit einem Mikroskop. Im linken Teil der Abbildung ist die photographische Platte in der Bildebene angeordnet, der Bildpunkt entspricht dem Ort des Elektrons. Im rechten Teil der Abbildung befindet sich die Platte in der Brennebene, so dass dem Bildpunkt die Richtung des einfallenden Strahls entspricht.

Abbildung 5.5 zeigt die beiden unterschiedlichen Anordnungen. Nachdem das Elektron das Photon gestreut hat, breitet sich das Photon nach oben zur Linse aus. Diese Ausbreitung kann je nach Darstellung unterschiedlicher Art sein. Für die erste Anordnung kann man sich vorstellen, dass sich das Licht in Form einer Kugelwelle um das Elektron herum ausbreitet, auf die Linse trifft und schließlich in der Bildebene diese Kugelwelle fokusiert wird. Der Punkt in der Bildebene erlaubt die Berechnung des Ortes der Streuung. Da das Licht aber unter verschiedenen Winkeln gestreut wird (Kugelwelle!), lässt sich nichts über den Impulsübertrag

vom Elektron auf das Photon aussagen. Der Impuls des Elektrons ist somit nicht bekannt.

Im zweiten Fall breitet sich als Licht als ebene Welle in eine bestimmte Richtung aus, die dem Impulsübertrag bei der Streuung entspricht. Dieses Licht trifft durch die Linse und wird auf der Brennebene gebündelt. Der Punkt auf der Brennebene kennzeichnet somit die Richtung des einfallenden Lichtstrahls und damit den Impulsübertrag bei der Streuung. In diesem Fall kennt man den Ort des Elektrons nicht genau, wohl aber seinen Impuls.

Interessanterweise unterscheiden sich die beiden Versuchsanordnungen zur Orts- bzw. Impulsbestimmung des Elektrons nur in dem Abstand der photographischen Platte von der Linse. Von Weizsäcker betont zurecht, dass diese Ebene prinzipiell erst nach der Streuung des Photons am Elektron und sogar erst nachdem der Lichtstrahl auf die Linse getroffen ist festgelegt werden kann. Man spricht bei solchen Experimenten, bei denen die Art der Messung erst nach der Wechselwirkung zwischen Messinstrument und System festgelegt wird, auch von „delayed choice-Experimenten“ bzw. „Experimenten mit verzögerter Wahl“. Dieser Begriff geht auf John Archibald Wheeler zurück, und wir werden in Abschnitt 7.4 nochmals darauf zurückkommen.

Ursprünglich hatte die Untersuchung von Weizsäckers allerdings nicht diesen Aspekt betont, sondern es war eher an eine Konsistenzprüfung der Quantenmechanik gedacht. Erst Jammer [51] hat darauf aufmerksam gemacht, dass es sich hierbei um das erste in der Literatur beschriebene delayed-choice-Experiment handelt. Berühmt geworden sind solche Gedankenexperimente nach der EPR-Arbeit (vgl. Abschnitt 6).

Eingangs wurde die Meinung mancher Physiker aufgegriffen, Eigenschaften wie „Ort“ und „Impuls“ seien nur Eigenschaften der Art der Wechselwirkung zwischen Quantensystem und Messapparatur. Das obige Gedankenexperiment zeigt, wie weit der Begriff Messapparatur bzw. Wechselwirkung hier zu ziehen ist. Nicht die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Photon bestimmt die Eigenschaft „Ort“ oder „Impuls“, sondern der gesamte Messaufbau – hier insbesondere die Position der photographischen Platte. Dies scheint der gelegentlich geäußerten Meinung, dass die spezielle Kopplung des Eichfeldes an das Dipolmoment ($A_\mu x^\mu$) die Ortsdarstellung in unserer Welt auszeichnet, zu widersprechen.

Dieses Gedankenexperiment birgt noch einen weiteren interessanten Gesichtspunkt: Es hat zunächst den Anschein, als ob bei der Wechselwirkung zwischen Elektron und Photon die gesamte *klassische* Information über das Elektron - Ort *und* Impuls - auf das Strahlungsfeld übertragen wird. Die Entscheidung, ob man den Ort oder den Impuls des Elektrons bestimmten will, kann man ja fällen, wenn das Elektron „meilenweit“ entfernt ist. Dass man nicht beide Eigenschaften bestimmen kann, liegt nun an inkommensurablen Eigenschaften des Strahlungsfeldes, da wir nicht gleichzeitig die Richtung und den Ort der Streuung bestimmten können.

Diese Situation wird uns beim EPR-Paradoxon wieder begegnen. Eigentlich bilden das gestreute Photon und das Elektron *einen* Quantenzustand. Symbolisch hat dieser Quantenzustand die Form:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \quad = \quad & \sum_p |\text{Elektron; Impuls} = p\rangle |\text{Photon; Richtung}(p)\rangle \\ & + \sum_x |\text{Elektron; Ort} = x\rangle |\text{Photon; Streuzentrum}(x)\rangle \ . \end{aligned}$$

Es gibt eine „Quantenkorrelation“ zwischen den beiden Teilchen. Durch die Messung am Photon wird die Wellenfunktion des Gesamtsystems reduziert, so dass wir nun auch dem Elektron wieder einen „eigenen“ Zustand zuschreiben können, der aber von der Wahl der an dem Photon durchgeführten Beobachtung abhängt.

Es ist auch sehr instruktiv, sich das obige Gedankenexperiment in der Sprechweise der Feynmanschen Summationen über Möglichkeiten vorzustellen. Die Wechselwirkung zwischen Elektron und Photon findet an allen Punkten der Objektebene statt, d.h., über alle Punkte ist zu summieren. Außerdem wird das Photon an jedem Punkt in alle Richtungen gestreut, es ist also für jeden Punkt noch über alle Richtungen des gestreuten Photons zu summieren. Die Photonen dieser „Möglichkeiten“ treffen nun alle auf die Linse und werden im wesentlichen nach den Regeln der geometrischen Optik gestreut. (Hier müsste man eigentlich wieder über alle Möglichkeiten summieren, aber nur die der geometrischen Konstruktion entsprechende „klassische“ Möglichkeit trägt zu einer merkbaren Amplitude bei.) Schließlich treffen diese „möglichen“ Photonen auf die photographische Platte (Abb. 5.6, Links).

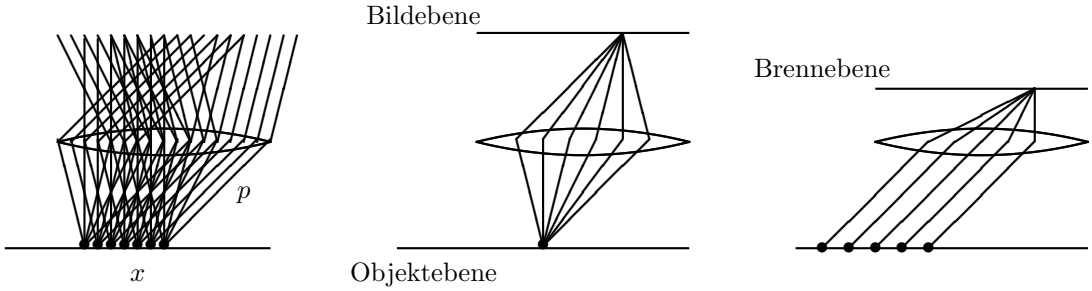


Abbildung 5.6: (Links) Alle Orte x und alle Impulse p sind möglich. (Mitte) Es tragen nur solche Möglichkeiten bei, für die x fest aber p beliebig ist. (Rechts) Nur solche Möglichkeiten tragen bei, bei denen p fest aber x beliebig ist.

Es finden wiederum alle möglichen Reaktionen statt, doch nun setzt sich eine klassische Reaktion in unserer Welt als Realität durch und führt zu einer makroskopisch beobachtbaren Schwärzung. (In einer many-worlds-Interpretation - vgl. Abschn. 12.1 - gibt es alle anderen Positionen für diese Schwärzung ebenfalls, allerdings in anderen, von uns entkoppelten Universen.) In unserer Welt werden somit nur jene möglichen Photontrajektorien zur Realität, die zu diesem Punkt, an dem die Schwärzung auftritt, geführt haben. Je nach Lage der photographischen Platte (Bildebene oder Brennebene) sind das aber alle jene Prozesse, bei denen das Elektron entweder einen festen Ort oder aber einen festen Impuls hat. Nur diese Prozesse tragen zur weiteren Entwicklung des Systems bei (Abb. 5.6, Mitte und Rechts).

5.4 Messungen ohne Störung des Messobjekts

Unter diesem Titel erschien 1960 ein Artikel von M. Renninger [70], der an Hand eines einfachen Gedankenexperiments darauf aufmerksam macht, dass es nicht die Störung der Messobjekte bei einer Messung ist, die den Indeterminismus der Quantenmechanik und die Unschärferelation ausmacht. Renninger zitiert unter anderem eine Äußerung Jordans: „Es ergibt sich unausweichlich, dass jede messende Beobachtung mit einem nicht zu vernachlässigenden *Eingriff* in das Objekt *naturgesetzlich verbunden* ist." Sein Gedankenexperiment steht im Widerspruch zu dieser Meinung, zumindest wenn man unter *Eingriff* eine Wechselwirkung im üblichen Sinne (unter anderem verbunden mit einem Energieaustausch) versteht.

Der Aufbau des Experiments ist denkbar einfach: Aus einer zentralen Quelle werden in alle Richtungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit Photonen ausgesandt. Diese Strahlung würde man somit durch eine Wellenfunktion beschreiben, die Kugelwellen entspricht. Im Abstand R_1 von dem Zentrum steht ein Schirm, der einen Raumwinkel Ω abdeckt. Ein zweiter Schirm, der den gesamten Raumwinkel abdeckt, steht in größerer Entfernung R_2. Beide Schirme seien Szintillationsschirme, d.h., beim Auftreffen eines Photons sieht man einen Lichtblitz.

Kennt man nun den Zeitpunkt der Emission eines Photons aus dem Zentrum relativ genau, so kann man die Zeit berechnen, nach der es auf den ersten Schirm auftreffen müsste. Wird von diesem ersten Schirm kein Blitz beobachtet, so weiß man, dass das Photon weiter geflogen ist und später auf den zweiten, äußeren Schirm auftreffen wird. Renninger betont nun, dass eine Reduktion der Wellenfunktion stattfindet, wenn zum berechneten Zeitpunkt *kein* Blitz auf dem ersten Schirm beobachtet wird, da man nun weiß, dass das Photon in einem eingeschränkten Raumwinkel weiterfliegt und dieser Zustand einer anderen Wellenfunktion entspricht. Ohne das Messobjekt (Photon) zu stören, führt diese „Nicht-Messung" somit zu einer Reduktion der Wellenfunktion. Im Gegensatz jedoch zu den moderneren Experimenten, bei denen tatsächlich eine „Messung ohne Wechselwirkung" stattgefunden hat (vgl. Abschnitt 7.2), kann man hier durch das Auftreffen eines Photons auf dem äußeren Schirm nicht feststellen, ob der innere Schirm vorhanden ist oder nicht.

Renninger schließt daraus, dass die vielfach geäußerte Begründung für die Unbestimmtheitsrelation durch die prinzipiell unvermeidliche Rückwirkung des Messvorganges auf das Messobjekt (s.o.) falsch ist. Er sieht die „tragende Begründung in der Einwirkung, die alle Materie der näheren und ferneren Umgebung eines Teilchens ununterbrochen auf dieses ausübt, unabhängig davon, ob sie einer Messapparatur angehört oder nicht."

Renninger hat über dieses Gedankenexperiment offensichtlich mit mehreren Physiker korrespondiert, unter anderem auch mit Heisenberg. Heisenbergs Antwort wird im Nachwort des genannten Artikels abgedruckt. Darin wehrt sich Heisenberg ebefalls gegen die Interpretation der Kopenhagener Deutung, eine Rückwirkung des Messvorgangs auf das Objekt sei die Ursache der Reduktion der Wellenfunktion. Heisenberg selber macht aber nicht die gesamte Materie der Umgebung für diese Reduktion verantwortlich, sondern die „Änderung unserer Kenntnis". Heisenberg vertritt hier somit eine sehr subjektivistische Interpretation der Wellenfunktion, auf die wir später noch eingehender zu sprechen kommen (vgl. Abschnitt 11.3).

5.5 De Broglies Paradoxon

Das Gedankenexperiment von de Broglie [21] beschäftigt sich mit dem Problem der Vollständigkeit der Quantenmechanik sowie dem Kollaps der Wellenfunktion. In mehrfacher Hinsicht kann man es als eine vereinfachte Version des EPR-Paradoxons auffassen (zumindest, soweit es die „spooky action at a distance“ betrifft), obwohl es über zwanzig Jahre später formuliert wurde. Die folgende Darstellung entstammt [75].

5.5.1 Der „experimentelle Aufbau“

Man denke sich zwei Schachteln, jeweils vom Volumen V, mit ideal reflektierenden Wänden. Jeweils eine Wand dieser Schachteln kann durch einen Schieber weggenommen werden. Zunächst stehen die beiden Schachteln nebeneinander, die beiden geöffneten Wände einander zugewandt. Das Gesamtvolumen der beiden Schachteln ist somit $2V$. In diesen Schachteln befinde sich ein Elektron. Die Wellenfunktion dieses Elektrons ist

$$\Psi(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2V}}\Delta_B(\vec{x})\;,$$

wobei

$$\Delta_B(\vec{x}) \;=\; \begin{cases} 1 & \vec{x} \text{ innerhalb der Schachtel } B \\ 0 & \text{sonst}\;. \end{cases}$$

Ohne das Elektron zu beeinflussen werden nun die Wände in die Schachteln geschoben. Eine Schachtel wird nach Paris, die andere nach Tokio gebracht. Da nicht bekannt ist, in welcher der beiden Schachteln sich das Elektron befindet, ist die neue Wellenfunktion:

$$\Psi(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{\text{Paris}}(\vec{x}) + \Psi_{\text{Tokio}}(\vec{x})\right)\;,$$

wobei

$$\Psi_{\text{Paris}}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{V}}\Delta_{\text{Paris}}(\vec{x})$$

und

$$\Psi_{\text{Tokio}}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{V}}\Delta_{\text{Tokio}}(\vec{x})\;.$$

Δ_{Paris} bzw. Δ_{Tokio} sind die charakteristischen Funktionen für die Schachtel in Paris bzw. Tokio.

Im Sinne der Quantenmechanik können wir nun nicht sagen, das Elektron befinde sich *entweder* in Paris *oder* in Tokio. Ähnlich wie beim Doppelspaltexperiment, wo wir annehmen mussten, das System Elektron gehe durch beide Spalte, sofern das Elektron nicht nachgewiesen wird, müssen wir auch hier annehmen, dass sich das „System Elektron“ an beiden Orten befindet. Eine vorsichtigere Ausdrucksweise wäre zu sagen, dass eine Messung in Paris oder Tokio das Elektron mit der durch $|\Psi|^2$ gegebenen Wahrscheinlichkeit an einem dieser Orte finden lässt.

Wird nun in Paris zum Zeitpunkt t_0 das Elektron in der dortigen Schachtel nachgewiesen, so steht damit auch gleichzeitig fest, dass sich bei einer spätere Messung in Tokio in der dortigen

Schachtel kein Elektron finden wird. Es besteht eine vollständige Antikorrelation hinsichtlich des Ergebnisses, ob ein Elektron in einer Schachtel nachgewiesen wird oder nicht. Es ist ebenfalls klar, dass wir niemals in Tokio und Paris ein halbes Elektron nachweisen werden.

5.5.2 Die Vollständigkeit der Quantenmechanik und verborgene Variable

Wir werden auf das Problem der „verborgenen Variablen“ noch häufiger zu sprechen kommen. Das Gedankenexperiment von de Broglie dient hier als anschauliches Beispiel, warum viele Physiker an solche verborgene Variable glauben.

Stellen wir uns das System Elektron mit den beiden noch ungeöffneten Schachteln in Tokio und Paris vor. Die Wellenfunktion hat also ihren Träger innerhalb einer Schachtel in Paris und innerhalb einer Schachtel in Tokio. Die Vollständigkeit der Quantenmechanik gebietet uns, das „System Elektron“ *sowohl* in Paris *als auch* in Tokio anzusehen. Eine nahezu gleichzeitige Messung in Tokio und in Paris wird das Elektron jedoch *entweder* in Tokio *oder* in Paris nachweisen.

Die meisten „objektiven Realisten“ unter den Physikern würden nun argumentieren, dass das Elektron schon vor der Messung in einer der beiden Schachteln war, und dass wir nur aufgrund unserer Unkenntnis über das System vor der Messung keine genauere Lokalisierung vornehmen konnten. Dies wird aber von der Quantenmechanik so nicht beschrieben. Ein zusätzlicher „verborgener Parameter“ $\lambda = \pm 1$ müsste in einer „realistischen“ Theorie die Position des Elektrons (Tokio oder Paris) anzeigen. Der eigentliche Zustand würde dann durch (Ψ, λ) beschrieben. Ψ enthält die Information, die uns die Quantenmechanik über den Zustand liefert, und λ die zusätzlich Information über den Ort des Elektrons vor der Messung. Diese zusätzliche Information ist in der Quantenmechanik nicht gegeben, daher würden die objektiven Realisten die Quantenmechanik als unvollständig ansehen.

Im vorliegenden Fall hat es zunächst den Anschein, als ob die Beschreibung des Zustands durch (Ψ, λ) „überbestimmt“ sei, denn wenn λ die Schachtel, in der sich das Elektron befindet, bezeichnet, dann wäre der Anteil der Wellenfunktion in der „leeren“ Schachtel überflüssig und könnte direkt gleich Null gesetzt werden. Dies ist aber nicht richtig. Wir könnten beispielsweise weder in Tokio noch in Paris eine Messung vornehmen und statt dessen die beiden Schachteln wieder zusammenbringen. Dann öffnen wir an jeder Schachtel einen kleinen Spalt und lassen das System Elektron aus diesen beiden Schachteln austreten. Im Prinzip (d.h., falls diese Operationen tatsächlich ohne eine Störung des Systems hätten ausgeführt werden können) würde die Wellenfunktion aus beiden Spalten austreten und auf einer photographischen Platte zu einem Interferenzmuster führen. Die Verteilung der Elektronen bei sehr vielen Versuchen dieser Art würde das Interferenzmuster anzeigen. Für dieses Interferenzmuster wären aber beide Anteile der Wellenfunktion notwendig, unabhängig davon, in welcher Schachtel der verborgenen Parameter λ das Elektron identifiziert hätte. In dieser Interpretation hat die Wellenfunktion Ψ somit nicht mehr nur die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Nachweiswahrscheinlichkeit des Elektrons. Wellenfunktion und Elektron werden zu zwei getrennten „Realitäten“, ganz im Sinne der Theorie von Bohm (vgl. Abschnitt 9.5).

5.5.3 Feynmans Summation über Möglichkeiten und „viele Welten“

Im Sinne von Feynmans „Summation über Möglichkeiten“ haben wir zunächst zwei Terme in dieser Summe: Der Weg einer Schachtel *mit* Elektron nach Tokio und einer Schachtel *ohne* Elektron nach Paris UND der Weg einer Schachtel *ohne* Elektron nach Tokio und einer Schachtel *mit* Elektron nach Paris York. Über beide Möglichkeiten ist zu summieren. Erst wenn in Tokio oder Paris die Schachtel geöffnet und das Elektron gemessen (oder nicht gemessen) wird, wird aus einer der beiden Möglichkeiten Realität.

Werden die beiden Schachteln ungeöffnet wieder zusammengebracht und ein Interferenzexperiment durchgeführt, kommen auch die beiden Möglichkeiten wieder zusammen und die Wahrscheinlichkeit zur Messung des Teilchens ergibt sich aus dem Absolutquadrat der beiden Möglichkeitsamplituden.

Wenn also die Schachtels in Tokio geöffnet wird und das Elektron dort gefunden wird, bedeutet das nicht, dass das Elektron sich erst in diesem Augenblick dort manifestiert, dass also gleichsam die Wellenfunktion zu einem materiellen Punktteilchen zusammenschrumpft. Wenn das Elektron gefunden wird, so wird eine der beiden möglichen Vergangenheiten (histories) zur Realität, nämlich diejenige, bei der das Elektron sich schon *die ganze Zeit über* in dem betreffenden Kasten befunden hat. Wir können also, wenn wir den Kasten öffnen, mit Recht behaupten, das Elektron befand sich schon vorher in dem betreffenden Kasten.

Interessant ist auch die Interpretation von deBroglies Gedankenexperiment vor dem Hintergrund der „Many Worlds“-Interpretation der Quantenmechanik, auf die wir in Abschnitt 12.1 noch eingehender zu sprechen kommen. Solange die beiden Schachteln in Paris und Tokio noch geschlossen sind, besteht unser Universum aus einer Superposition von zwei möglichen Universen: In einem der beiden Universen befindet sich das Elektron in Tokio, in dem anderen Universum befindet es sich in Paris. Wir können diese beiden Universen wieder „zusammenbringen“, indem wir die Schachteln ungeöffnet wieder an einen Ort bringen und Interferenzexperimente durchführen.

Wir können aber auch die beiden Universen endgültig trennen, indem wir die Schachteln öffnen und das Elektronen nachweisen. Im Sinne der Many-Worlds-Theorie findet kein Kollaps statt, wenn das Elektron an einem der beiden Orte gefunden wird, sondern es bleibt bei einer Superposition: ein Universum mit dem Elektron in Paris und ein Universum mit dem Elektron in Tokio. Allerdings sind die beiden Teilzustände nun so verschieden, dass kein Experiment die beiden Universen kohärent wieder zusammenbringen kann. Für einen Beobachter in einem der beiden Universen hat es daher den Anschein, als ob das andere Universum nicht mehr existiert.

5.5.4 Der instantane Kollaps der Wellenfunktion

Wenden wir uns nun wieder der konservativen Deutung der Quantenmechanik zu. $\Psi(x)$ ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude und $|\Psi(x)|^2$ die Wahrscheinlichkeit(sdichte) dafür, das Elektron bei einer Messung an der Stelle x vorzufinden. Die Amplitude hat einen Träger in Paris und in Tokio. In dem Moment, in dem beispielsweise in Paris das Elektron nachgewiesen wird, verschwindet der Teil der Wellenfunktion in Tokio und das Elektron ist durch eine neue Wel-

lenfunktion in Paris zu beschreiben. Diese plötzliche Änderung der Wellenfunktion bezeichnet man als ihren „Kollaps“.

Wir finden hier auch wieder den Kollaps ohne Störung des Messobjekts: Wenn wir in Tokio die Schachtel öffnen und finden *kein* Elektron, so kollabiert die Wellenfunktion instantan zu einer Wellenfunktion, die in Paris konzentriert ist. Da sich das Elektron nicht in der Schachtel in Tokio befand, fand bei dieser Messung auch keine Wechselwirkung mit dem Elektron statt. Im Sinne der Quantenmechanik hat sie aber die „möglichen Arten von Voraussagen“ (ein Ausdruck Bohrs, siehe Abschnitt 6.3.2) beeinflusst.

Um die nachfolgenden Überlegungen noch etwas krasser erscheinen zu lassen, wählen wir zwei Orte für die Schachtelhälften, die etwas weiter als Tokio und Paris voneinander entfernt sind, beispielsweise auf der Erde und auf dem Jupiter. Die mittlere Lichtsignaldauer zwischen Erde und Jupiter beträgt rund 40 min. Wir nehmen an, dass wir unsere Uhren auf der Erde und auf dem Jupiter synchronisiert haben, so dass sich gleiche Uhrzeiten im Folgenden immer auf eine Einstein'sche Uhrensynchronisation beziehen.

Wir machen nun zur vollen Stunde auf der Erde eine Messung, d.h., wir öffnen die Schachtel und schauen nach, ob sich das Elektron darin befindet. In allen Fällen, wo wir auf der Erde das Elektron vorfinden, muss die Wellenfunktion *instantan* auf dem Jupiter kollabieren. Würde sich das „Signal“ dieser Messung nämlich nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, d.h., die Wellenfunktion erst rund 40 min. später auf dem Jupiter kollabieren, dann müsste nach den Gesetzen der Quantenmechanik eine Messung auf dem Jupiter innerhalb dieser 40 min. in der Hälfte der Fälle noch ein Elektron liefern. Das ist aber wegen der absoluten Antikorrelation nicht der Fall. Da in keinem der Fälle, wo auf der Erde ein Elektron gefunden wurde, auf dem Jupiter ein Elektron gefunden wird, muss die Wellenfunktion auf dem Jupiter gleich Null sein. Das Gleiche gilt natürlich in umgekehrter Richtung: Wenn auf der Erde kein Elektron gefunden wurde, kollabiert die Wellenfunktion instantan zu einem Paket mit Träger auf dem Jupiter.

Dieser instantane Kollaps der Wellenfunktion kann nicht zu einer gesteuerten Übertragung von Signalen benutzt werden, da wir ja das Ergebnis einer Messung nicht beeinflussen können. In der Hälfte der Fälle werden wir auf der Erde das Elektron in unserer Schachtel nachweisen, und in der Hälfte der Fälle ist die Schachtel leer. Das Gleiche gilt für die Experimente auf dem Jupiter. Erst ein späterer Vergleich der Messergebnisse wird zeigen, dass eine absolute Antikorrelation vorliegt. Man kann an den Messergebnissen auf dem Jupiter noch nicht einmal ablesen, ob auf der Erde schon eine Messung an der anderen Schachtel erfolgt ist oder nicht.

Im Sinne der speziellen Relativitätstheorie ist eine solche Fragestellung auch eigentlich nicht sinnvoll. Die Einstein-Synchronisation von Uhren *definiert* die Gleichzeitigkeit von Ereignissen. Eine andere Wahl der Synchronisation ist nach der Relativitätstheorie ebenfalls erlaubt und möglich, und würde die Reihenfolge von Ereignissen bezüglich dieser Synchronisationskonvention vielleicht sogar umkehren. Noch deutlicher wird der Sachverhalt, wenn wir bewegte Beobachter berücksichtigen. Dann ist bekannt, dass es für raumartige Ereignisse keine absolute Reihenfolge gibt (sofern wir die Einstein-Synchronisation der Uhren festlegen), sondern die Reihenfolge dieser Ereignisse hängt vom Bewegungszustand des Beobachters ab.

Es wird somit zu einer Frage der Konvention, welches Ereignis den Kollaps der Wellenfunktion auslöst und inwiefern dieser Kollaps „instantan“ stattfindet. Einstein hat in einem

ähnlichen Zusammenhang (vgl. Abschnitt 6) von einer „spooky action at a distance“ gesprochen. Eigentlich benutzt jeder Beobachter seine eigene Konvention. Das für ihn erste Ereignis (die erste Messung an einer der beiden Schachteln) löst den Kollaps aus, das zweite Ereignis ist dann immer antikorreliert, d.h., dort hat der Kollaps dann schon stattgefunden. Diese Sichtweise entspricht einer sehr subjektiven Interpretation der Wellenfunktion: Die Wellenfunktion entspricht eigentlich dem Wissen des Beobachters über ein System, nicht dem System selber (vgl. Abschnitt 11.3).

Man könnte gegen diese Argumentation zunächst einwerfen, dass wir einen nichtrelativistischen Formalismus der Quantenmechanik auf Ereignisfolgen anwenden, die eigentlich nur mit einem relativistischen Formalismus behandelt werden dürfen. Doch auch die Verwendung der Dirac-Gleichung an Stelle der Schrödinger-Gleichung ändert an der Argumentation nichts. Es ist nicht die Dynamik der quantenmechanischen Wellengleichung, die hier eingeht. Es ist die Theorie des Messprozesses, und für die gibt es eigentlich keine relativistische Version.

Ein ebenfalls berechtigter, eher positivistisch geprägter Einwand ist der, dass der Kollaps der Wellenfunktion ohnehin nicht direkt beobachtbar ist. Es wird keine Energie, kein Signal, keine Information übertragen, also haben wir auch keinen Widerspruch zur Relativitätstheorie. Es bleibt jedoch die Frage, welchen „Relatitätsgrad“ die Wellenfunktion hat. Wie schon erwähnt, entspricht die obige Argumentation eher der subjektiven Interpretation der Quantenmechanik, wonach der Zustand eines Systems eine Aussage über unser Wissen über das System macht. Ein prominenter Vertreter dieser Ansicht war beispielsweise Wigner, der das Bewusstsein des Menschen explizit in die Deutung der Quantenmechanik einbauen wollte. Wir werden einige der hier aufgeworfenen Probleme nochmals im Zusammenhang mit dem EPR-Paradoxon behandeln.

5.6 Schrödingers Katze

Das vermutlich populärste Gedankenexperiment der Quantenmechanik beschreibt Schrödinger in seiner Antwort auf das EPR-Experiment [74] (§5. Sind die Variablen wirklich verwaschen?). Er erklärt dort, dass in der Quantenmechanik nicht mehr allen Observablen in jedem Zustand ein fester, streuungsfreier Wert zugesprochen werden kann. Erst die makroskopische Beobachtung führt zu einer festen Zuordnung. Er beschreibt zunächst Zerfallsprozesse sowie Teilchen in einer Blasenkammer und fährt dann fort:

> Man kann auch ganz burleske Fälle konstruieren. Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muss): in einem *Geiger*schen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, dass im Lauf einer Stunde *vielleicht* eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, dass die Katze noch lebt, *wenn* inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiftet haben. Die Ψ-Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, dass in ihr die lebende und die tote Katze (s.v.v. [sit venia verbo = man verzeihe das Wort]) zu gleichen Teilchen gemischt oder verschmiert sind.

Dieses Gedankenexperiment wird immer wieder herangezogen, weil es an Hand eines eigentlich makabren Sachverhalts die Absurdität der quantenmechanischen Gesetze zeigt, wenn man sie auf unsere Alltagserfahrungen überträgt. Schrödinger wollte darauf aufmerksam machen, dass ein typisches Quantenereignis, wie der Zerfall eines Atoms, sehr rasch zu makroskopischen Auswirkungen führen kann.

Das Problem ist wiederum, wann der Kollaps der Wellenfunktion denn genau stattfindet. Oft liest man die Behauptung, erst unser Öffnen der Schachtel, d.h. unsere Beobachtung, führt zum Kollaps der Wellenfunktion. Erst der Prozess der Bewusstwerdung tötet die Katze oder lässt sie am Leben. In diesem Fall wäre die Wellenfunktion der Katze bis zum Moment der Öffnung durch

$$|\text{Katze}\rangle \;=\; \alpha|\text{Katze, tot}\rangle| + \beta|\text{Katze, lebendig}\rangle$$

zu beschreiben.

Die meisten Physiker würden allerdings sagen, dass die Katze schon vor dem Öffnen der Schachtel entweder tod oder lebendig war und nicht in einer seltsamen Superposition dieser beiden Zustände. Als Grund wird jedoch - anders als bei dem Gedankenexperiment von de Broglie - meist nicht die Existenz verborgener Variable angeführt, sondern eine Dekohärenz zwischen diesen beiden Zuständen, die immer auftritt, wenn genügend viele Freiheitsgrade an dem Prozess beteiligt sind. Schon die Reaktion des Geigerzählers ist in dieser Hinsicht makroskopisch. Diese Physiker würden den Zustand der Katze von vorne herein (zumindest für Zeiten t, die groß genug sind, damit makroskopisch viele Freiheitsgrade an den Prozessen teilgenommen haben) als Dichtematrix schreiben:

$$\rho(\text{Katze}) \;=\; |\alpha|^2|\text{Katze, tot}\rangle\langle\text{Katze, tot}| + |\beta|^2|\text{Katze, lebendig}\rangle\langle\text{Katze, lebendig}| \;.$$

Hierbei ist

$$|\alpha|^2 \;\propto\; \mathrm{e}^{-\gamma t} \qquad \text{und} \qquad |\beta|^2 \;\propto 1 - \mathrm{e}^{-\gamma t} \;.$$

Verschiedentlich wurde der Einwand vorgebracht, man könne leicht feststellen, ob die Katze erst im Moment des Öffnens stirbt oder ob sie schon vorher tot war (falls sie beim Öffnen nicht noch lebt): Man muss neben der Katze nur noch ein Futterschälchen in den Kasten geben. Wenn man den Kasten nach längerer Zeit öffnet und findet die Katze tod, so findet man auch das Futterschälchen seit längerer Zeit unberührt. Das würde beweisen, dass die Katze nicht erst durch das Öffnen des Kastens „umgebracht“ wurde.

Dieses Argument ist aber nicht schlüssig. Bis zum Öffnen des Kastens befindet sich das Innere des Kastens in einer Superposition: „Katze tod und Schälchen seit längerer Zeit nicht mehr angerührt“ *plus* „Katze lebendig und Schälcheninhalt aufgefressen“. Durch das Öffnen des Kastens wird eine dieser Möglichkeiten zur Realität, beispielsweise „Katze tod und Schälchen seit längerer Zeit nicht mehr angerührt“.

5.7 Wigners Freund

Für Wigner hing die Problematik der Quantenmechanik eng mit der Problematik um das Verständnis von „Bewusstsein“ zusammen. Da Bohr immer wieder die Unvermeidbarkeit der

Einführung des Beobachters betonte, glaubte Wigner zunächst (irrig, vgl. [82], dem auch die folgenden Bemerkungen entnommen sind), die Quantenmechanik Bohr's sei auch auf das Bewusstsein anwendbar. Dagegen wendet sich auch von Neumann [62]: „Zunächst ist es an und für sich durchaus richtig, dass das Messen, bzw. der damit verknüpfte Vorgang der subjektiven Apperzeption eine gegenüber der physikalischen Umwelt neue, auf diese nicht zurückführbare Wesentheit ist. Denn sie führt ... hinein, in das unkontrollierbare ... gedankliche Innenleben des Individuums."

Wigner blieb jedoch bei seiner Meinung, dass das Bewusstsein in die quantenmechanische Beschreibung aufgenommen werden müsse. So formulierte er beispielsweise auch eine Theorie sogenannter „psychoelektrischer Zellen" ([75], S. 78–80), die aktiv auf die Wellenfunktion einwirken und so den Kollaps herbeiführen.

An anderer Stelle [84] versucht er zu beweisen, dass die Einbeziehung des Bewusstseins im Rahmen des herkömmlichen Formalismus der Quantenmechanik zu Widersprüchen führt. Dieses Paradoxon ist als „Wigners Freund" bekannt geworden. Wigner vertritt hierbei den Standpunkt, dass eine Wellenfunktion über einen Zustand so lange Gültigkeit hat, bis das Bewusstsein ein bestimmtes Messresultat registriert. In diesem Moment kollabiert die Wellenfunktion. Diese Ansicht, die Wigner der Kopenhagener Deutung unterstellt, versucht er zu einem Widerspruch zu führen.

Wigner stellt sich einen theoretischen Physiker W (Wigner) und einen Experimentalphysiker F (Freund) vor. Beide beschreiben ein System, das sich in zwei Zuständen s_1 und s_2 befinden kann. W und F beschreiben das System zunächst durch eine Wellenfunktion $|\psi\rangle = \alpha|s_1\rangle + \beta|s_2\rangle$. Der Freund F macht nun an dem System eine Messung und stellt einen bestimmten Zustand x fest. Für W ist die Wellenfunktion nach wie vor $|\psi\rangle$. W beschreibt nun aber auch den Zustand von F, der mit dem System in Wechselwirkung getreten ist, durch eine Superposition $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$, wobei ψ_1 und ψ_2 zwei verschiedenen Bewusstseinszuständen von F entsprechen. Nun fragt W seinen Freund F, was er beobachtet hat, erhält eine bestimmte Antwort, und in diesem Moment kollabiert nach seiner Meinung die Wellenfunktion ψ.

Nun fragt W seinen Freund F aber weiter: „Was hast Du gewusst, bevor ich Dich gefragt habe?". Der Freund sagt natürlich: „Das habe ich Dir doch gesagt, ich habe gewusst, dass das System in dem Zustand x ist." Für F war der Zustand also schon reduziert, bevor W ihn fragte. Dies scheint nach Wigner ein Widerspruch zu sein, da ein System nicht gleichzeitig in zwei verschiedenen Zuständen sein kann.

Wie schon bei Schrödingers Katze ist das Problem wiederum, ob sich für einen Beobachter (W) ein makroskopisches System (F) in einem superponierten Zustand befinden kann. Viele Physiker würden diese Frage verneinen und (ebenfalls wieder aufgrund der angedeuteten Dekohärenzeffekte) sagen, dass für W der Zustand von F durch eine Dichtefunktion zu beschreiben ist. Es handelt sich also um ein klassisches „entweder-oder". Der Übergang von reinem Zustand zu gemischtem Zustand tritt für W in dem Moment auf, wo er Teil des Messprozesses wird, d.h., wo Freiheitsgrade „seiner Welt" mit den Freiheitsgraden der Welt des Freundes in Wechselwirkung getreten sind. Dies ist aber praktisch instantan der Fall.

Doch selbst wenn man an den Kollaps nicht so früh ansetzt, scheint Wigner hier ein Fehler zu unterlaufen. Für ihn war zunächst der Zustand des Quantensystems plus Messsystem plus

sein Freund eine Superposition. Zu dieser Superposition gehört aber auch, dass der Freund in dem einen Teilzustand schon überzeugt war, dass das System im Zustand x ist, während er im anderen Teilzustand davon überzeugt war, dass sich das System nicht im Zustand x befindet. Nachdem Wigner seinen Freund gefragt hat und (seiner Meinung nach) der Zustand kollabiert ist, blieb von den beiden Teilzuständen einer übrig, einschließlich der entsprechenden Überzeugung des Freundes.

Kapitel 6

Das EPR-Paradoxon

Im Jahre 1935 erschien im Physical Review eine Arbeit von Albert Einstein zusammen mit Boris Podolsky und Nathan Rosen mit dem Titel *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* [27]. Einstein, Podolsky und Rosen (EPR) beschreiben in dieser Arbeit eine Klasse von Gedankenexperimenten an einem Zweiteilchenzustand, die sie unter sehr allgemeinen Annahmen über eine physikalische Theorie zu der Schlussfolgerung kommen lässt, die Titelfrage ihrer Arbeit zu verneinen. Mehr als jedes andere Gedankenexperiment hat das so genannte EPR-Paradoxon in der Folgezeit die Gemüter beschäftigt und in verschiedene Lager gespalten. Für die einen waren die Überlegungen von EPR ein Beweis für die Unvollständigkeit der Quantenmechanik und ein Ansporn, nach einer besseren, fundamentaleren Theorie zu suchen. Für die anderen war die Antwort von Bohr (zusammen mit Einflüssen von Pauli und Heisenberg) auf dem Boden der Quantenmechanik ein weiterer, deutlicher Beweis für die Konsistenz der Theorie.

Einstein, Podolsky und Rosen erläuterten ihre allgemeinen Überlegungen am Beispiel eines Zweiteilchensystems, bei dem sie durch eine geschickte Anordnung „Ort“ *und* „Impuls“ eines der beiden Teilchen gleichzeitig in Kenntnis zu bringen glauben. Wir werden dieses Beispiel erst am Ende des folgenden Abschnitts kurz erläutern. Im Jahre 1951 formulierte Bohm [13] die Idee für ein entsprechendes Beispiel mit Spin-Variablen, das wesentlich übersichtlicher war und in einer späteren Arbeit mit Aharonov [14] näher erläutert wurde. Wenn man heute vom EPR-Experiment spricht, so bezieht man sich meist auf dieses „Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm-Experiment“. Auch hier soll zunächst diese Version diskutiert werden.

6.1 Die Arbeit von Einstein, Podolsky und Rosen

Wir werden die philosophischen bzw. wissenschaftstheoretischen Aspekte der EPR Arbeit im wesentlichen in der Fomulierung der drei Autoren übernehmen, da sie an Klarheit kaum noch überboten werden kann.

Gleich im Titel der Arbeit von EPR treten zwei Begriffe auf, die einer Erörterung bedürfen: „vollständig“ und „physikalische Realität“. Für beide Begriffe geben EPR zu Beginn ihrer Arbeit eine Definition, die allerdings eher als „hinreichende“ Arbeitshypothese denn als „notwendiges“ Kriterium dieser Begriffe gedacht ist.

EPR-Definition von „Vollständigkeit“: *Jedes Element der physikalischen Realität muss seine Entsprechung in der physikalischen Theorie haben.*

EPR-Definition von „physikalischer Realität“: *Wenn wir, ohne auf irgendeine Weise ein System zu stören, den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit (d.h. mit Wahrscheinlichkeit gleich eins) vorhersagen können, dann gibt es ein Element der physikalischen Realität, das dieser physikalischen Größe entspricht.*

Für EPR steht dieses Kriterium als hinreichende Bedingung „im Einklang sowohl mit den klassischen als auch mit den quantenmechanischen Realitätsvorstellungen“.

EPR wiederholen nun einige Grundlagen des quantenmechanischen Formalismus, insbesondere die Bedeutung von Eigenzuständen und Eigenwerten für die physikalische Realität der entsprechenden Größe. Sie erläutern dies am Beispiel von „Ort“ und „Impuls“ eines Teilchens und zitieren den üblichen Schluss in der Quantenmechanik, *dass der Koordinate des Teilchens, sobald dessen Impuls bekannt ist, keine physikalische Realität zukommt.* Sie schließen weiter:

> Daraus ergibt sich, dass entweder (1) *die quantenmechanische Beschreibung der Realität, wie sie durch die Wellenfunktion gegeben ist, nicht vollständig ist* oder (2), *wenn die den beiden physikalischen Größen entsprechenden Operatoren nicht miteinander kommutieren, den beiden Größen nicht zugleich Realität zukommt.* Wären nämlich beide Größen zugleich real — und hätten damit bestimmte Werte –, so gingen diese Werte in die vollständige Beschreibung ein, wie es die Vollständigkeitsbedingung verlangt. Würde die Wellenfunktion dann eine solche vollständige Beschreibung der Realität leisten, so würde sie diese Werte enthalten; diese wären dann vorhersagbar. Da dies nicht der Fall ist, verbleiben uns nur die genannten Alternativen.
>
> In der Quantenmechanik wird üblicherweise angenommen, dass die Wellenfunktion tatsächlich eine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität des Systems in dem Zustand, dem sie entspricht, beinhaltet. Auf den ersten Blick erscheint diese Annahme als völlig vernünftig, da die aus der Wellenfunktion erhältliche Information genau dem zu entsprechen scheint, was ohne Änderung des Zustands des Systems gemessen werden kann. Wir werden jedoch zeigen, dass diese Annahme zusammen mit dem oben formulierten Realitätskriterium zu einem Widerspruch führt.

EPR diskutieren nun ganz allgemein den Formalismus der Quantenmechanik bei der Messung an einem Teilchen (System I), das Teil eines Zweiteilchensystems (System I+II) im Zustand Ψ ist. Die beiden Teilchen standen in der Vergangenheit in Wechselwirkung, sind aber nun getrennt und es soll keinerlei Wechselwirkung zwischen ihnen mehr bestehen.

> Es seinen $a_1, a_2, a_3, ...$ die Eigenwerte einer physikalischen Größe A, die zu dem System I gehört, und $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), ...$ die entsprechenden Eigenfunktionen, wobei x_1 für die Variablen steht, die zur Beschreibung des ersten Systems verwendet werden. Dann kann Ψ, betrachtet als eine Funktion

von x_1, ausgedrückt werden als

$$\Psi(x_1, x_2) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \;, \tag{6.1}$$

wobei x_2 für die Variablen steht, die zur Beschreibung des zweiten Systems verwendet werden. Hier sind die Funktionen $\psi_n(x_2)$ nur als die Koeffizienten der Entwicklung von Ψ in eine Reihe orthogonaler Funktionen $u_n(x_1)$ zu betrachten. Nehmen wir nun an, dass die Größe A gemessen und so ihr Werte a_k gefunden wurde. Es wird dann geschlossen, dass sich nach der Messung das erste System in dem durch die Wellenfunktion $u_k(x_1)$ gegebenen Zustand und das zweite System in dem durch die Wellenfunktion $\psi_k(x_2)$ gegebenen Zustand befindet. Dies ist der Vorgang der Reduktion des Wellenpakets; das Wellenpaket, das die unendliche Reihe (6.1) darstellt, wird auf einen einzigen Ausdruck

$$\psi_k(x_2) u_k(x_1)$$

reduziert.

Der Satz von Funktionen $u_n(x_1)$ ist durch die Wahl der physikalischen Größe A bestimmt. Hätten wir stattdessen eine andere Größe, sagen wir B, gewählt, die die Eigenwerte $b_1, b_2, b_3, ...$ und die Eigenfunktionen $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), ...$ besitzt, so hätten wir an Stelle von Gleichung (6.1) die Entwicklung

$$\Psi(x_1, x_2) \;=\; \sum_{s=1}^{\infty} \phi_s(x_2) v_s(x_1) \;, \tag{6.2}$$

erhalten, wobei die ϕ_s die neuen Koeffizienten sind. Wenn nun die Größe B gemessen und ihr Wert b_r gefunden wird, schließen wir, dass sich nach der Messung das erste System in dem durch $v_r(x_1)$ gegebenen Zustand und das zweite System in dem durch $\phi_r(x_2)$ gegebenen Zustand befindet.

Wir sehen daher, dass als Folge zweier verschiedener Messungen, die an dem ersten System ausgeführt werden, das zweite System in Zuständen mit zwei verschiedenen Wellenfunktionen vorliegt. Da andererseits die beiden Systeme zum Zeitpunkt der Messung nicht mehr miteinander in Wechselwirkung stehen, kann nicht wirklich eine Änderung in dem zweiten System als Folge von irgendetwas auftreten, das dem ersten System zugefügt werden mag. Es handelt sich hierbei natürlich nur um eine Äußerung dessen, was mit der Abwesentheit der Wechselwirkung zwischen den beiden Systemen gemeint ist. *Es ist daher möglich, zwei verschiedene Wellenfunktionen* (in unserem Beispiel ψ_k und ϕ_r) *der gleichen Wirklichkeit zuzuordnen* (nämlich dem zweiten System nach der Wechselwirkung mit dem ersten).

Nun kann es vorkommen, dass die beiden Wellenfunktionen, ψ_k und ϕ_r, Eigenfunktionen von zwei nicht-kommutierenden Operatoren sind, die jeweils physikalischen Größen P und Q entsprechen.

EPR diskutieren nun das Beispiel eines Zweiteilchensystems mit den nichtkommutierenden Orts- und Impulsobservablen. Wir werden dieses Beispiel am Ende dieses Kapitels untersuchen. Im nächsten Abschnitt betrachten wir das einfachere Beispiel von Bohm.

Nachdem EPR gezeigt haben, dass die von ihnen genannte Situation tatsächlich auftreten kann, fahren sie fort:

Kehren wir nun zu dem allgemeinen Fall zurück, der in den Gleichungen (6.1) und (6.2) betrachtet wird, und nehmen wir an, dass ψ_k und ϕ_r tatsächlich Eigenfunktionen gewisser nicht-kommutierender Operatoren P und Q mit entsprechenden Eigenwerten p_k und q_r sind. Wir werden daher durch die Messung von A oder B in die Lage versetzt, mit Sicherheit, und ohne auf irgendeine Weise das zweite

System zu stören, entweder die Größe P (d.h. p_k) oder den Wert der Größe Q (d.h. q_r) vorherzusagen. Im Einklang mit unserem Realitätskriterum müssen wir im ersten Fall die Größe P als ein Element der Realität betrachten, im zweiten Fall ist die Größe Q als ein Element der Realität anzusehen. Wie wir aber gesehen haben, gehören beide Wellenfunktionen ψ_k und ϕ_r zur gleichen Realität.

Zunächst bewiesen wir, dass entweder (1) die quantenmechanische Beschreibung der Realität, wie sie die Wellenfunktin gibt, nicht vollständig ist oder (2) bei Vorliegen zweier nicht-kommutierender Operatoren den entsprechenden physikalischen Größen nicht zugleich Realität zukommt. Indem wir dann mit der Annahme begannen, dass die Wellenfunktion eine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität liefert, gelangten wir zu dem Schluss, dass zwei physikalischen Größen mit nicht-kommutierenden Operatoren zugleich Realität zukommen kann. Auf diese Weise führt die Negation von (1) auf die Negation der einzigen anderen Alternative (2). Wir werden so gezwungen zu schließen, dass die durch die Wellenfunktionen vermittelte quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Realität nicht vollständig ist.

Man könnte Einwände gegen diesen Schluss erheben unter Berufung darauf, dass unser Realitätskriterium nicht hinreichend restriktiv ist. Tatsächlich würde man nicht zu unserer Schlussfolgerung gelangen, bestünde man darauf, zwei oder mehr physikalische Größen *nur dann* zugleich als Elemente der Realität zu betrachen, *wenn sie gleichzeitig gemessen oder vorhergesagt werden können.* Aus dieser Sicht sind die Größen P und Q nicht zugleich real, da entweder die eine oder die andere der Größen, nicht aber beide zugleich vorhergesagt werden können. Dadurch wird der Realitätsanspruch von P und Q vom Vorgang der Messung abhängig, die am ersten System ausgeführt wird und die auf keine Weise das zweite System beeinflusst. Man darf nicht erwarten, dass dies irgendeine vernünftige Definition der Realität zulässt.

Während wir somit gezeigt haben, dass die Wellenfunktion keine vollständige Beschreibung der physikalischen Realität liefert, lassen wir die Frage offen, ob eine solche Beschreibung existiert oder nicht. Wir glauben jedoch, dass eine solche Theorie möglich ist.

6.2 Die Modelle von Bohm und EPR

Bisher haben wir den allgemeinen Formalismus aus der Arbeit von EPR übernommen. Es bleibt noch zu zeigen, dass der dort behandelte Fall tatsächlich auftreten kann. Das bedeutet, je nachdem, welche Messung an Teilchen 1 vorgenommen wird, kann man nach der Reduktion des Gesamtzustandes Teilchen 2 verschiedene Wellenfunktionen zuordnen, die Eigenfunktionen zu nicht-kommutierenden Operatoren sind. Wir beschreiben zunächst das Beispiel von Bohm, da es konzeptuell wesentlich einfacher ist.

6.2.1 Das Spin-Modell von Bohm und Aharanov

Wir betrachten ein System von zwei Spin-1/2-Teilchen, die sich im Zustand mit Gesamtdrehimpuls 0 befinden. Ein solcher Zustand kann beispielsweise beim Zerfall eines Drehimpuls-0-Zustandes in zwei Spin-1/2-Teilchen auftreten. Heute betrachtet man auch oft Photonen (deren Polarisation ebenfalls nur zwei mögliche Werte annehmen kann) in der Zerfallskette $J = 0 \to J = 1 \to J = 0$. Im folgenden werden nur die Spinfreiheitsgrade beschrieben, d.h., für jedes Teilchen haben wir nur einen 2×2-dimensionalen Hilbertraum.

Sei $u_{\vec{n}}^{\pm}$ der Eigenvektor zum Operator der Spinkomponente in $\vec{n}$-Richtung mit Eigenwert ± 1, d.h.

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})\, u_{\vec{n}}^{\pm} \;=\; \pm\, u_{\vec{n}}^{\pm} \;,$$

wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ der Vektor mit den Pauli-Matrizen als Komponenten darstellt. Wählt man

$$|+\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |-\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als die Eigenzustände zu σ_3, d.h. die Spinkomponente in z-Richtung, dann erhält man $u_{\vec{n}}^{\pm}$ durch Anwendung einer SU(2)-Matrix, die einer Drehung von der z-Achse in die $\vec{n}$-Richtung entspricht.

Für das Zweiteilchensystem wählen wir die Tensordarstellung der Operatoren und Zustände. Der Spin-0-Zustand ist beispielsweise:

$$\Psi_0 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_{\vec{n}}^{+} \otimes u_{\vec{n}}^{-} - u_{\vec{n}}^{-} \otimes u_{\vec{n}}^{+} \right) \;.$$

Dieser Zustand ist rotationssymmetrisch, d.h., er hängt nicht von der Richtung des Einheitsvektors $\vec{n}$ ab.

Messungen an Teilchen 1 entsprechen Operatoren der Form $A \otimes \mathbf{1}$, Messungen an Teilchen 2 sind Operatoren der Form $\mathbf{1} \otimes B$. Angenommen, wir messen die Spin-Komponente in $\vec{n}$-Richtung an Teilchen 1, dann gilt zunächst:

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \otimes \mathbf{1}\Psi \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\vec{n} \cdot \vec{\sigma} u_{\vec{n}}^{+}) \otimes u_{\vec{n}}^{-} - (\vec{n} \cdot \vec{\sigma} u_{\vec{n}}^{-}) \otimes u_{\vec{n}}^{+} \right) \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_{\vec{n}}^{+} \otimes u_{\vec{n}}^{-} + u_{\vec{n}}^{-} \otimes u_{\vec{n}}^{+} \right) \;. \end{aligned}$$

Messen wir nun den Wert $+1$, so bedeutet dies, dass Teilchen 1 nach der Reduktion des Wellenpaketes im Zustand $u_{\vec{n}}^{+}$ ist, also

$$\Psi_0 \;\longrightarrow\; u_{\vec{n}}^{+} \otimes u_{\vec{n}}^{-} \;.$$

Somit befindet sich nach der Messung an Teilchen 1 auch Teilchen 2 in einem Eigenzustand zur Spin-$\vec{n}$-Komponente, allerdings mit umgekehrtem Eigenwert relativ zu Teilchen 1.

Da die Richtung $\vec{n}$ beliebig sein kann, trifft dieses Resultat für jede Richtung zu: Wird an Teilchen 1 die Spinkomponente in Richtung $\vec{n}$ gemessen, so befindet sich Teilchen 2 ebenfalls in einem Eigenzustand zur Spinkomponente in Richtung $\vec{n}$, wobei die Orientierung relativ zu Teilchen 1 umgekehrt ist.

Damit haben wir genau die Situation, die EPR beschrieben haben: Wir können zur Messung der Spinkomponente an Teilchen 1 die Richtung $\vec{n}$ beliebig wählen und dadurch Teilchen 2 – an dem keine Messung vorgenommen wurde, und das nach EPR auch nicht durch eine Wechselwirkung beeinflusst wurde – in einen Spineigenzustand zu einer beliebigen Richtung bringen. Diese Eigenzustände gehören aber zu Operatoren, die nicht kommutieren.

6.2.2 Das ursprüngliche EPR-Modell

Wir wollen an dieser Stelle auch das ursprüngliche EPR-Modell erläutern, obwohl es in seiner expliziten Beschreibung etwas delikater ist. EPR machen sich nicht die Mühe, zwischen den Eigenwerten und dem Spektrum eines Operators zu unterscheiden und gehen auch ziemlich sorglos mit nicht-normierbaren „Wellenfunktionen“ um.

EPR betrachten zunächst ein Zweiteilchensystem mit der Wellenfunktion

$$\Psi(x_1, x_2) \;=\; \delta(x_1 - x_2 - x_0) \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p_0 \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) \;.$$

Hierbei sind $x_0 = x_1 - x_2$ die Relativkoordinate zwischen den beiden Teilchen und $p_0 = p_1 + p_2$ der Impuls des Schwerpunkts. Die zugehörigen Operatoren $P_0 = P_1 + P_2$ und $Q_0 = Q_1 - Q_2$ kommutieren miteinander, d.h., die beiden Größen lassen sich gleichzeitig messen. Die obige Funktion ist die Eigenfunktion zu diesen beiden Operatoren mit Eigenwerten p_0 und x_0. EPR betrachten nun der Einfachheit halber speziell den Fall $p_0 = 0$, d.h.

$$\Psi(x_1, x_2) \;=\; \delta(x_1 - x_2 - x_0) \;\simeq\; \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(x_1 - x_2 - x_0)p\right) \mathrm{d}p \;.$$

Angenommen, wir nehmen nun an Teilchen 1 die Messung $A = P_1$ vor. Nach der Messung wird es sich in einem Eigenzustand zu P_1 mit Eigenwert p befinden, d.h.

$$u_p(x_1) \;=\; \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} p x_1\right) \;.$$

Da

$$\Psi(x_1, x_2) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) \,\mathrm{d}p \;,$$

folgt unmittelbar:

$$\psi_p(x_2) \;=\; \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(x_2 + x_0)p\right) \;.$$

Teilchen 2 befindet sich nach der Messung an Teilchen 1 also in einem Eigenzustand zum Impulsoperator $P_2 = \frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x_2}$ mit Eigenwert $-p$.

Nehmen wir nun andererseits an Teilchen 1 eine Koordinatenmessung vor, d.h. $B = Q_1$, so ist Teilchen 1 nach der Messung in einem Eigenzustand zum Ortsoperator mit Eigenwert x, also

$$v_x(x_1) \;=\; \delta(x_1 - x) \;.$$

Die Zerlegung von Ψ nach Eigenfunktionen vom Ortsoperator liefert

$$\Psi(x_1, x_2) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \delta(x - x_2 - x_0)\delta(x_1 - x) \;.$$

Also ist

$$\phi_x(x_2) \;=\; \delta(x - x_2 - x_0) \;.$$

Teilchen 2 befindet sich nach der Koordinatenmessung an Teilchen 1 somit in einem Eigenzustand zum Ortsoperator $Q_2 = x_2$ mit Eigenwert $x - x_0$.

Wir können also durch die Messung an Teilchen 1 den Zustand von Teilchen 2 zu einem Eigenzustand von Q_2 oder auch zu einem Eigenzustand von P_2 machen. Diese beiden Operatoren kommutieren aber nicht, wie von EPR gefordert.

6.3 Reaktionen auf EPR

Verschiedene Anhänger der Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik reagierten sofort. Niels Bohr schrieb einen Artikel im Physical Review mit demselben Titel, den schon EPR gewählt hatten [15]. Schrödinger verfasste einen Artikel in den Naturwissenschaften mit dem Titel „Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik“ [74]. Pauli schrieb einen Brief an Heisenberg [65], in dem er zunächst in seiner bekannt bissigen Art über Einstein lästerte und anschließend Heisenberg aufforderte, eine Antwort im Physical Review zu schreiben. Dies ist allerdings nicht mehr geschehen, nachdem die Antwort von Bohr schon vorlag.

6.3.1 Brief von Pauli an Heisenberg

Am 15. Juni 1935 schreibt Pauli an Heisenberg:

Lieber Heisenberg!

...

Einstein hat sich wieder einmal zur Quantenmechanik öffentlich geäußert und zwar im Heft des Physical Review vom 15. Mai (gemeinsam mit Podolsky und Rosen - keine gute Kompanie übrigens). Bekanntlich ist das jedes Mal eine Katastrophe, wenn es geschieht. „Weil, so schließt er messerschaft - nicht sein kann, was nicht sein darf“ (Morgenstern).

Immerhin möchte ich ihm zugestehen, dass ich, wenn mir ein Student in jüngeren Semestern solche Einwände machen würde, diesen für ganz intelligent und hoffnungsvoll halten würde. - Da durch die Publikation eine gewisse Gefahr einer Verwirrung der öffentlichen Meinung - namentlich aus Amerika - besteht, so wäre es vielleicht angezeigt, eine Erwiderung darauf ans Physical Review zu schicken, wozu ich *Dir* gerne zureden möchte.

Vielleicht lohnt es sich also doch, wenn ich Papier und Tinte vergeude, um diejenigen durch die Quantenmechanik geforderten Tatbestände zu formulieren, die Einstein besondere geistige Beschwerden machen.

Er hat jetzt so viel verstanden, dass man zwei Größen, die nicht vertauschbaren Operatoren entsprechen, nicht gleichzeitig messen und ihnen nicht gleichzeitig Zahlenwerte zusprechen kann. Aber woran er sich in Verbindung damit stößt, ist die Weise, wie in der Quantenmechanik zwei Systeme zu einem Gesamtsystem zusammengesetzt werden. - Man sieht dies am folgenden Beispiel, das er (im wesentlichen) auch heranzieht.

Pauli beschreibt nun in knappen Sätzen das Zweiteilchensystem im Eigenzustand des Ge-

samtimpulsoperators und des Differenzkoordiantenoperators. Er fährt dann fort:

Jetzt kommt das „tiefe Gefühl“ und sagt weiter: „Da die Messungen an 2 das Teilchen 1 nicht stören können, muss es eine „physikalische Realität“ genanntes Etwas geben, nämlich den Zustand des Teilchens 1 *an sich* - unabhängig davon, welche Messungen man an 2 gemacht hat. Es ist doch absurd anzunehmen, dass das Teilchen 1 durch Messungen an 2 verwandelt, d.h. von einem Zustand in einen anderen übergeführt wird. In Wahrheit ist die quantenmechanische Beschreibung von 1 richtig, aber *unvollständig*. Eine vollständige Beschreibung müsste dem Zustand des Teilchens 1 Merkmale zuordnen, die auch alle diejenigen Eigenschaften von 1 schon enthalten, die - *nach* möglichen Messungen an 2, welche 1 nicht stören - mit Sicherheit vorausgesagt werden können.“

Eine pädagogische Erwiderung auf den unter „...“ gesetzten Gedankengang müsste, glaube ich, folgende Begriffe klären. Den Unterschied zwischen folgenden Aussagen:

a) Zwei Systeme 1 und 2 haben keine Wechselwirkung miteinander (=Fehlen von Wechselwirkungsenergie).

Definition. Dies ist dann der Fall, wenn nach Maximalbeobachtung an 1 die Erwartungswerte aller Größen von 1 *denselben zeitlichen Verlauf* haben, wie wenn 2 nicht vorhanden wäre. (N.B. Für hinreichend kurze Zeiten spielt der Begriff der Wechselwirkung ohnehin keine Rolle.)

b) Das Gesamtsystem ist in einem Zustand, wo die Teilsysteme 1 und 2 *unabhängig* sind. (Zerfall der Eigenfunktion in ein Produkt.)

Definition. Das ist dann der Fall, wenn nach Ausführung einer Messung an 2 von einer beliebigen Größe F_2 mit *bekanntem* Ergebnis $F_2 = (F_2)_0$ (Zahl) die Erwartungswerte der Größen F_1 von 1 dieselben bleiben wie ohne Ausführung einer Messung an 2.

...

Überhaupt spukt bei älteren Herren wie *Laue* und *Einstein* die Idee herum, die Quantenmechanik sei zwar *richtig*, aber *unvollständig*. Man könne sie *durch in ihr nicht enthaltene Aussagen ergänzen, ohne die in ihr enthaltenen Aussagen zu ändern*. (Eine Theorie mit einer solchen Eigenschaft nenne ich – im logischen Sinne – *unvollständig*. Beispiel: die kinetische Gastheorie.) Vielleicht könntest Du - bei Gelegenheit der Erwiderung von Einstein - einmal in autoritativer Weise klarstellen, dass eine solche Ergänzung bei der Quantenmechanik nicht möglich ist, ohne ihren Inhalt abzuändern.

Die Bissigkeit von Pauli ist kaum zu übersehen. Interessant sind aber seine Definitionen der beiden Begriffe *wechselwirkungsfrei* und *unabhängig*. Nach diesen Definitionen sind die beiden Teilchen im EPR-Paradoxon zwar wechselwirkungsfrei, d.h., es wird keine Energie übertragen und ein Beobachter an Teilchen 2 kann durch dortige Messung alleine nicht auf die Existenz von Teilchen 1 schließen, aber sie sind im Allgemeinen nicht unabhängig. Unabhängigkeit würde bedeuten, dass die Wellenfunktionen schon vor der Messung an Teilchen 1 faktorisieren. Sämtliche Erwartungswerte von Größen, die an Teilchen 2 gewonnen werden, sind unabhängig von der Messung an Teilchen 1 und dem dort erhaltenen Resultat.

6.3.2 Bohrs Antwort auf EPR

In [72] beschreibt Leon Rosenfeld die Wirkung, die der EPR-Artikel auf die Gruppe in Kopenhagen hatte (aus [78]): „Dieser Angriff kam für uns alle wie ein Schlag aus dem Nichts. ... Bohr begann unverzüglich, mir die Umrisse einer solchen Antwort zu diktieren. Bald wurde er jedoch zögerlich: ‚Nein, so geht es nicht, wir müssen nochmals anfangen... .'. So ging es eine ganze Weile und das Erstaunen über die unerwartete Feinsinnigkeit des Arguments wuchs. ... Mit Eifer begann nun die richtige Arbeit: Tag für Tag und Woche für Woche wurde das ganze Argument sorgfälltig geprüft ...“

Bohr zitiert zunächst das Realitätskriterium von Einstein, Podolsky und Rosen und fügt dann an: „Tatsächlich enthält, wie wir sehen werden, ein Realitätskriterium wie das von den Autoren vorgeschlagene - wie vorsichtig auch immer seine Formulierung erscheinen mag - eine wesentlich Mehrdeutigkeit, wenn es auf die wirklichen Probleme, mit denen wir uns hier befassen, angewandt wird.“ Er versucht nun zunächst, das Experiment von EPR auf bekanntere Experimente an Spalten und Doppelspalten zurückzuführen, und es hat den Anschein, als ob er die unkontrollierbare Wechselwirkung zwischen Quantensystem und Messapparatur dafür verantwortlich macht, warum eine gleichzeitige Bestimmung von Ort und Impuls nicht möglich ist. Erst gegen Ende dieser Überlegungen kommt er zu dem wichtigen Schluss:

> Von unserem Gesichtspunkt aus erkennen wir nun, dass die Formulierung des oben erwähnten von *Einstein, Podolsky* und *Rosen* vorgeschlagenen Kriteriums der physikalischen Realität eine Mehrdeutigkeit in bezug auf den Sinn des Ausdrucks „ohne ein System irgendwie zu stören“ enthält. Natürlich ist in einem Fall wie dem soeben betrachteten nicht die Rede von einer mechanischen Störung des zu untersuchenden Systems während der letzten kritischen Phase des Messverfahrens. Aber selbst in dieser Phase handelt es sich wesentlich um *einen Einfluss auf die tatsächlichen Bedingungen, welche die möglichen Arten von Voraussagen über das zukünftige Verhalten des Systems definieren.* Da diese Bedingungen ein immanentes Element der Beschreibung jeglichen Phänomens ausmachen, dem man mit Recht den Begriff „physikalische Wirklichkeit“ zuschreiben kann, sehen wir, dass die Argumentation der genannten Verfasser nicht ihre Schlussfolgerung rechtfertigt, die quantenmechanische Beschreibung sei wesentlich unvollständig.

Diese Stelle von Bohr wurde oft zitiert und hat eigentlich mehr Fragen aufgeworfen als beantwortet. Bohr macht „die Bedingungen für mögliche Arten von Voraussagen“ zum entscheidenen Kriterium dessen, was sich durch die Beobachtung an Teilchen 1 für das Teilchen 2 geändert hat. Hinter diesem Zitat wird oft eine subjektive Interpretation des Zustandsbegriff gesehen, obwohl diese Bohr vermutlich nicht vorgeschwebt hat: Der Zustandsvektor eines Quantensystems beschreibt unser Wissen über den Zustand. Etwas objektiver kann man auch sagen: Der Zustandsvektor eines Quantensystems bezeichnet unser *potenzielles* Wissen über den Zustand, also das Wissen, das wir theoretisch, durch Auswertung aller uns zur Verfügung stehenden Mittel, über den Zustand haben könnten. In diesem Sinne deutet das Bohrsche Zitat schon auf die „relative state“ Interpretation der Quantenmechanik hin (vgl. Abschn 12.1).

6.4 Ist die Quantenmechanik lokal?

6.4.1 Wechselwirkungsfrei und unabhängig

Die Bohr'sche Äußerung über die Art der Beeinflussung, die eine Messung an Teilchen 2 auf den Zustand von Teilchen 1 hat, ist immer wieder angegriffen worden: „Natürlich" keine „mechanische Störung", aber doch „ein Einfluss". Einstein sprach in einem Brief an Born diesbezüglich von einer „spooky action at a distance" [16] (aus [7], S. 86).

Die Unterscheidung von Pauli zwischen „wechselwirkungsfrei" und „unabhängig" ist zwar vom formalen Standpunkt einsichtig, sagt aber noch nichts darüber aus, wie man sich physikalisch die Beeinflussung der Messung an Teilchen 2 auf den Zustand von Teilchen 1 vorstellen soll. Wenn wir nicht den rein subjektiven Standpunkt vertreten wollen, wonach die Wellenfunktion nur ein Mittel zur Beschreibung unseres Wissens über den Zustand ist, dann wird anscheinend „irgendetwas" übermittelt, zumindest ändert sich der Zustand instantan.

Die Lokalitätsforderung bezüglich Paulis Definition von „wechselwirkungsfrei" bedeutet, dass ein Experimentator in einem Gebiet A durch kein Experiment feststellen kann, welche Experimente ein anderer Experimentator in einem relativ zu A raumartigen Gebiet B macht - weder den experimentellen Aufbau noch die Ergebnisse.

Diese Form der Lokalität ist in der Quantenmechanik erfüllt. Obwohl es Korrelationen zwischen den Spin-Orientierungen der zwei Elektronen im EPR-Experiment gibt, sind diese für einen Experimentator an nur einem der beiden Elektronen nicht nachweisbar. Für einen solchen Experimentator ist der Spin-0-Zustand der beiden Elektronen ununterscheidbar von einer Dichtematrix, die proportional zur Einheitsmatrix ist. Ihm stehen nur Observable der Form $A \otimes \mathbf{1}$ zur Verfügung, und für deren Erwartungswerte gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | A \times \mathbf{1} | \Psi \rangle &= \frac{1}{2} \left[(u^+ \otimes u^- - u^- \otimes u^+)(A \otimes \mathbf{1})(u^+ \otimes u^- - u^- \otimes u^+) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[u^+ A u^+ + u^- A u^- \right] \\
&= \text{Spur}\, \rho A \,, \quad \text{mit} \;\; \rho \;=\; \frac{1}{2}\mathbf{1} \,.
\end{aligned}$$

Mit EPR-artigen Experimenten kann somit keine Information übertragen werden.

Eine schärfere Lokalitätsforderung, die Paulis Definition von „unabhängig" entspricht, verlangt, dass das Ergebnis einer Messung in einem Bereich A weder von dem konkreten Resultat einer Messung in einem von A raumartig getrennten Gebiet B abhängen soll, noch von der experimentellen Anordnung.

Diese Eigenschaft ist in der Quantenmechanik nicht erfüllt. Der Experimentator an Teilchen 1 kann zwar aus seiner Datenreihe keine Rückschlüsse ziehen, welche experimentelle Anordnung der Experimentator an Teilchen 2 benutzt oder welche Ergebnisse er erhalten hat. Wenn beide Experimentatoren ihre Ergebnisse aber schließlich vergleichen stellen sie fest, dass die experimentellen Daten korreliert sind, obwohl sie in raumartig getrennten Gebieten gewonnen wurden.

6.4.2 Raumartige Korrelationen?

Korrelierte Daten in raumartig getrennten Gebieten sind eigentlich nichts Besonderes. Man stelle sich beispielsweise eine Person vor, die jeden Tag einen Brief an einen Freund in New York und an einen Freund in Tokio schickt. In diesem Brief ist jeweils eine rote bzw. eine gelbe Karte. Nie werden zwei rote oder zwei gelbe Karten an einem Tag verschickt. Das wissen auch die Freunde in Tokio bzw. New York. Wer aber die gelbe und wer die rote Karte erhält, wissen sie erst, nachdem sie ihre Briefe geöffnet haben. Stellen wir uns nun vor, die Briefe sind nach einigen Tagen angekommen und die Freunde in Tokio und New York haben vereinbart, exakt um 10 Uhr (Weltzeit, d.h. gleichzeitig) ihre Briefe zu öffnen. Wenn der Freund in Tokio seinen Brief geöffnet hat und eine rote Karte gefunden hat, weiß er *instantan*, dass der Freund in New York in diesem Moment eine gelbe Karte gefunden hat. Trotzdem wurde diese Information nicht mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen. Das erkennt man schon daran, dass er seinen Brief (entgegen der Abmachungen) schon fünf Minuten früher öffnen kann, eine rote Karte findet und nun weiß, dass der Freund in New York in fünft Minuten in seinem Brief eine gelbe Karte *finden wird*.

Vor diesem Hintergrund wäre das EPR Experiment also nichts Außergewöhnliches. Der Zustand wurde so präpariert, dass die Spinkomponenten der Elektronen bezüglich der gleichen Richtung immer antikorreliert sind. Misst man daher an einem Elektron seine Komponente in einer Richtung, so ist es nicht verwunderlich, dass man instantan vorhersagen kann, was ein zweiter Experimentator in diesem Moment an dem anderen Elektron messen wird, wenn er die Komponente für dieselbe Richtung bestimmt. Aber der Vergleich mit den Briefen zeigt auch das Problem von EPR: Wir können uns diese Antikorrelation nur deshalb vorstellen, weil das experimentelle Ergebnis schon vor dem Öffnen der Briefe feststeht. Die gelbe bzw. rote Karte war schon seit ihrer Verschickung in dem jeweiligen Brief. Der Inhalt des Briefes ist nicht erst durch das Öffnen und Nachschauen entstanden.

Genau das glauben EPR aus ihren Überlegungen schließen zu können. Es muss schon vor der eigentlichen Messung eine „physikalische Realität“ geben, in der das Ergebnis der Messung festliegt. Bohr streitet diese Annahme ab. Für ihn befinden sich in beiden Briefen sowohl eine gelbe als auch eine rote Karte (zumindest potenziell), und erst wenn einer der Briefe geöffnet wird, entsteht aus diesen beiden Möglichkeiten eine Realität. Und erst in diesem Moment werden auch in dem anderen Brief die Möglichkeiten zu einer Realität.

Kapitel 7

Modernere Versionen von Gedankenexperimenten

In den vergangenen 20 Jahren wurden Photonen immer mehr zum Gegenstand von Gedankenexperimenten wie auch von tatsächlich realisierbaren bzw. durchgeführten Experimenten. Grundsätzlich verhalten sich Photonen wie alle anderen Elementarteilchen auch, doch durch ihre verschwindende Masse lassen sich größere Wellenlängen erreichen, wodurch die Interferenzmuster breiter werden. Außerdem gibt es mittlerweile Techniken, Experimente mit einzelnen Photonen durchzuführen und einzelne Photonen nachzuweisen.

Bevor wir jedoch auf die neueren Photonenexperimente eingehen, soll ein Effekt besprochen werden, der mittlerweile seit fast 40 Jahren bekannt ist: der Quanten-Zeno-Effekt. Dieser Effekt wird bei einigen der später erwähnten Experimente ausgenutzt, er ist aber auch für sich genommen sehr interessant.

7.1 Der Quanten-Zeno-Effekt

Die Schule der Eleaten (nach dem Ort Elea in Unteritalien) erlangte unter Parmenides (540–470 v. Chr.) eine gewisse Bedeutung. Nach der Theorie des Parmenides ist alles Seiende unveränderlich und unbewegt. Bewegung ist eine Illusion unserer Wahrnehmung.

Diese Theorie wurde durch die bekannten Paradoxien des Zenon von Elea (490–430 v. Chr.) untermauert. Er versucht in seinen Beispielen zu zeigen, dass die Annahme von Bewegung als Ortsveränderung in der Zeit zu Widersprüchen führt. So argumentiert er, dass ein Pfeil niemals sein Ziel erreichen könne, denn wenn man seinen Flug in einzelne Zeitpunkte zerlegt, so steht der Pfeil zu jedem Zeitpunkt still, da es in einem Zeitpunkt keine Bewegung geben kann. Doch damit kann er sich auch insgesamt nicht bewegen.

In der Quantenmechanik kann es jedoch tatsächlich passieren, dass die Beobachtung eines Systems (unter bestimmten technischen Voraussetzungen) dieses System gegen Veränderungen stabilisiert. Im Extremfall kann eine (hypothetische) kontinuierliche Beobachtung ein System vollkommen einfrieren. Man könnte in diesem Fall vereinfacht sagen: „Bewegung gibt es nur, wenn wir nicht hinschauen." In der englisch-sprachingen Literatur drückt man das durch die Metapher „a watched pot never boils" aus und spricht vom „watched pot effect". Dieser so genannte Quanten-Zeno-Effekt wurde von Misra und Sudarshan [60] in den 70er Jahren entdeckt.

7.1.1 Der Quanten-Zeno-Effekt am 2-Zustandssystem

Der Einfachheit halber stellen wir uns ein 2-Zustandssystem vor. Die beiden Zustände lassen sich als orthogonale Einheitsvektoren in einem 2-dimensionalen Vektorraum darstellen. Eine „Beobachtung" wird durch den Operator

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Unmittelbar nach einer Beobachtung befindet sich das System in einem der beiden zugehörigen Eigenzustände

$$\psi_1 = |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \psi_2 = |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die wir auch durch ihre Projektionsoperatoren darstellen können:

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

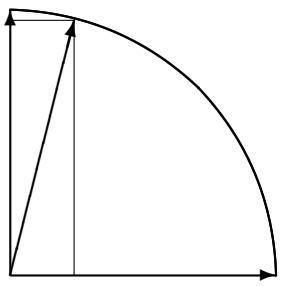
Als Hamilton-Operator des unbeobachteten Systems wählen wir

$$H = g\sigma_1 = g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei g eine freie Kopplungskonstante ist. Der unitäre Zeitentwicklungsoperator ist damit:

$$U(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht} = \begin{pmatrix} \cos gt & \mathrm{i}\sin gt \\ \mathrm{i}\sin gt & \cos gt \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir können uns den Zustand des Systems also wie einen rotierenden Pfeil in einer Ebene vorstellen. Eine Beobachtung projiziert diesen Pfeil auf einen der beiden Zustände. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer solchen Beobachtung in Zustand 1 oder 2 zu landen ist proportional zum Quadrat der entsprechenden Komponente des Zustands.



(2)

Ohne Beobachtung ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach der Zeit t noch im Zustand $|+\rangle$ befindet, gleich

$$w(t) = |\langle +|U(t)|+\rangle|^2 = \cos^2 gt\,. \tag{7.1}$$

Diese oszillierende „freie“ Entwicklung des Systems definiert eine Zeitskala t_0, die durch die Konstante g gegeben ist. Definieren wir t_0 als die Zeit, nach der sich das System von Zustand (1) ausgehend in dem Zustand befindet, in dem es mit derselben Wahrscheinlichkeit in (1) wie in (2) gemessen würde (nachdem sich der Pfeil also um eine achtel Volldrehung weiterbewegt hat), so gilt:

$$t_0 = \frac{\pi}{4g}\,.$$

Wir nehmen nun an, dass im zeitlichen Abstand von Δt an dem System wiederholte Beobachtungen vorgenommen werden, die das System in den Zustand (1) bzw. (2) projizieren. Zwischen diesen Beobachtungen entwickelt sich das System nach dem oben angegebenen Hamilton-Operator. Unter T verstehen wir die Zeitskala, nach der das System mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit seinen Anfangszustand verändert hat. Ohne Beobachtung wäre $t_0 = T$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach N Beobachtungen, also nach der Zeit $T = N \cdot \Delta t$, immer noch im Ausgangszustand $|+\rangle$ befindet (und auch bei allen Beobachtungen bis zu diesem Zeitpunkt dort befunden hat) ist durch

$$w(N) = \left|\langle +|(P_+ U(\Delta t) P_+)^N|+\rangle\right|^2 = \left[\cos^2(g\,\Delta t)\right]^N \tag{7.2}$$

gegeben. Das ist einfach das Produkt der Überlebenswahrscheinlichkeiten bei jeder einzelnen Beobachtung. Die Anzahl der Beobachtungen N, nach der die Wahrscheinlichkeit $w(N)$ auf 1/2 abgefallen ist, ist durch die Bedingung

$$w(N) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad [\cos(g\,\Delta t)]^{2N} = \frac{1}{2} \tag{7.3}$$

gegeben, oder auch

$$\cos(g\,\Delta t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N}\ln 2}\,.$$

Da nach unserer Annahme $N = T/\Delta t \gg 1$ gelten soll, ist die rechte Seite dieser Gleichung nahe eins und wir können den Kosinus entwickeln:

$$\left(1 - \frac{(g\,\Delta t)^2}{2} + \ldots\right) \approx 1 - \frac{1}{2N}\ln 2 + \ldots \tag{7.4}$$

bzw.

$$g = \sqrt{\frac{\ln 2}{N\,\Delta t^2}} = \sqrt{\frac{\ln 2}{T\,\Delta t}}\,. \tag{7.5}$$

Ersetzen wir die Kopplungskonstante g noch durch die Zeitskala der ungestörten Entwicklung des Systems, so erhalten wir:

$$t_0 = \frac{\pi}{4\sqrt{\ln 2}}\sqrt{T\,\Delta t}\,. \tag{7.6}$$

Anschaulich können wir uns die Zusammenhänge zwischen den Zeitskalen Δt, t_0 und T an Abb. 7.1 verdeutlichen. Nach jedem Zeitintervall Δt wird das System durch die Beobachtung auf eine der beiden Eigenzustände von σ_3 projiziert. Je kleiner Δt, umso wahrscheinlicher erfolgt diese Projektion in den vorhandenen Zustand, bis das System tatsächlich kippt (Zeit T).

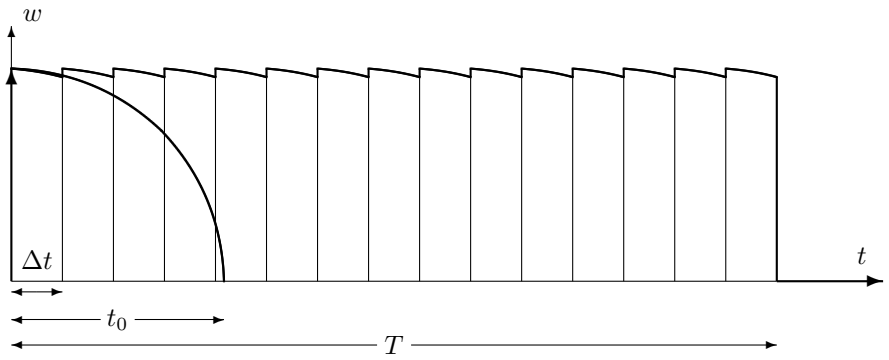


Abbildung 7.1: Verhältnis der Zeitskalen beim Quanten-Zeno-Effekt.

7.1.2 Realisierung des Quanten-Zeno-Effekts durch optische Filter

Eine einfache Version des Quanten-Zeno-Effekts wurde 1980 von Asher Peres experimentell realisiert. Er verwendete dazu linear polarisiertes Licht, das durch eine Serie von Systemen hindurchtritt, die die Polarisationsebene eines Lichtstrahls drehen.

Die Drehung der Polarisationsebene bezeichnet man auch als *natürliche optische Aktivität* eines Mediums. Sie kann nur bei solchen Medien auftreten, bei denen die Moleküle oder ihre Anordnungen nicht punktsymmetrisch sind, typischerweise also bei Substanzen, die in einer L- und einer R-Version auftreten können. Bekannte Beispiele dafür sind Traubenzucker oder Weinsäure. An Weinsäure wurde dieser Effekt 1849 von Louis Pasteur auch zum ersten Mal entdeckt.

Wir betrachten nun Kristalle, die die Polarisationsebene des Lichts um einen Winkel $\alpha = 90°/N$ drehen. Das Licht tritt dabei vollständig hindurch. Wird dieser Polarisationsdreher mehrfach in dieselbe Richtung durchlaufen, so wird der Winkel der Polarisationsebene jedesmal um den Winkel α gedreht. Durchläuft das Licht den Polarisationsdreher jedoch in Vor- und Rückrichtung (beispielsweise, nachdem es an einem Spiegel reflektiert wurde) so wird die Drehung der Polarisationsebene wieder rückgängig gemacht. Ein solcher Polarisationsdreher unterscheidet sich also von einem Polarisationsfilter, der unter einem Winkel α zur Polarisationsebene des einfallenden Strahls aufgestellt wird: In diesem Fall wird (sofern die Polarisationsebene des Lichts nicht gleich der Polarisationsrichtung des Filter ist) ein Teil des Lichts am Polarisationsfilter absorbiert. Außerdem ändert sich die Polarisationsebene (ebenso wie die Intensität des Lichts) nicht mehr, wenn das Licht mehrfach durch den Filter tritt.

Der Vollständigkeit halber, und weil es in manchen Experimenten ausgenutzt wird, sollten wir erwähnen, dass es auch Polarisationsdreher gibt, die auf dem so genannten *Faraday-Effekt* beruhen. In diesem Fall ist nicht das asymmetrische elektrische Feld für die Drehung der Polarisationsebene verantwortlich, sondern das Magnetfeld. Daher ist dieser Effekt auch invariant unter Umkehrung der Strahlrichtung: Wenn ein Lichtstrahl hinter dem Polarisationsdreher an einem Spiegel reflektiert wird und den Polarisationsdreher in beide Richtungen durchläuft, so verdoppelt sich der Effekt.

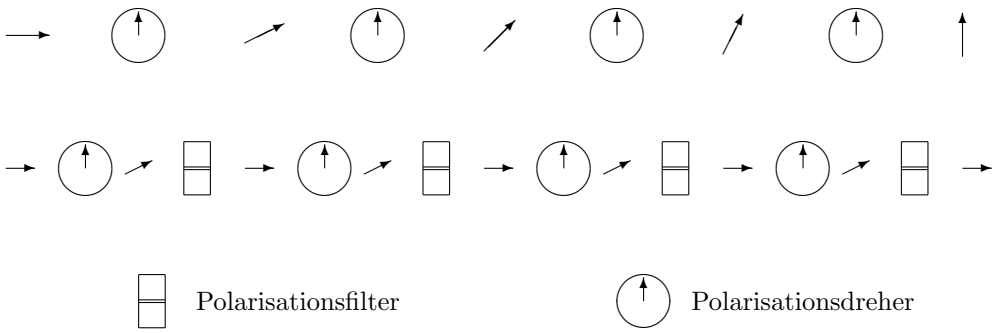


Abbildung 7.2: Realisation des Quanten-Zeno-Effekts mithilfe von Polarisationsdrehern und Polarisationsfiltern.

Zwischen je zwei solchen Kristallen bleibt die Polarisationsebene unverändert. Stellen wir nun N solcher Kristalle hintereinander, so wird die Polarisationsebene insgesamt um $N\alpha = 90°$ gedreht. Ist beispielsweise $\alpha = 15°$, so wurde die Polarisationsebene nach sechs solcher Durchläufe um 90° gedreht. Dieses System entspricht der „freien“ Propagation des Lichtstrahls (vgl. Abb. 7.2, oben).

Nun schalten wir zwischen je zwei Polarisationsdreher einen Polarisationsfilter, der nur Licht mit einer bestimmten Polarisation durchlässt (Abb. 7.2, unten). Angenommen, das Licht ist zunächst horizontal polarisiert und die zwischengeschalteten Polarisationsfilter haben ebenfalls immer eine horizontale Durchlassrichtung. Bei jedem dieser Polarisationsfilter kann das Licht mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit absorbiert werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon, nachdem es N Polarisationsrotoren und N Polarisationsfilter durchlaufen hat, immer noch nicht absorbiert wurde, beträgt:

$$w = \left(\cos^2(\alpha/N)\right)^N \ .$$

Schalten wir hinter die gesamte Apparatur einen horizontal ausgerichteten Polarisationsfilter, so würde ein Photon mit Wahrscheinlichkeit w diesen Filter durchqueren. Für $\alpha = 15°$ und $N = 6$ ist $w = 0{,}66$. Rund 1/3 aller Photonen können also das Gesamtsystem durchdringen. Für $\alpha = 1°$ und $N = 90$ gilt schon: $w = 0{,}973$. Ohne die zwischengeschalteten Polaritationsfilter (Beobachtungen) wäre $w = 0$ (alle Photonen sind vertikal polarisiert) und kein Photon könnte den letzten Filter passieren.

7.2 Messung ohne Wechselwirkung

Ein Artikel aus dem Jahre 1993 ([30]) mit dem Titel „Interaction-free measurement beschrieb ein interessantes Experiment, bei dem eine Messung vorgenommen wurde, ohne dass mit dem untersuchten System eine Wechselwirkung stattgefunden hat. Im Gegensatz zu dem schon beschriebenen Experiment von Renninger („Messung ohne Störung des Messobjekts“, vgl. Abschnitt 5.4), wurde hier mit einem einzelnen Photon eine Eigenschaft eines Messobjekts überprüft und

man kann eine definitive Aussage über diese nicht-triviale Eigenschaft machen. Natürlich hat dieser Artikel die alte Diskussion über die Frage „Was ist eine Wechselwirkung“ wieder aufgeworfen, doch im Folgenden wollen wir unter Wechselwirkung immer die strenge Pauli'sche Definition verstehen: Zwei Systeme haben keine Wechselwirkung miteinander, wenn keine Energie ausgetauscht wurde.

Das erwähnte Experiment sowie viele der neuen Gedanken- und Grundlagenexperimente zur Quantenmechanik beruhen auf dem Prinzip des Mach-Zehnder-Interferometers, das wir daher zunächst besprechen wollen.

7.2.1 Das Mach-Zehnder-Interferometer

Das Mach-Zehnder-Interferometer hat mittlerweile den Doppelspalt als Möglichkeit der Strahlteilung und Strahlzusammenführung abgelöst. Bei diesem Gerät lassen sich die beiden Teilstrahlen im Prinzip beliebig weit voneinander trennen, wodurch die seltsamen Quanteneffekte noch eindrucksvoller werden.

Das wesentliche Bauelement des Mach-Zehnder-Interferometers ist der Strahlteiler (halbdurchlässiger Spiegel). Es handelt sich hierbei um eine metallisch beschichtete Glasscheibe, die einen Teil des einfallenden Lichts reflektiert und den anderen Teil durchlässt. Solche Strahlteiler stehen für unterschiedlichste Anforderungen zur Verfügung: das Verhältnis von reflektiertem zu durchgelassenem Strahl lässt sich variieren, durch die Wahl der Beschichtung lassen sich nur bestimmte Frequenzbereiche beeinflussen, außerdem können Strahlteiler meist in beide Richtungen verwendet werden.

Bei einem Strahlteiler tritt zwischen dem reflektierten Licht und dem durchgelassenen Licht eine Phasenverschiebung auf. Handelt es sich (wie in den meisten Anwendungen) um eine Reflexion unter einem Winkel von 90°, so beträgt die Phasenverschiebung gerade eine viertel Wellenlänge ($\lambda/4$). Diese Phasenverschiebung wird im Folgenden noch wichtig.

Beim Mach-Zehnder-Interferometer trifft ein einfallender Lichtstrahl zunächst auf einen Strahlteiler. Ein Lichtstrahl wird durchgelassen (wir bezeichnen ihn mit „t“ für „transmittiert“) und einer wird unter einem Winkel von 90° reflektiert (Lichtstrahl „r“). Die beiden Lichtstrahlen trennen sich also unter einem Winkel von 90° und werden anschließend von zwei Spiegeln ebenfalls unter einem Winkel von 90° reflektiert. Schließlich treffen sie bei einem zweiten Strahlteiler wieder zusammen. Hinter diesem zweiten Strahlteiler kann das Licht im Prinzip an zwei verschiedenen Stellen beobachtet werden (D und C).

Wenn die beiden Wegstrecken der Strahlen exakt gleich lang sind findet man an der einen Stelle hinter dem Mach-Zehnder-Interferometer gerade eine Auslöschung der Lichtstrahlen (destruktive Interferenz) und an der anderen Stelle eine Verstärkung (konstruktive Interferenz). Der Grund ist eine gewisse Asymmetrie zwischen den Strahlen, die bei D und C ankommen (vgl. Abb. 7.3): Beide Strahlen, die bei dem Detektor C zusammenkommen, wurden jeweils einmal an einem halbdurchlässigen Spiegel reflektiert und einmal durchgelassen. Die beiden Strahlen befinden sich also bei Detektor C in Phase und es tritt konstruktive Interferenz auf.

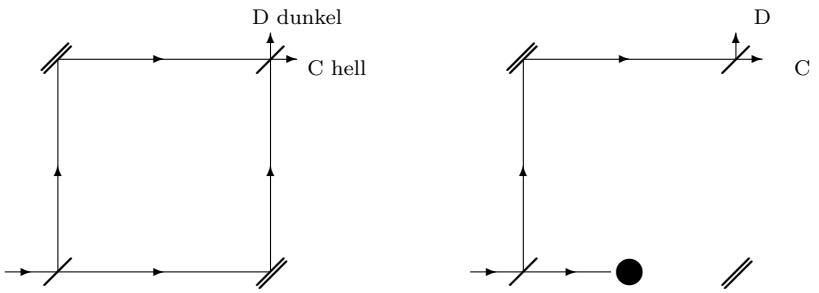


Abbildung 7.3: Mach-Zehnder Interferometer.

Betrachten wir die Strahlengänge zu Detektor D so stellen wir fest, dass einer der beiden Strahlen an beiden Strahlteilern reflektiert wurde, der ander Strahl jedoch bei beiden Strahlteilern durchgelassen wurde. Daher hat der eine Strahl relativ zu dem anderen Strahl nun eine Phasenverschiebung von $\lambda/2$, und es findet destruktive Interferenz statt. Werden also beide Strahlgänge kohärent durchlaufen, sollte man bei D nie ein Photon messen, statt dessen bei C immer.

7.2.2 Das Grundexperiment

Verringert man die Strahlintensität so weit, dass nur noch einzelne Photonen das Interferometer durchfliegen, so lässt sich eine einfache Version des „Doppelspaltexperiments“ durchführen. Im Gegensatz zu einem tatsächlichen Doppelspalt können hier jedoch die beiden Strahlgänge (im Prinzip) beliebig weit voneinander entfernt verlaufen. Außerdem hat dieses Experiment den Vorteil, dass die Signale an den beiden Detektoren D und C einfacher auszuwerten sind, als beim Doppelspaltexperiment: Die Photonen müssen mit Wahrscheinlichkeit 1 bei Detektor C gemessen werden, während bei Detektor D kein Photon ankommen darf.

Bringt man in den Strahlgang eine Schablone, die die Photonen abschirmt, so gibt es für ein Photon nur noch zwei Möglichkeiten: Entweder durchläuft es den abgeschirmten Weg, wird von der Schablone absorbiert und trifft auf keinen der beiden Detektoren. Oder es durchläuft den freien Weg. Dabei kann es am zweiten Strahlteiler reflektiert oder durchgelassen werden, Detektor C und D messen also im Mittel gleich viele Photonen. Hier zeigt sich der Vorteil dieser Apparatur besonders: Ein einzelnes Photon bei Detektor D „beweist“ (im Idealfall), dass einer der beiden Strahlgänge versperrt ist.

Im Teilchenbild ist dieses Verhalten unverständlich. Man könnte die Schablone durch einen Detektor ersetzen. Selbst wenn dieser Detektor kein Photon misst, verhält sich das Photon anders, als wenn der Detektor nicht da ist. Das Ergebnis dieses Experiments lässt sich nur durch die konstruktive bzw. destruktive Interferenz einer Welle verstehen.

In der Praxis verwendet man oft eine etwas andere Anordnung (Abb. 7.4), die aber dem

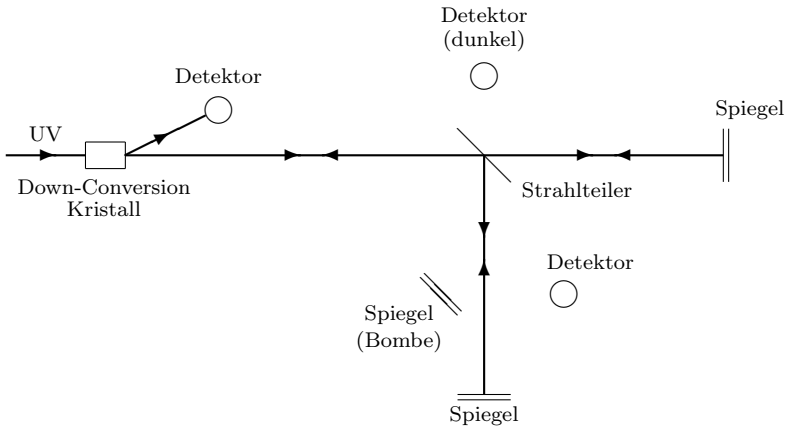


Abbildung 7.4: Experimentelle Realisierung von Interferenzexperimenten. Der bewegliche Spiegel (Bombe) kann in den Strahlgang nach unten geschoben werden und lenkt das Photon auf den Detektor. Der obere Detektor (dunkel) sollte nur Ereignisse anzeigen, bei denen ein Hindernis im zweiten Strahlgang vorhanden ist. Der untere Detektor zeigt an, ob das Hindernis getroffen wurde. Auf diese Weise ist der Detektor „hell“ überflüssig.

Prinzip des Mach-Zehnder-Interferometers entspricht ([54]). Zunächst erzeugt man sich in einem so genannten Konversionskristall („down conversion“) ein Photonenpaar. Dazu bestrahlt man den Kristall mit ultraviolettem Laserlicht. Manchmal wird ein Photon absorbiert und statt dessen werden zwei „Töchter“-Photonen mit einer niedrigeren Energie emittiert. Wird eines dieser beiden Photonen in einem Detektor nachgewiesen weiß man, dass ein zweites Photon da ist, das nun für das Experiment verwendet wird.

Dieses zweite Photon trifft auf einen Strahlteiler und kann diesen durchlaufen oder es kann reflektiert werden. In beiden Fällen wird es an Spiegeln reflektiert und trifft wieder auf den Strahlteiler. Die Anordnung ist so justiert, dass ohne Hindernis aufgrund von destruktiver Interferenz kein Photon auf den Detektor (dunkel) gelenkt wird. Die Photonen treten also mit Sicherheit nach links wieder aus. Als Hindernis im unteren Strahlgang dient ein Spiegel, der, sofern er von einem Photon getroffen wird, dieses auf den Detektor nach rechts ablenkt.

7.2.3 Das Prinzip von „Messung ohne Wechselwirkung“

Stellen wir uns vor, wir haben ein richtig justiertes Mach-Zehnder-Interferometer, wir können Experimente mit einzelnen Photonen durchführen, und wir haben an den Beobachtungsstellen D und C je einen Photonendetektor. Wir wollen nun überprüfen, ob sich in einem der Strahlgänge eine Schablone befindet.

Wenn sich in dem Strahlgang eine Schablone befindet, wird in der Hälfte der Fälle das Photon absorbiert und somit von keinem der beiden Detektoren gemessen. In diesem Fall wissen wir, dass eine Wechselwirkung stattgefunden hat und die Schablone dort ist. Wenn das Photon

von Detektor C gemessen wurde, können wir keine Aussage machen: dieser Fall kann sowohl eintreten, wenn eine Schablone da ist, als auch wenn keine Schablone den Strahlgang versperrt.

Wenn aber eine Photon von Detektor D gemessen wird, wissen wir, dass eine Schablone da ist. Das ist insofern seltsam, als überhaupt keine Wechselwirkung mit der Schablone stattgefunden hat. Das Photon ist ja an dem Detektor angekommen. Aber es wurde von einem Detektor nachgewiesen, der nicht hätte ansprechen dürfen, wenn beide Strahlgänge frei gewesen wären.

Angenommen, wir führen dieses Experiment mehrfach durch. Dabei soll in der Hälfte der Fälle eine Schablone einen der beiden Strahlgänge absperren, in der anderen Hälfte der Fälle ist keine Schablone vorhanden. Wir können nun folgende Fälle unterscheiden:

- In 50% der Fälle ist keine Schablone da, das Photon wird immer von Detektor 2 gemessen. Da dieser Fall aber auch mit Schablone auftreten kann, können wir in diesem Fall keine Aussage machen.
- In 50% der Fälle ist eine Schablone da. In der Hälfte dieser Fälle, also in insgesamt 25% der Fälle, wird das Photon von der Schablone absorbiert und keiner der Detektoren spricht an.
- In der Hälfte der verbleibenden 25% aller Fälle spricht Detektor C an und wir können keine Aussage machen.
- In insgesamt 12,5% aller Fälle wird Detektor D ansprechen. Wir wissen dann, dass eine Schablone den Strahlgang versperrt, obwohl keine Wechselwirkung des Photons mit dieser Schablone stattgefunden hat.

Wir erhalten also folgende Statistik: In 62,5% aller Fälle spricht Detektor C an und wir können keine Aussage machen. In 25% aller Fälle spricht kein Detektor an und wir wissen, dass eine Schablone da ist, allerdings hat eine Wechselwirkung stattgefunden. In den verbleibenden 12,5% aller Fälle spricht Detektor D an und wir wissen, dass eine Schablone da ist, ohne dass eine Wechselwirkung stattgefunden hat.

In 1/8.tel aller Fälle können wir also mit Sicherheit sagen, dass eine Schablone den Strahlgang versperrt, obwohl keine Wechselwirkung mit der Schablone stattgefunden hat. Diese Art von Messungen bezeichnet man als „Messungen ohne Wechselwirkung“ (interaction-free measurement).

7.2.4 Der Elitzur-Vaidman „Superbomben-Tester

Im Jahre 1993 formulierten Avshalom C. Elitzur und Lev Vaidman eine besonders drastische Version der Messung ohne Wechselwirkung [30]. Sie stellten sich eine „Superbombe“ vor, die einen ganz besonderen Sensor besitzt: Schon das Auftreffen eines einzelnen Photons löst den Sensor aus und die Bombe explodiert.

Elitzur und Vaidman stellen sich nun eine ganzes Arsenal dieser Bomben vor, von denen jedoch rund die Hälfte defekt ist: ein Teil des Sensors fehlt und ein auftreffendes Photon würde

einfach durchgelassen. Wie können wir testen, ob die Bomben noch intakt sind? Der übliche Test - wir bestrahlen den Sensor mit einem Photon - führt dazu, dass wir entweder eine Bombe als defekt erkennen (wenn das Photon am anderen Ende wieder austritt), oder aber die Bombe explodiert und wir wissen, dass sie nicht defekt *war*. Doch wie kann man feststellen, ob eine Bombe intakt ist, ohne dass sie explodiert?

Die Anordnung der wechselwirkungsfreien Messung ist eine Möglichkeit. Wie wir gesehen haben, kann in rund 1/8 aller Fälle eindeutig entschieden werden, dass ein Sensor den Weg des Photons versperrt hat, ohne dass das Photon mit diesem Sensor in Wechselwirkung getreten ist.

Man kann diese Wahrscheinlichkeit noch auf mehrere Weisen erhöhen. Die einfachst Möglichkeit ist, den Detektor 2 durch eine Vorrichtung zu ersetzen, die das Photon wieder in das Interferometer leitet, bzw. die erneut ein Photon in die Vorrichtung schickt. Wurde das Photon nach ausreichend vielen Durchläufen nicht absorbiert (die Bombe also nicht gezündet) und landet es auch nicht in Detektor D, so wissen wir mit Sicherheit, dass die Bombe defekt ist.

Doch angenommen, die Bombe ist nicht defekt. In 50% der Fälle explodiert die Bombe beim ersten Durchgang des Photons, in 25% der Fälle trifft das Photon auf Detektor D und wir wissen mit Sicherheit, dass die Bombe intakt ist. In den verbleibenden 25% der Fälle trifft das Photon auf Ausgang C und wird wieder in das System gefüttert. Insgesamt zeigt sich, dass in 1/3 aller Fälle das Photon irgendwann auf Detektor D trifft und wir wissen, dass die Bombe intakt ist. In 2/3 aller Fälle trifft das Photon auf die Bombe, die daraufhin explodiert.

Ein vergleichbares Experiment (nicht mit einer Bombe, sondern mit einem Spiegel, der das Photon auf einen Detektor lenkte) wurde im Jahre 1994 von Zeilinger, Herzog, Kwiat und Weinfurther durchgeführt.

7.2.5 Änderung der Durchlass- und Reflektionswahrscheinlichkeiten

Das Ergebnis des vorherigen Experiments lässt sich noch verbessern, wenn die Strahlteiler den Strahl mit unterschiedlichen Intensitäten reflektieren bzw. durchlassen. Es sei $|\Psi\rangle$ der Zustand des einfallenden Strahls. Nach dem ersten Strahlteiler lässt sich dieser Zustand als Superposition von $|\mathrm{r}\rangle$ (dem reflektierten Strahl) und $|\mathrm{t}\rangle$ (dem transmittierten Strahl) schreiben (vgl. Abb. 7.5):

$$|\psi\rangle \longrightarrow \mathrm{i}\cos\alpha|\mathrm{r}\rangle + \sin\alpha|\mathrm{t}\rangle\,.$$

Die Koeffizienten $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ wurden so parametrisiert, dass sie automatisch die Normierungsbedingung erfüllen. Mit Wahrscheinlichkeit $\cos^2\alpha$ wird das Photon reflektiert und mit Wahrscheinlichkeit $\sin^2\alpha$ wird das Photon durchgelassen. α charakterisiert also die Asymmtrie des ersten Strahlteilers bezüglich Reflektion und Transmission. Außerdem schreiben wir hier und im Folgenden für jede Reflektion an einem Strahlteiler einen Faktor i (bei den Spiegeln führt dies nur zu einem Gesamtfaktor i für alle Teile des Zustands).

Trifft der Zustand $|\mathrm{r}\rangle$ auf den zweiten Strahlteiler, so spaltet er in $|\mathrm{d}$ (den reflektierten Strahl zu Detektor D) und $|\mathrm{c}\rangle$ (den durchgelassenen Strahl zu Detektor C) auf:

$$|\mathrm{r}\rangle \longrightarrow \mathrm{i}\sin\alpha|\mathrm{d}\rangle + \cos\alpha|\mathrm{c}\rangle\,.$$

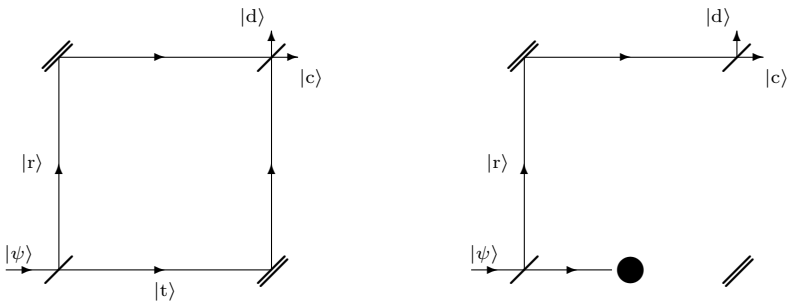


Abbildung 7.5: Strahlzustände beim Mach-Zehnder Interferometer.

Ebenso verhält es sich mit Strahl $|\mathrm{t}\rangle$, allerdings sind die Phasen anders:

$$|\mathrm{t}\rangle \;\longrightarrow\; \cos\alpha|\mathrm{d}\rangle + \mathrm{i}\sin\alpha|\mathrm{c}\rangle\,.$$

Ohne ein Hindernis wird aus dem Zustand $|\psi\rangle$ somit:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\longrightarrow \mathrm{i}\cos\alpha|\mathrm{r}\rangle + \sin\alpha|\mathrm{t}\rangle \\ &\longrightarrow \mathrm{i}\cos\alpha\,(\mathrm{i}\sin\alpha|\mathrm{d}\rangle + \cos\alpha|\mathrm{c}\rangle) + \sin\alpha\,(\cos\alpha|\mathrm{d}\rangle + \mathrm{i}\sin\alpha|\mathrm{c}\rangle) \\ &= 0\cdot|\mathrm{d}\rangle + \mathrm{i}\cdot|\mathrm{c}\rangle\,. \end{aligned}$$

Das Photon landet also mit Sicherheit bei Detektor C.

Befindet sich ein Hindernis im Strahlengang 2, so bedeutet Zustand $|\mathrm{t}\rangle$ die Absorbtion des Photons (und die Explosion der Bombe). Nun propagiert nur Zustand $|\mathrm{r}\rangle$ weiter und trifft auf den zweiten Strahlteiler:

$$|\psi\rangle \;\longrightarrow\; \mathrm{i}\cos\alpha|\mathrm{r}\rangle + \sin\alpha|\mathrm{t}\rangle \;\longrightarrow\; -\cos\alpha\sin\alpha|\mathrm{d}\rangle + \mathrm{i}\cos^2\alpha|\mathrm{c}\rangle + \sin\alpha|\mathrm{t}\rangle\,.$$

Mit Wahrscheinlichkeit $\cos^2\alpha\sin^2\alpha$ reagiert somit Detektor D und mit Wahrscheinlichkeit $\cos^4\alpha$ reagiert Detektor C. Mit Wahrscheinlichkeit $\sin^2\alpha$ explodiert die Bombe. Sorgt man dafür, dass ein Photon am Ausgang C wieder in das Interferometer zurückgeführt wird, bis entweder die Bombe explodiert oder Detektor D anspricht, so erhält man:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha} && \text{(Wahrscheinlichkeit, dass Detektor D anspricht)} \\ w_2 &= \frac{1}{1+\cos^2\alpha} && \text{(Wahrscheinlichkeit, dass die Bombe explodiert)}\,. \end{aligned}$$

Man kann nun den Winkel α sehr klein wählen. Das bedeutet, Strahlteiler 1 ist fast rein reflektierend und kaum durchlassend, während Strahlteiler 2 fast rein durchlassend und kaum reflektierend ist. In diesem Fall wird $w_1 \approx w_2 \approx 1/2$. In nahezu 50% aller Fälle kann daher das Hindernis (die Bombe) wechselwirkungsfrei nachgewiesen werden.

7.2.6 100%-Messung ohne Wechselwirkung

Man kann die Effektivität der wechselwirkungsfreien Messung noch auf nahezu 100% steigern. Dies wurde unter anderem 1995 von M.A. Kasevich bei einem Aufenthalt in Wien gezeigt [55]. Der Trick besteht darin, das Elitzur-Vaidman Set-up mit dem Quanten-Zeno-Effekt zu koppeln.

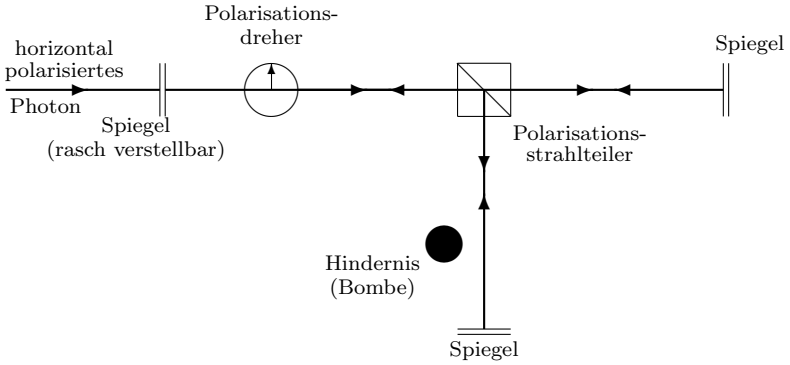


Abbildung 7.6: Die Kombination aus Interferometer und Quanten-Zeno-Effekt erlaubt eine nahezu 100%-ige Messung ohne Wechselwirkung. Der Polarisationsstrahlteiler lässt Licht horizontaler Polarisation durch und lenkt Licht vertikaler Polarisation nach unten ab.

Das Prinzip der experimentellen Anordnung ist in Abb. 7.6 wiedergegeben. Von links tritt ein horizontal polarisiertes Photon in die Apparatur. Der erste Spiegel wird erst in dem Augenblick in den Strahlgang gestellt, wenn das Photon sich in der Apparatur befindet. Dazu benötigt man Systeme, die man sehr schnell von „durchlässig“ auf „reflektierend“ umstellen kann. Solche Systeme wurden im Zusammenhang mit der Lasertechnik entwickelt.

Das horizontal polarisierte Photon trifft auf einen Polarisationsdreher, der seine Polarisationsrichtung dreht. Beispielsweise könnte sich die Polarisationsrichtung bei jedem Durchlauf des Photons (Vor und Zurück) um 15° drehen. Anschließend trifft es auf einen so genannten *Polarisationsstrahlteiler*. Ein Polarisationsstrahlteiler hat die Eigenschaft, Licht einer bestimmten Polarisation (beispielsweise horizontal) durchzulassen, und Licht der dazu orthogonalen Polarisation (vertikal) zu reflektieren. Ohne Hindernis treffen beide Strahlen auf einen Spiegel und werden zurückgeworfen. Da sich ihre Polarisationsrichtung nicht geändert hat, wird das horizontal polarisierte Licht wieder durchgelassen und das vertikal polarisierte Licht wieder reflektiert. Der Polarisationsstrahlteiler und die beiden Spiegel dahinter bilden das Interferometer.

Ohne Hindernis hat das Interferometer überhaupt keinen Einfluss und könnte ebensogut durch einen einfachen Spiegel ersetzt werden. Licht einer beliebigen Polarisation wird in seine beiden Polarisationsrichtungen aufgespalten, reflektiert, und anschließend werden die beiden Polarisationsrichtungen wieder kohärent überlagert, sodass man den Strahl mit seiner ursprünglichen Polarisation wiedererhält. (Dazu müssen allerdings die Wegstrecken so justiert sein, dass keine zusätzlichen Phasenverschiebungen zwischen den beiden Strahlen auftreten.)

Mit Hinternis wirkt das Interferometer jedoch wie ein horizontaler Polarisationsfilter. Die horizontale Komponente des Lichts wird durchgelassen, am Spiegel reflektiert und anschließend wieder durchgelassen. Die vertikale Lichtkomponente wird jedoch abgelenkt, trifft auf das Hindernis und wird absorbiert.

Befindet sich kein Hindernis in der Apparatur so wird das einfallende Photon (horizontal polarisiert) bei jedem Durchlauf durch die Apparatur um 15° gedreht. Lässt man beispielsweise sechs Durchläufe zu, bevor der rasch verstellbare Spiegel wieder entfernt wird, verlässt das Photon die Apparur mit einer vertikalen Polarisation.

Befindet sich jedoch ein Hindernis in der Apparatur (eine Bombe), so erhalten wir die Anordnung des Quanten-Zeno-Effekts: Bei jedem Durchlauf dreht sich die Polarisationsrichtung des Photons um 15° und anschließend trifft es auf einen horizontal ausgerichteten Polarisationsfilter (die Interferenzapparatur mit Hindernis). Die Wahrscheinlichkeit, dass das Photon nach sechs Durchläufen in der Apparatur nicht absorbiert wird, beträgt wieder $(\cos 15°)^12 = 66\%$. Durch Änderung des Winkels α können wir diese Wahrscheinlichkeit im Prinzip jedoch beliebig nahe an 1 bringen. (Die Bombe explodiert also mit fast Sicherheit nicht.) Das austretende Photon hat jedoch eine waagerechte Polarisation.

Misst man also die Polarisationsrichtung des austretenden Photons, so kann man mit nahezu Wahrscheinlichkeit 1 sagen, ob sich ein Hindernis in der Apparatur befand, ohne dass jedoch eine Wechselwirkung mit diesem Hindernis stattgefunden hat.

Eine mögliche Anwendung dieses Effekts könnte in der Medizin liegen. Mit der Messung ohne Wechselwirkung lassen sich beispielsweise Röntgenaufnahmen erstellen, ohne dass die Röntgenstrahlen mit dem menschlichen Körper wechselwirken, d.h., ohne dass irgendwelche Strahlungsschäden auftreten können.

7.3 Verschränkung ohne Wechselwirkung

Wir haben schon mehrfach Experimente mit verschränkten Teilchen beschrieben: das Weizsächer'sche Experiment zur Messung des Elektrons mit einem Mikroskop (Abschnitt 5.3), wo es zu einer Verschränkung zwischen Elektron und Photon kam, oder auch das EPRB-Experiment (Abschnitt 6), wo die Spinzustände zweier Elektronen verschränkt waren. Wie wir noch sehen werden, gehört auch der Messprozess dazu, wo eine Verschränkung zwischen einem Messobjekt und einem Messsystem vorliegt. In all diesen Fällen entstanden diese Verschränkungen durch eine direkte Wechselwirkung zwischen den beiden Teilsystemen.

Im Jahre 1992 entfachte Lucien Hardy eine neue Diskussion um so genannte „realistische" Theorien durch ein Gedankenexperiment, bei dem zwei Atome in einen verschränkten Zustand gebracht werden, ohne dass eine direkte oder indirekte Wechselwirkung stattgefunden hat. Natürlich macht nutzt auch Hardy die Eigenschaften des Mach-Zehnder-Interferometers aus. Die folgende Darstellung stammt aus [31].

Wir stellen uns vor, zwei Atome (1 und 2) seien hinsichtlich ihres Spins in einem $|x^+\rangle$-Zustand (Spin $=+1/2$ in x-Richtung) präpariert worden. Nun werden beide Atome durch ein

in z-Richtung inhomogenes Magnetfeld (Stern-Gerlach-Anordnung) gelenkt, ohne dass jedoch die Position gemessen wird. Die beiden $|x^+\rangle$ Eigenzustände lassen sich als Superposition von $|z^\pm\rangle$-Eigenzuständen schreiben, die allerdings räumlich getrennt sind:

$$|x_i^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{i}|z^+\rangle + |z^-\rangle \right) .$$

Nun wird dafür gesorgt, dass der $|z_1^+\rangle$-Zustand von Atom 1 und der $|z_2^-\rangle$ Zustand von Atom 2 jeweils in einen der beiden Teilstrahlen eines Mach-Zehnder-Interferometers kommt (vgl. Abb. 7.7). Ein Photon im Strahl $|t\rangle$ soll in jedem Fall mit Atom 1 wechselwirken, sofern sich dieses im $|z_1^+\rangle$-Zustand befindet (andernfalls ist das Atom außerhalb des Strahlengangs und wird nicht absorbiert). Entsprechend soll ein Photon im Strahl $|r\rangle$ in jedem Fall mit Atom 2 wechselwirken (absorbiert werden), wenn sich dieses im $|z_2^-\rangle$-Zustand befindet.

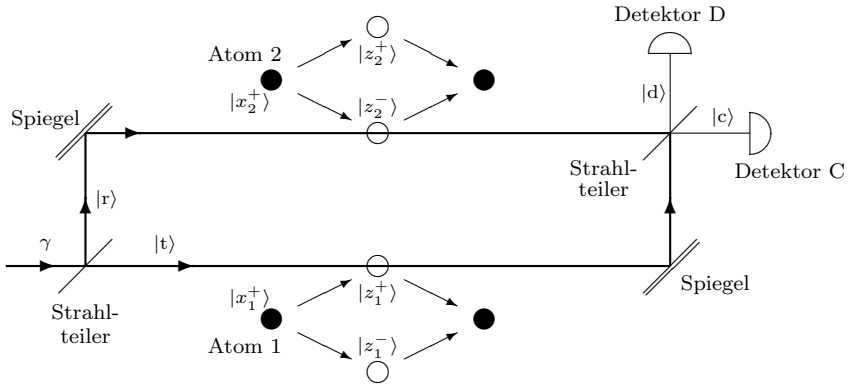


Abbildung 7.7: Hardys Experiment.

Der Anfangszustand des Systems ist somit:

$$|\Psi\rangle = |\gamma\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{i}|z_1^+\rangle + |z_2^-\rangle \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{i}|z_2^+\rangle + |z_2^-\rangle \right) .$$

Am ersten Strahlteiler spaltet der Photonenstrahl auf und wir erhalten:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^3} \cdot (\mathrm{i}|\mathrm{r}\rangle + |\mathrm{t}\rangle) \cdot \left(\mathrm{i}|z_1^+\rangle + |z_2^-\rangle \right) \cdot \left(\mathrm{i}|z_2^+\rangle + |z_2^-\rangle \right) .$$

Insgesamt gibt es 8 verschiedene und gleich wahrscheinliche „histories“. In 4 Fällen trifft das Photon auf ein Atom und wird absorbiert. Das ist der Fall, wenn es reflektiert wird (Zustand $|\mathrm{r}\rangle$) und wenn sich Atom 2 im Zustand $|z_2^-\rangle$ befindet, oder wenn es nicht reflektiert wird (Zustand $|\mathrm{t}\rangle$) und sich Atom 1 im Zustand $|z_1^+\rangle$ befindet. Wir betrachten nur die Fälle, in denen es nicht zu einer Absorption des Photons gekommen ist. Für diesen Zustand gilt:

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^3} \left(-\mathrm{i}|\mathrm{r}\rangle|z_1^+\rangle|z_2^+\rangle - |\mathrm{r}\rangle|z_1^-\rangle|z_2+\rangle + \mathrm{i}|\mathrm{t}\rangle|z_1^-\rangle|z_2^+\rangle + |\mathrm{t}\rangle|z_1^-\rangle|z_2^-\rangle \right) .$$

Am zweiten Strahlteiler spalten die beiden Photonenanteile wieder auf

$$|\mathrm{t}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|\mathrm{d}\rangle + \mathrm{i}|\mathrm{c}\rangle) \quad , \quad |\mathrm{r}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (|\mathrm{c}\rangle + \mathrm{i}|\mathrm{d}\rangle) \ ,$$

und wir erhalten schließlich:

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{4} \left(|\mathrm{d}\rangle|z_1^+\rangle|z_2^+\rangle + |\mathrm{d}\rangle|z_1^-\rangle|z_2^-\rangle - \mathrm{i}|\mathrm{c}\rangle|z_1^+\rangle|z_2^+\rangle + \mathrm{i}|\mathrm{c}\rangle|z_1^-\rangle|z_2^-\rangle - 2|\mathrm{c}\rangle|z_1^-\rangle|z_2^+\rangle \right) .$$

(Der Zustand $|\mathrm{d}\rangle|z_1^-\rangle|z_2^+\rangle$ tritt zweimal mit entgegengesetztem Vorzeichen auf.)

Nun selektieren wir nur solche atomaren Systeme, bei denen der (dunkle) Detektor D angesprochen hat (das ist in insgesamt 1/8 aller Experimente der Fall). Für diese Fälle befinden sich die Atome in dem Zustand:

$$|\Psi_{\mathrm{Atom}}\rangle = \frac{1}{4} \left(|z_1^+\rangle|z_2^+\rangle + |z_1^-\rangle|z_2^-\rangle \right) .$$

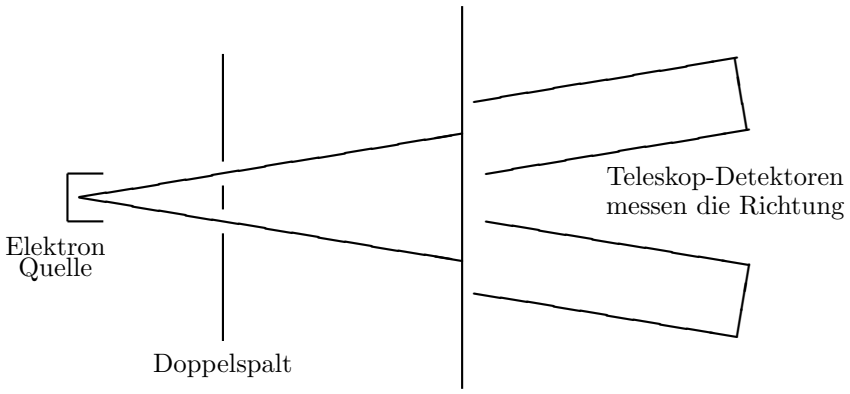
Die Atome befinden sich also in einem verschränkten Bell-Zustand.

7.4 Wheelers „Delayed Choice“ Experimente

Der Begriff „delayed choice“ geht auf John Archibald Wheeler zurück. Im Jahre 1981 hatte Wheeler sein klassisches delayed-choice-Experiment vorgeschlagen. Die Idee ist vergleichsweise einfach: Man lässt ein Quantensystem mit einem anderen System wechselwirken, entscheidet aber erst nachdem diese Wechselwirkung stattgefunden hat, welche Größe gemessen werden soll. Wie wir schon erwähnt hatten, war das Experiment von von Weizsächer (Messung eines Elektrons mit einem Mikroskop, Abschnitt 5.3)) schon eine frühe Version eines solchen Experiments.

Im Jahre 1987 wurde das Wheeler'sche delayed-choice-Experiment in einer Mach-Zehnder-Anordnung von Hellmut, Walther, Zajonc and Schleich durchgeführt [46].

7.4.1 Wheelers klassisches delayed-choice Experiment



Das Experiment lehnt sich an das Doppelspaltexperiment an. Allerdings kann die photographische Platte, auf der beim Doppelspaltexperiment das Interferenzmuster erscheint, vom Experimentator entfernt werden, *nachdem* das Elektron die beiden Spalte passiert hat. Hinter dieser Platte befinden sich zwei Teleskop-Detektoren, mit denen sich die Richtung messen lässt, aus der ein Elektron gekommen ist. Insbesondere lässt sich mit diesen Teleskopen feststellen, durch welchen Spalt das Elektron getreten ist.

Mit photographischer Platte finden wir ein Interferenzmuster, dem wir entnehmen können, dass das „System Elektron“ beide Spalte durchlaufen hat. Ohne photographische Platte haben wir einen gewöhnlichen Zähler, der angibt, wie viele Elektronen durch den linken und wie viele Elektronen durch den rechten Spalt getreten sind.

Im Grunde genommen handelt es sich um das klassische Doppelspaltexperiment, bei dem unmittelbar hinter dem Doppelspalt durch Bestrahlung mit geeignetem Licht gemessen wurde, durch welchen Spalt das Elektron getreten ist. Der Unterschied ist jedoch, dass der Experimentator nun entscheidet, dieses Licht einzuschalten (oder auch nicht), *nachdem* das Elektron den Doppelspalt passiert hat.

Wheeler wollte mit seinem delayed-choice Experiment einer Interpretation des Doppelspaltexperiments entgegnen, bei der dem Elektron eine Art „Vorausahnung“ zugesprochen wird: Das Elektron weiß, bevor es auf den Doppelspalt trifft, ob sich hinter dem Doppelspalt ein Detektor befindet, der den Spalt misst, durch den das Elektron treten wird. Der experimentelle Aufbau steht ja schon fest, bevor das Elektron auf den Doppelspalt trifft. Das Elektron entscheidet sich nun, entweder als Teilchen aufzutreten und nur durch einen Spalt zu gehen (wenn nämlich der Spalt gemessen wird), oder aber als Welle aufzutreten und durch beide Spalte zu treten (wenn

nämlich der Spalt nicht gemessen wird). Im Rahmen einer „holistischen“ Auffassung wäre eine solche Möglichkeit denkbar.

Vor dem Hintergrund der Quantenfeldtheorie erscheint eine solche Möglichkeit nicht mehr ganz so absurd. Ein einzelnes Elektron entspricht einer quantisierten Anregung des Feldes, das sämtliche Elektronen und Positronen in unserem Universum beschreibt. Dieses Feld befindet sich überall, insbesondere auch über die gesamte Versuchsanordnung des Doppelspaltexperiments verteilt. Daher steht dieses Feld schon in Kontakt mit dem Versuchsaufbau, bevor das Elektron – also eine seiner Anregungen – die Quelle verlässt. Das Feld „weiß“ also tatsächlich schon von dem experimentellen Aufbau und könnte diese Information im Prinzip auf das Elektron übertragen.

Da in Wheelers Experiment der Experimentator aber erst entscheidet, ob das Elektron als Teilchen oder als Welle gemessen wird, *nachdem* das System Elektron den Doppelspalt passiert hat, wird diese Möglichkeit ausgeschlossen.

Und noch eine zweite Interpretation der Quantenmechanik wird durch solche Experimente ausgeschlossen: Man könnte sich die Wellenfunktion als eine Art „Ladungsdichteverteilung“ vorstellen, ähnlich wie Schrödinger die Wellenfunktion ursprünglich interpretieren wollte. Diese Ladungsdichteverteilung kollabiert bzw. „kondensiert“ immer in genau dem Augenblick, in dem eine Wechselwirkung mit einem potenziellen Messinstrument stattfindet, beispielsweise auf der photographischen Platte. Dieses „Sichzusammenziehen“ der Wellenfunktion würde erklären, weshalb immer nur ein Punktteilchen gemessen wird. Aber es könnte nicht die „delayed choice“ erklären: Wenn wir später das Elektron mit Teleskopdetektoren messen, erhalten wir eindeutig die Aussage, ob es durch den linken oder rechten Spalt getreten ist.

7.4.2 Wheelers großes delayed-choice Experiment

Man kann sich natürlich fragen, für wie lange der Experimentator seine Wahl hinauszögern kann. Bei dem von Zajonk et al. durchgeführten Experiment musste diese Entscheidung innerhalb von wenigen Nanosekunden fallen. Das ist natürlich nur möglich, wenn die tatsächliche Entscheidung nicht von einem Menschen sondern von einer Maschine getroffen wird. Um diesem Einwand zu begegnen, hat Wheeler sich eine Situation überlegt, bei der die Entscheidung erst Milliarden von Jahren später gefällt wird.

In Abbildung 7.8 erkennt man einen Quasar, der Photonen aussendet. Dieser Quasar habe von der Erde einen Abstand von einigen Milliarden Lichtjahren. Zwischen Quasar und Erde befindet sich ein Cluster von Galaxien, der wie eine Gravitationslinse wirkt.

Wir können nun auf der Erde entscheiden, ob wir auf einer photographischen Platte die Position der Photonen messen (und damit ein Interferenzmuster finden, da die Photonen die Gravitationslinse auf verschiedenen Wegen passiert haben können), oder die Richtung, aus der die Photonen kommen. Diese Entscheidung, ob wir das Photon als Teilchen messen, das die Gravitationslinse nur an einer Stelle passiert hat, oder ob wir es als Welle messen, dass an verschiedenen Stellen durch die Gravitationslinse getreten ist, können wir zu einem Zeitpunkt treffen, der um Milliarden Jahre später liegt als der Zeitpunkt, bei dem das Photon bei der

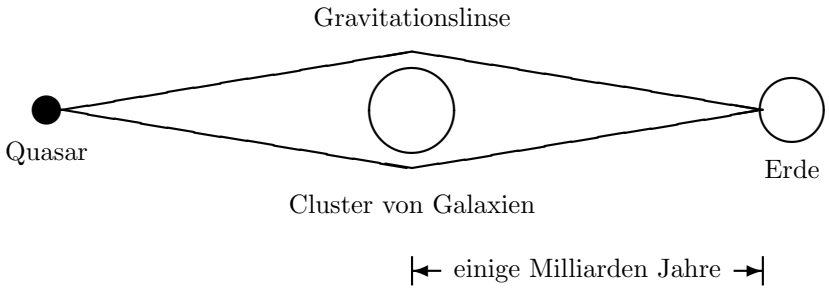


Abbildung 7.8: Wheelers großes delayed-choice Experiment an einem Quasar.

Gravitationslinse war.

Können wir die Vergangenheit ändern? Das scheinbar Absurde an obigen Experimenten beruht im Wesentlichen darauf, dass wir zwar glauben, unsere Handlungen könnten Auswirkungen auf die Zukunft haben (beispielsweise wenn wir vor dem Experiment festlegen, was gemessen werden soll), nicht aber auf die Vergangenheit. Einige Autoren (unter anderem Hugh Prize oder A. Elitzur) schlagen vor, auch eine Rückwärtswirkung von Ereignissen zu berücksichtigen. Tatsächlich sind die fundamentalen Gesetze der Physik ja zeitumkehrinvariant: es gibt nur zeitsymmetrische kausale Zusammenhänge, aber nicht das (zeitasymmetrische) Konzept von „Ursache“ und „Wirkung“. Die Herleitung des Zeitpfeils aus den Mirkogesetzen steht nach diesen Autoren ohnehin auf wackeligen Füssen. Weshalb also sollte sich in der Quantenmechanik, die den Mikrogesetzen wesentlich näher ist als die Makrophysik, diese kausale Symmetrie nicht zeigen?

Kapitel 8

Die Bell'schen Ungleichungen

8.1 Vorbemerkungen

Man bezeichnet einen Zustand als streuungs- bzw. dispersionsfrei, wenn

$$\omega(R^2) \;=\; \omega(R)^2 \quad \text{bzw.} \quad \omega\left((R-\omega(R))^2\right) \;=\; 0\,,$$

was gleichbedeutend ist mit der Eigenschaft

$$\omega(f(R)) \;=\; f(\omega(R))\,.$$

In dispersionsfreien Zuständen ist der Messwert einer Observablen somit immer derselbe, und dieser Messwert ist natürlich auch der Erwartungswert der Observablen in diesem Zustand. Die reinen Zustände der klassischen Mechanik sind dispersionsfrei.

Die Zustände der Quantenmechanik - auch die reinen Zustände - sind jedoch nicht dispersionsfrei. Zu jedem Zustand ω gibt es Observable R, so dass

$$\omega(R^2) \;\neq\; \omega(R)^2\,.$$

Diese Eigenschaft mag zunächst überraschen: Wie kann es möglich sein, dass *dieselbe* Messung an *demdelben* Zustand unterschiedliche Messergebnisse liefert?

Seit Anbeginn der Quantenmechanik wurde versucht, die statistischen Eigenschaften quantenmechanischer Erwartungswerte dadurch zu deuten, dass selbst reine Zustände der Quantenmechanik „in Wirklichkeit“ noch Gemische darstellen. Die „wirklich“ reinen - und dispersionsfreien - Zustände sind nicht nur durch eine Wellenfunktion ψ sondern zusätzlich noch durch einen Satz so genannter *verborgener Variable* $\{\lambda_i\}$ gekennzeichnet: $\omega_{[\psi,\{\lambda_i\}]}$. Die Erwartungswerte quantenmechanischer Observablen A in den quantenmechanischen Zuständen ergeben sich dann aus einer geeigneten Mittelung über die verborgenen Parameter λ_i:

$$\langle\psi|A|\psi\rangle \;=\; \int\prod_i \mathrm{d}\lambda_i\;\rho_\psi(\{\lambda_i\})\;\omega_{[\psi,\{\lambda_i\}]}(A)\,.$$

Sowohl der „wirklich“ reine Zustand $\omega_{[\psi,\{\lambda_i\}]}$ als auch die Verteilungsfunktion $\rho_\psi(\{\lambda_i\})$ können dabei von dem quantenmechanischen Zustand ψ abhängen.

Die Bezeichnung „verborgene Parameter“ erklärt sich dadurch, dass die dispersionsfreien Zustände mit festen Werten dieser Parameter nicht präparierbar sein sollen, da anderenfalls die Quantenmechanik den Beobachtungen widersprechen würde.

Im Jahre 1932 gab Johann von Neumann in seinem Buch *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [62] einen Beweis, wonach die Quantenmechanik nicht um solche dispersionsfreien Zustände erweitert werden kann. Er zieht den Schluss (Kap. IV.2., S. 171):

> Es würde nicht genügen, wenn außer den bekannten, in der Quantenmechanik durch Operatoren repräsentierten, physikalischen Größen noch weitere, bisher unentdeckte, existierten: denn schon bei den erstgenannten, bekannten Größen müssten die von der Quantenmechanik angenommenen Verknüpfungen ... versagen. Es handelt sich also gar nicht, wie vielfach angenommen wird, um eine Interpretationsfrage der Quantenmechanik, vielmehr müsste dieselbe objektiv falsch sein, damit ein anderes Verhalten der Elementarprozesse als das statistische möglich wird.

Auf die Annahmen bzw. die „angenommenen Verknüpfungen“, die von Neumann für seinen Beweis macht, kommen wir im nächsten Kapitel zu sprechen. Für damalige Verhältnisse benutzte der von Neumannsche Beweis relativ abstrakte Mathematik, sodass sich viele Physiker mit der Feststellung begnügten, dass es einen Beweis für die Unmöglichkeit verborgener Variabler in der Quantenmechanik gibt.

Einige wenige Physiker versuchten jedoch trotz der Existenz dieses Beweises eine Theorie mit verborgenen Variablen zu formulieren, die die Ergebnisse der Quantenmechanik reproduzierte. So fand D. Bohm 1952 [12] ein Modell mit verborgenen Variablen, das dem von Neumannschen Theorem zu widersprechen schien. Die Arbeit von Bohm war allerdings in vielfacher Hinsicht so unklar und ungenau, dass die meisten Physiker die Ursache für die Diskrepanz zwischen Bohm und von Neumann eher Bohm zuschrieben und dem Problem nicht weiter nachgingen.

Erst 1966 untersuchte J.S. Bell [8] die Ursachen für die Diskrepanz genauer und fand eine physikalisch nicht gerechtfertigte Annahme, die von Neumann für seinen Beweis benutzt hatte. Andere Beweise gegen die Existenz von verborgenen Variablen, die später von Jauch und Piron [52] sowie von Gleason [40] gefunden wurden, beruhten zwar auf weniger restriktiven Annahmen als der von Neumannsche Beweis und sind daher allgemeiner und weitreichender, jedoch enthalten auch sie Annahmen, die aus physikalischer Sicht nicht zwingend sind.

Im Jahre 1964 untersuchte Bell [9] eine Verallgemeinerung der Korrelationsexperimente, wie sie EPR formuliert hatten. Er fand, dass die experimentellen Befunde nur dann mit der Existenz verborgener Variabler - d.h. mit der Existenz der Einsteinschen „Elemente der Realität“ - in Einklang zu bringen sind, wenn die Theorie nicht-lokal ist. Die Untersuchungen Bells sind als Bellsche Ungleichungen bekannt geworden.

Mittlerweile wurden die Überlegungen Bells für andere Systeme verallgemeinert und weitere Korrelationsmessungen erdacht, bei denen sich ein offensichtlicher Widerspruch zwischen den Vorhersagen einer Theorie mit verborgenen Variablen und der Quantenmechanik ergibt. Insbesondere die Modelle von Greenberger, Horne, Shimony und Zeilinger (GHSZ-Modelle) verdienen

dabei besondere Beachtung.

Entgegen der historischen Entwicklung werden wir in diesem Kapitel zunächst die Bell'schen Ungleichungen behandeln, da sie auf EPR-ähnlichen Experimenten basieren. Es handelt sich dabei immer um Experimente an Mehrteilchensystemen, bei denen die „seltsamen Quantenkorrelationen" Gegenstand der Überlegungen sind. Außerdem zielen die Bell'schen Ungleichungen direkt auf einen Widerspruch zu den so genannten „Elementen der Realität" ab, die für Einstein so wichtig waren.

Erst im nächsten Kapitel werden wir uns dann den Modellen mit verborgenen Variablen und den in diesem Zusammenhang entwickelten No-Go-Theoremen widmen.

8.2 Die Bell'schen Ungleichungen

John Bell war Zeit seines Lebens ein Kritiker der Quantenmechanik bzw. der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik. In vielen seiner Arbeiten wird deutlich, dass Bell eher Theorien mit verborgenen Parametern, wie beispielsweise die Bohmsche Interpretation, favorisierte. Daher ist auch nicht klar, ob seine ursprüngliche Intention bei der Herleitung seiner Ungleichungen für Theorien mit „Elementen der Realität" nicht darin lag, einen Widerspruch zwischen Experiment und Quantenmechanik zu finden. Trotzdem war er im Gegensatz zu vielen anderen Physikern einer der ersten, die davon überzeugt waren, dass die Experimente der Quantenmechanik Recht geben würden.

Eine ausführliche ältere Arbeit zu verschiedenen Versionen der Bellschen Ungleichungen, insbesondere auch unter Berücksichtigung der experimentellen Situation, findet man bei Clauser und Shimony [18]. Ein neuerer Übersichtsartikel ist in den Physikalischen Blättern erschienen [1].

Wir werden zunächst den 1964er Beweis von Bell angeben (teilweise ergänzt um Bemerkungen von Clauser [18]), anschließend einen Beweis von D'Espagnat [32]. Der Beweis von Bell bezieht sich konkret auf die Situation der Spin-Komponenten zweier Teilchen – eine Version des EPR-Experiments von Bohm [13, 14] –, wohingegen der Beweis von D'Espagnat von allgemeiner mengentheoretischer Struktur ist.

8.2.1 Der Beweis von Bell

Wir präsentieren den Bell'schen Beweis in vier Schritten. Zunächst werden wir die quantenmechanischen Vorhersagen zusammenfassen. Anschließend werden wir die unmittelbaren Folgerungen aus einer Theorie mit verborgenen Variablen angeben. Danach folgt die Herleitung der Bell'schen Ungleichung und abschließend werden wir ein Beispiel einer experimentellen Anordnung geben, wo die quantenmechanische Vorhersage die Bell'schen Ungleichungen verletzt.

Das quantenmechanische System

Ähnlich wie bei der Bohm'schen Version des EPR-Experiments betrachten wir zwei Spin-1/2-Teilchen, die sich in einem Drehimpuls-0-Zustand befinden, ansonsten jedoch möglichst weit voneinander entfernt sind. Der Spinanteil der Wellenfunktin dieses Zustandes ist somit

$$\Psi \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u^+_{\vec{n}}(1)\otimes u^-_{\vec{n}}(2) - u^-_{\vec{n}}(1)\otimes u^+_{\vec{n}}(2)\right)\;,$$

wobei $u^\pm_{\vec{n}}(i)$ dem Spinzustand des Teilchens i entspricht, das die Spinkomponente ± 1 in Richtung des Einheitsvektors $\vec{n}$ hat. Insbesondere gilt

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\; u^\pm_{\vec{n}} \;=\; \pm\, u^\pm_{\vec{n}}\;.$$

Der Drehimpuls-0-Zustand ist rotationssymmetrisch und damit unabhängig von der Wahl des Vektors $\vec{n}$. Man findet für den quantenmechanischen Erwartungswert

$$p(\vec{a},\vec{b}) \;:=\; \langle\Psi|\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\otimes\vec{b}\cdot\vec{\sigma}|\Psi\rangle \;=\; -\,\vec{a}\cdot\vec{b}\;. \tag{8.1}$$

Der Operator $\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\otimes\vec{b}\cdot\vec{\sigma}$ ist das Produkt von zwei kommutierenden Operatoren,

$$\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\otimes\vec{b}\cdot\vec{\sigma} \;=\; S_1(\vec{a})S_2(\vec{b}) \;=\; \left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\otimes\mathbf{1}\right)\left(\mathbf{1}\otimes\vec{b}\cdot\vec{\sigma}\right)\;,$$

und kann daher durch getrennte Messung der einzelnen Spinkomponenten an den jeweiligen Teilchen bestimmt werden. Insbesondere gilt für $\vec{a}=\vec{b}$:

$$p(\vec{a},\vec{a}) \;=\; -\,1\;. \tag{8.2}$$

Sind die beiden Richtungen der Magnete zur Messung der Spinkomponenten somit gleich, finden wir eine absolute Antikorrelation. Wurde eine Spinkomponente gemessen, so liegt die andere fest und kann mit Sicherheit vorhergesagt werden.

Verborgene Variable

Wir nehmen nun an, es gäbe streuungsfreie Zustände mit verborgenen Variablen λ. Erwartungswerte in diesen Zuständen werden durch $\langle\rangle_\lambda$ gekennzeichnet. Damit ist

$$p(\vec{a},\vec{b}) \;=\; \int \mathrm{d}\lambda\;\rho_\Psi(\lambda)\;\langle S_1(\vec{a})S_2(\vec{b})\rangle_\lambda\;.$$

Hierbei ist $\rho_\Psi(\lambda)$ eine beliebige, normierte Verteilungsfunktion für die verborgenen Variablen im Quantenzustand Ψ. Für den Erwartungswert der beiden Messungen an Teilchen 1 und Teilchen 2 fordert Bell eine Faktorisierungseigenschaft:

$$\langle S_1(\vec{a})S_2(\vec{b})\rangle_\lambda \;=\; \langle S_1(\vec{a})\rangle_\lambda\;\langle S_2(\vec{b})\rangle_\lambda\;. \tag{8.3}$$

Bell schreibt dazu ([9]): "Now we make the hypothesis, and it seems one at least worth considering, that if the two measurements are made at places remote from one another the orientation

of one magnet does not influence the result obtained with the other." Die obige Bedingung ist somit eine Lokalitätsforderung an die Theorie mit verborgenen Variablen. Da es sich um streuungsfreie Zustände handeln soll, gilt:

$$\langle S_i(\vec{a})\rangle_\lambda \;=\; \pm 1\,. \tag{8.4}$$

Damit folgt insbesondere:

$$\langle S_i(\vec{a})\rangle_\lambda^2 \;=\; 1\,. \tag{8.5}$$

Herleitung der Bellschen Ungleichung

Gleichung (8.2) lässt sich nur dann erfüllen, wenn

$$\langle S_2(\vec{a})\rangle_\lambda \;=\; -\langle S_1(\vec{a})\rangle_\lambda\,.$$

Teilchen 2 und Teilchen 1 sind also bezüglich jeder Richtung $\vec{a}$ antikorreliert. Der Einfachheit halber beziehen wir alle Spinmessungen auf Teilchen 1 und schreiben: $S_1(\vec{a},\lambda) = S(\vec{a},\lambda)$. Somit gilt

$$p(\vec{a},\vec{b}) \;=\; -\int \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\,\langle S(\vec{a})\rangle_\lambda\,\langle S(\vec{b})\rangle_\lambda\,. \tag{8.6}$$

Für die Differenz zweier Erwartungswerte ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} p(\vec{a},\vec{b}) - p(\vec{a},\vec{c}) &= -\int \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\,\Big(\langle S(\vec{a})\rangle_\lambda\,\langle S(\vec{b})\rangle_\lambda - \langle S(\vec{a})\rangle_\lambda\,\langle S(\vec{c})\rangle_\lambda\Big) \\ &= \int \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\,\langle S(\vec{a})\rangle_\lambda\,\langle S(\vec{b})\rangle_\lambda[\langle S(\vec{b})\rangle_\lambda\,\langle S(\vec{c})\rangle_\lambda - 1]\,. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir Gl. (8.5) ausgenutzt. Wegen Gl. (8.4) folgt für den Absolutwert dieser Differenz:

$$|p(\vec{a},\vec{b}) - p(\vec{a},\vec{c})| \;\le\; \int \mathrm{d}\lambda\,\rho(\lambda)\,[1 - \langle S(\vec{b})\rangle_\lambda\,\langle S(\vec{c})\rangle_\lambda]\,.$$

(Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $\langle S(\vec{b})\rangle_\lambda\,\langle S(\vec{c})\rangle_\lambda - 1$ nie positiv ist und der Absolutbetrag daher gleich dem negativen dieses Ausdrucks. Der zweite Term ist gleich $p(\vec{b},\vec{c})$ (vgl. Gl. 8.6) und somit erhalten wir:

$$|p(\vec{a},\vec{b}) - p(\vec{a},\vec{c})| \;\le\; 1 + p(\vec{b},\vec{c})\,. \tag{8.7}$$

Dies ist eine Form der Bell'schen Ungleichungen.

Verletzung der Bell'schen Ungleichung in der QM

Für viele Orientierungen der Richtungen $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ erfüllt auch die Quantenmechanik die Bell'sche Ungleichung. Es gibt jedoch Richtungen, für die die Quantenmechanik Gl. (8.7) verletzt. Ein Beispiel ist das folgende:

Wir wählen $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ koplanar (d.h. in einer Ebene). Zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sei ein Winkel von $\pi/3 = 60°$, ebenso zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$ ist ein Winkel von $2\pi/3 = 120°$. Dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \;=\; \vec{b} \cdot \vec{c} \;=\; \frac{1}{2}\,, \quad \text{und} \;\; \vec{a} \cdot \vec{c} \;=\; -\frac{1}{2}\,.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |p(\vec{a},\vec{b}) - p(\vec{a},\vec{c})| &= \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = 1 \\ 1 + p(\vec{b},\vec{c}) &= 1 - \vec{b} \cdot \vec{c} \;=\; \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Für diese Winkel verletzen die quantenmechanischen Vorhersagen offensichtlich die Bell'schen Ungleichungen.

8.2.2 Der Beweis von D'Espagnat

Der obige Beweis folgt im wesentlichen der Argumentation wie auch der Notation von Bell in seiner Arbeit von 1964 [9]. Man erkennt jedoch sehr rasch, dass die Annahme einer Theorie mit verborgenen Variablen, die Annahme einer Verteilungsfunktion $\rho(\lambda)$ für diese Variablen und die Annahme einer deterministischen Zeitentwicklung dieser Variablen für die Herleitung der Ungleichungen nicht wesentlich sind. Die eigentlich Annahme ist eine Realitätsforderung: Auch ohne, dass an einem Elektron eine Messung der Spinorientierung vorgenommen wird, soll es sinnvoll sein, eine solche Orientierung für jede beliebige Richtung anzunehmen. Oder anders ausgedrückt: Selbst wenn der Spin in Richtung $\vec{a}$ *nicht* gemessen wird, soll es sinnvoll sein anzunehmen, dass eine bestimmte Orientierung für diese Richtung vorliegt und dass diese Orientierung entweder den Wert $+1$ oder -1 hat.

Der Beweis von D'Espagnat geht zunächst von rein mengentheoretischen Überlegungen aus und leitet daraus Ungleichungen für Messwerte ab, die den Bellschen Ungleichungen entsprechen. In dieser Form werden die eigentlichen Annahmen, die in den Beweis eingehen, transparenter.

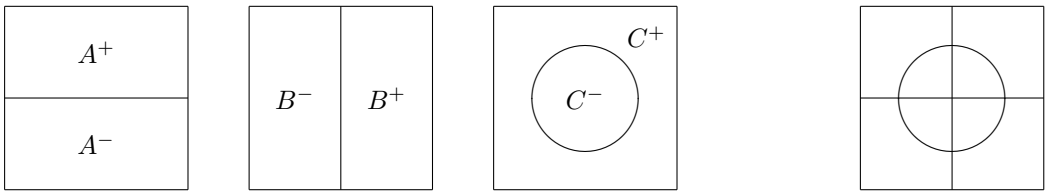
Mengentheoretische Ungleichungen

Wir leiten zunächst einige Ungleichungen her, die sich aus rein mengentheoretischen Überlegungen ergeben. Für eine Menge von Elektronen seien jeweils drei Eigenschaften A, B, C erklärt, von denen jede den Wert $+1$ bzw. -1 annehmen kann.

Wir symbolisieren diese drei Eigenschaften durch Bereiche in einem Quadrat:

- A: Oben-Unten $\qquad A^+ = \text{oben}\,, \;\; A^- = \text{unten}.$
- B: Rechts-Links $\qquad B^+ = \text{rechts}\,, \;\; B^- = \text{links}.$

- C: Innen-Außen $\qquad C^+ =$ außen , $C^- =$ innen.



Mit $N(A^+, B^+, C^-)$ bezeichnen wir die Anzahl der Elektronen, für die A den Wert $+1$, B den Wert $+1$ und C den Wert -1 hat. Sind nur zwei Argumente gegeben, beispielsweise $N(A^+, B^-)$, so sei das die Anzahl aller Elektronen in dieser Menge mit der Eigenschaft $A = +1$ und $B = -1$, unabhängig von dem Wert der Eigenschaft C.

Mit dieser Notation können wir nun folgende elementaren Relationen ableiten:

$$\begin{aligned} N(A^+, B^-) &= N(A^+, B^-, C^+) + N(A^+, B^-, C^-) \\ N(A^+, C^-) &= N(A^+, B^+, C^-) + N(A^+, B^-, C^-) \\ N(B^-, C^+) &= N(A^+, B^-, C^+) + N(A^-, B^-, C^+) \, . \end{aligned} \tag{8.8}$$

Hierbei wurde nur ausgenutzt, dass die Anzahl aller Elektronen, bei denen zwei Eigenschaften festliegen, gleich der Summe der Anzahl aller Elektronen ist, bei denen zusätzlich die dritte (fehlende) Eigenschaft einmal den Wert $+1$ und einmal den Wert -1 hat.

Aus der zweiten und dritten Gleichung erhalten wir sofort zwei Ungleichungen:

$$\begin{aligned} N(A^+, C^-) &\geq N(A^+, B^-, C^-) \\ N(B^-, C^+) &\geq N(A^+, B^-, C^+) \, . \end{aligned}$$

Zusammen mit der ersten oberen Gleichung folgt also:

$$N(A^+, B^-) \leq N(A^+, C^-) + N(B^-, C^+) \, .$$

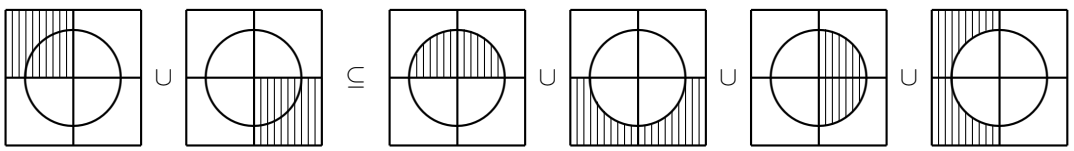
Eine entsprechende Ungleichung gilt, wenn wir alle „Vorzeichen“ umdrehen:

$$N(A^-, B^+) \leq N(A^-, C^+) + N(B^+, C^-) \, .$$

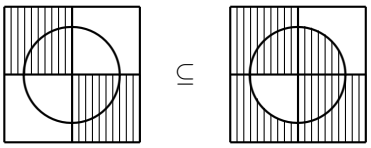
Die Summe der letzten beiden Ungleichungen liefert uns die gesuchte mengentheoretische Ungleichung:

$$N(A^+, B^-) + N(A^-, B^+) \leq N(A^+, C^-) + N(A^-, C^+) + N(B^+, C^-) + N(B^-, C^+) \, . \tag{8.9}$$

Symbolisch bedeutet diese letzte Gleichung:



oder



Wir sollten nochmals betonen, dass wir bei der Herleitung dieser Ungleichung lediglich in den Gleichungen (8.8) eine Annahme gemacht haben, nämlich eine gleichzeitige Realitätsannahme für die Eigenschaften A, B, C. Alle anderen Schritte bestehen aus Summen dieser Gleichungen bzw. dem Weglassen von positiven Termen, was zu Ungleichungen führt. In der Quantenmechanik sind die Gleichungen (8.8) allerdings verletzt.

Die Ungleichung für Erwartungswerte

Im zweiten Schritt der Herleitung soll obige mengentheoretische Ungleichung mit experimentell beobachteten relativen Häufigkeiten in Verbindung gebracht werden. Dazu betrachten wir wieder die Situation zweier Spin-1/2-Teilchen im Drehimpuls-0-Zustand. Wir wissen dann, dass das Ergebnis der Messung einer Spinorientierung an einem Elektron in Richtung $\vec{a}$ (Eigenschaft A) antikorreliert ist mit der entsprechenden Spinorientierung des anderen Elektrons. Wird also für ein Elektron die Eigenschaft $A = +1$ gemessen, dann hat das andere Elektron die Eigenschaft $A = -1$. Messen wir an dem zweiten Elektron die Eigenschaft $B = +1$ (beispielsweise die Spinorientierung in Richtung $\vec{b}$), so können wir für das erste Elektron die Eigenschaft $B = -1$ annehmen.

Wir finden also folgenden Zusammenhang: Wenn wir die beiden Orientierungen der Spinmessungen auf die Vektoren $\vec{a}$ (Eigenschaft A) und $\vec{b}$ (Eigenschaft B) einstellen, und nur solche Ereignisse zählen, bei denen beide Messungen den Wert $+1$ ergeben haben, dann wissen wir, dass Teilchen 1 die Eigenschaft $A = +1$ (gemessen) und $B = -1$ (durch Rückschluss der Antikorrelation mit Teilchen 2) hat. Umgekehrt hat Teilchen 2 die Eigenschaft $A = -1$ (Rückschluss aus der Antikorrelation mit Teilchen 1) und $B = +1$ (gemessen).

Wir messen nun die relative Häufigkeit der Ereignisse $A = +1$ (Teilchen 1) und $B = +1$ (Teilchen 2). Diese relative Häufigkeit bezeichnen wir mit $n[A^+, B^+]$. Nach den obigen Überlegungen ist diese Zahl proportional zur Anzahl $N(A^+, B^-) + N(A^-, B^+)$:

$$n[A^+, B^+] \;=\; \gamma[N(A^+, B^-) + N(A^-, B^+)] \; .$$

(Man beachte, dass sich bei $n[A^+, B^+]$ die Eigenschaften auf das erste und zweite Teilchen beziehen, und diese Eigenschaften wirklich gemessen werden. Bei $N(A^+, B^-)$ beziehen sich beide Eigenschaften auf dasselbe Teilchen, wobei ein Teil dieser Eigenschaften gemessen wurde, der andere über die Antikorrelation geschlossen wurde.)

Die gleiche Proportionalität finden wir auch für die Eigenschaftspaare (A, C) und (B, C):

$$\begin{aligned} n[A^+, C^+] &= \gamma[N(A^+, C^-) + N(A^-, C^+)] \\ n[B^+, C^+] &= \gamma[N(B^+, C^-) + N(B^-, C^+)] \; . \end{aligned}$$

Nutzen wir nun für die rechten Seiten dieser Gleichungen die Ungleichung (8.9) aus, so folgt für die beobachteten relativen Häufigkeiten:

$$n[A^+, B^+] \;\leq\; n[A^+, C^+] + n[B^+, C^+] \,.$$

Diese Ungleichung bezeichnet man ebenfalls als Bell'sche Ungleichung. Wiederum lassen sich Orientierungen der Richtungen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ finden, so dass diese Ungleichung in der Quantenmechanik verletzt ist.

Bei diesem zweiten Schritt der Herleitung der Bell'schen Ungleichungen, d.h. der Interpretation von Ungleichung (8.9) als relative Häufigkeiten, haben wir im Wesentlichen nur die Eigenschaft der Antikorrelation der beiden Spinorientierungen für dieselbe Richtung ausgenutzt. Diese Annahme lässt sich in zwei Grundannahmen aufteilen. Einerseits das Induktionsgesetz: Die Annahme ist immer richtig, wenn wir sie überprüfen; also ist die auch richtig, wenn wir sie nicht überprüfen. Manche sehen hierin auch eine Annahme über die Gültigkeit der Quantenmechanik für zumindest einige Fälle. Die zweite Annahme ist eine Lokalitätsannahme: Die Messung und die Feststellung eines Messergebnisses an einem der beiden Teilchen überträgt sich nicht instantan auf den Zustand des anderen Teilchens.

8.3 Folgerungen aus den Bell'schen Ungleichungen

Wie schon erwähnt haben wir bei der Herleitung der Bell'schen Ungleichungen die folgenden drei Annahmen gemacht:

1. Objektiver Realismus:
   Darunter versteht man, dass den möglichen Messergebnissen an einem quantenmechanischen System auch eine gewisse Realität zukommt. Insbesondere sollte es sinnvoll sein, einem Teilchen gewisse Eigenschaften zusprechen zu können (die es bei einer Messung auch tatsächlich immer hat), selbst wenn die Messung nicht durchgeführt wird. Diese Annahme wird für die Gültigkeit von

   $$N(A^+, B^-) \;=\; N(A^+, B^-, C^+) + N(A^+, B^-, C^-)$$

   (und den anderen beiden Gleichungen aus (8.8)) gemacht.

2. Induktionsgesetz:
   Wir haben eine strikte Antikorrelation gleicher Spinorientierungen der beiden Teilchen im Drehimpuls-0-Zustand angenommen. Dies haben wir daraus gefolgert, dass wir bei der Überprüfung die Antikorrelation tatsächlich immer feststellen. Daher sollte es möglich sein, aus diesen Beobachtungstatsachen auch auf die Antikorrelation schließen zu können, selbst wenn die Messung nicht durchgeführt wird. Es handelt sich aber immer nur um endlich viele experimentelle Bestätigungen der Antikorrelation, aus denen wir durch Induktion auf die generelle Aussage schließen.

3. Lokalität:
   Wir haben vorausgesetzt, dass die Messung an einem Teilchen den Zustand des anderen

Teilchens – insbesondere das Ergebnis einer Messung an diesem Teilchen – nicht beeinflusst. Es ist relativ leicht, ein Modell mit verborgenen Parametern zu konstruieren, das mit den Vorhersagen der Quantenmechanik übereinstimmt und das die Bell'schen Ungleichungen verletzt (vgl. [9] und Abschnitt 9.1). In einem solchen Modell hängen aber die verborgenen Parameter (und damit der streuungsfreie Zustand) von Teilchen 2 von dem an Teilchen 1 gemessenen Wert ab. Dies verlangt eine instantane Übertragung des Messvorganges an Teilchen 1 auf den Zustand von Teilchen 2 und damit eine nichtlokale Wechselwirkung.

Forderung 1 ist die Grundvoraussetzung jeder Theorie mit verborgenen Variablen. Sie wird von allen Vertreter eines objektiven Realismus (wie es beispielsweise Einstein war) akzeptiert. Andererseits ist es genau die Voraussetzung, die nach der üblichen Interpretation der Quantenmechanik nicht gestattet ist. Für die Quantenmechanik ist die Wellenfunktion des Drehimpuls-0-Zustandes eine vollständige Beschreibung des Systems bevor die Messungen vorgenommen werden. Diese Wellenfunktion zeichnet keinerlei Richtung aus, und damit auch keinen Wert für die Orientierung der Spins in eine Richtung. Eine solche Auszeichnung einer Richtung erfolgt erst durch die Messanordnung und den Prozess der Messung. Auch das Ergebnis dieser Messung entsteht erst durch die Wechselwirkung des Quantensystems mit dem Messinstrument (zumindest nach der Meinung vieler Physiker). Damit ist es vom Standpunkt der Quantenmechanik aus betrachtet natürlich unsinnig, einem Teilchen auch ohne die Wechselwirkung mit der Messanordnung eine bestimmte Eigenschaft zuzusprechen.

Statt in diesem Zusammenhang von „objektivem Realismus“ zu sprechen, hat Stapp 1971 den Begriff der „Contrafactual Definiteness“ (CFD) eingeführt [77]. Er bedeutet, dass „jede der verschiedenen alternativen möglichen Messungen (auch zu nichtkommutierenden Größen), die man an einem Quantensystem hätte ausführen können, ein definitives (allerdings unbekanntes und eventuell zufälliges) experimentelles Ergebnis erbracht hätte, und dass diese Menge von Ergebnissen auch zum Gegenstand entsprechender Diskussionen gemacht werden darf“ [19]. Genau auf dieser Annahme der CFD beruht beispielsweise die Herleitung der Bellschen Ungleichungen von D'Espagnat.

Will man an dieser Annahme der CFD bzw. einem objektiven Realismus festhalten, so muss eine der anderen beiden Voraussetzungen aufgegeben werden. Forderung 2 wird dabei eigentlich von niemandem bezweifelt und oftmals noch nicht einmal als eigenständige Annahme aufgeführt. Es wird ja auch nicht nur aus einer großen Anzahl eindeutiger Ergebnisse auf eine generelle Gesetzmäßigkeit geschlossen, sondern diese Forderung entspricht zusätzlich einer Vorhersage der Quantenmechanik. Forderung 2 könnte also auch so uminterpretiert werden, dass gewisse Aussagen der Quantenmechanik in jedem Fall gelten sollen.

So müssen die Vertreter eines objektiven Realismus also die Lokalität aufgeben. Bell schreibt hierzu [8]: “In fact the Einstein-Podolsky-Rosen paradox is resolved in the way which Einstein would have liked least.”

Der experimentelle Nachweis, dass die Quantenmechanik die Bell'schen Ungleichungen verletzt, ist recht schwierig. Die Bell'schen Ungleichungen machen statistische Aussagen, d.h., die Erwartungswerte bestimmter Größen erfüllen eine Ungleichung, sofern die objektive Realität und Lokalität gelten. Diese Ungleichung wird von der Quantenmechanik nur für sehr spezielle

experimentelle Anordnungen und auch dann nur relativ wenig verletzt. Detektoren haben immer eine Ansprecheffizienz, die kleiner ist als 1, sodass eine sehr genaue Statistik notwendig ist, um Verletzungen der Bell'schen Ungleichungen „beweisen" zu können. Die ersten wirklich schlüssigen Ergebnisse erzielte vermutlich Aspect [3, 4] Anfang der 80er Jahre.

8.4 Das GHZ-Experiment

1989 formulierten Greenberger, Horne und Zeilinger ein Gedankenexperiment, das den Widerspruch zwischen der Quantenmechanik einerseits und der Annahme einer objektiven Realität andererseits noch eindrucksvoller aufzeigt [37]. Bei diesem Experiment handelt es sich nicht um den Vergleich statistischer Mittelwerte, wie bei den Bell'schen Ungleichungen. Es geht um das Ergebnis einer einzigen Messung! Hat die Quantenmechanik Recht, so ist das Ergebnis -1, gibt es die Elemente der Realität, so ist das Ergebnis $+1$. Eine einzelne Messung kann daher zwischen den beiden Theorien unterscheiden, und die beiden Messwerte sind deutlich voneinander verschieden. Die folgende Darstellung des GHZ-Experiments stammt aus Mermin [58].

8.4.1 Definitionen und experimenteller Aufbau

Wir betrachten den Spin-Zustandsraum von drei Spin-1/2-Teilchen. Dieser Raum ist achtdimensional. Ein vollständiger Satz von hermiteschen Operatoren wird durch die folgenden Spin-Matrizen generiert:

$$S_x^1\ ,\ S_y^1\ \ ,\quad S_x^2\ ,\ S_y^2\ \ ,\quad S_x^3\ ,\ S_y^3\ .$$

Der obere Index bezieht sich dabei auf das Teilchen, der untere auf die Spinkomponente. In der Schreibweise von Tensorprodukten gilt

$$\begin{aligned} S_i^1 &= \sigma_i \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ S_i^2 &= \mathbf{1} \otimes \sigma_i \otimes \mathbf{1} \\ S_i^3 &= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \sigma_i\ . \end{aligned}$$

Die Spin-Operatoren für verschiedene Teilchen kommutieren. Ansonsten gilt die bekannte Spin-Algebra:

$$\begin{aligned} (S_x^i)^2 &= (S_y^i)^2\ =\ 1 \\ S_x^i S_y^i &= -S_y^i S_x^i\ . \end{aligned}$$

Wir benutzen die übliche Darstellung:

$$S_x\ =\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \ S_y\ =\ \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \ S_z\ =\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Wir kennzeichnen die Zustände durch die Eigenzustände von S_z^i, d.h.

$$S_z|\pm 1\rangle\ =\ \pm\,|\pm 1\rangle\ ,$$

und

$$|\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\rangle \;=\; |\lambda_1\rangle \otimes |\lambda_2\rangle \otimes |\lambda_3\rangle \; .$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} S_x|+1\rangle &= |-1\rangle \; , \quad S_x|-1\rangle \;=\; |+1\rangle \; , \\ S_y|+1\rangle &= \mathrm{i}|-1\rangle \; , \quad S_y|-1\rangle \;=\; -\mathrm{i}|+1\rangle \; . \end{aligned}$$

Andere Relationen werden wir im Folgenden nicht benötigen.

Auf dem Spinzustandsraum der drei Teilchen bilden die folgenden Operatoren einen vollständigen Satz von kommutierenden Observablen:

$$\begin{aligned} A_1 &= S_x^1 \, S_y^2 \, S_y^3 \; , \\ A_2 &= S_y^1 \, S_x^2 \, S_y^3 \; , \\ A_3 &= S_y^1 \, S_y^2 \, S_x^3 \; . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte dieser drei Operatoren sind ± 1, da

$$A_i^2 \;=\; \mathbf{1} \; .$$

Die Angabe der drei Eigenwerte zu diesen Operatoren spezifiziert somit einen Zustand eindeutig.

Ist man nur an dem Messwert einer dieser drei Operatoren interessiert, so kann man folgendermaßen vorgehen: Für alle drei Observable ist der Spin an einem Teilchen i (entsprechend dem Index an A_i) in x–Richtung zu messen, für die anderen beiden Teilchen wird der Spin in y–Richtung gemessen. Das Produkt der drei Messergebnisse ist der Messwert der Observablen A_i. Diese Vorschrift erlaubt es natürlich nicht, gleichzeitig die Eigenwerte aller drei Operatoren in einem Zustand zu bestimmen, da wir nicht gleichzeitig die Orientierung der Spins an einem Teilchen in zwei verschiedene Richtungen messen können. Für die folgenden Überlegungen wird aber immer nur der Messwert zu einem der Operatoren benötigt.

Es gibt einen (eindeutigen) Zustand Ψ, für den die zugehörigen Eigenwerte der drei Operatoren alle gleich $+1$ sind:

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+1,+1,+1\rangle - |-1,-1,-1\rangle \right) \; .$$

Wir beweisen dies nur für den Operator A_1:

$$\begin{aligned} S_y^3|\Psi\rangle &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \left(|+1,+1,-1\rangle + |-1,-1,+1\rangle \right) \\ S_y^2 S_y^3|\Psi\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(|+1,-1,-1\rangle - |-1,+1,+1\rangle \right) \\ S_x^1 S_y^2 S_y^3|\Psi\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \left(|-1,-1,-1\rangle - |+1,+1,+1\rangle \right) \;=\; |\Psi\rangle \; . \end{aligned}$$

Unabhängig für welches der drei Teilchen wir den Spin in x–Richtung messen, das Produkt der drei Messergebnisse (einmal x-Richtung und zweimal y-Richtung) ist somit immer 1.

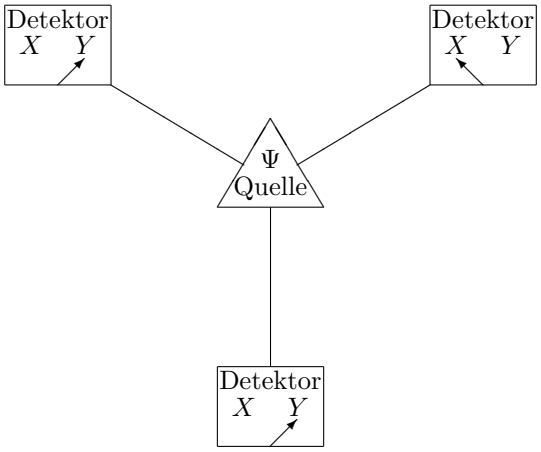


Abbildung 8.1: Experimenteller Aufbau des GHZ-Gedankenexperiments. Drei Spin-1/2-Teilchen werden im Zustand Ψ präpariert und dann getrennt. Die Detektoren können so eingestellt werden, dass die x- oder y-Komponente des Spins der jeweiligen Teilchen gemessen wird.

Die experimentelle Anordnung ist in Abb. 8.1 wiedergegeben. Im Zentrum wird der Zustand $|\Psi\rangle$ für die drei Teilchen präpariert. Anschließend fliegen die Teilchen in diesem Zustand auseinander und an den Detektoren können die x- bzw. y-Orientierungen der Spins der Teilchen festgestellt werden. Wir stellen uns dabei vor, dass sämtliche Teilchenbahnen in einer Ebene liegen. Senkrecht zur Ebene sei die z-Richtung. Die Flugrichtung der Teilchen sei jeweils die x-Richtung, in der Ebene senkrecht dazu die y-Richtung.

Theoretisch kann der Experimentator sehr kurzfristig entscheiden, an welchem der drei Teilchen er die Spinorientierung in x-Richtung messen möchte. An den beiden anderen Teilchen wird dann jeweils die y-Richtung gemessen. Das Produkt der drei Ergebnisse sollte immer $+1$ sein.

8.4.2 Argumentation bei Annahme, es gäbe „Elemente der Realität“

In Tabelle 8.1 sind die möglichen Spinkonfigurationen angegeben, die das Ergebnis

$$s_x^1 s_y^2 s_y^3 = s_y^1 s_x^2 s_y^3 = s_y^1 s_y^2 s_x^3 \;=\; 1$$

zulassen. Alle drei Bedingungen müssen erfüllt sein, da das System nicht „weiß“, für welche Richtung die x–Komponente gemessen wird. Sollte es die „Elemente der Realität“ geben, so müssen die Spinorientierungen für beide Richtungen schon vor der Messung festliegen und einer der Möglichkeiten in der Tabelle entsprechen.

Nachdem ausreichend oft überprüft wurde, dass der Zustand $|\Psi\rangle$ tatsächlich korrekt präpa-

Erlaubte Werte der Spins

1. Teilchen		2. Teilchen		3. Teilchen	
s_x^1	s_y^1	s_x^2	s_y^2	s_x^3	s_y^3
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1
-1	-1	$+1$	$+1$	-1	-1
-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$
$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$
-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$
-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1
$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	-1

Tabelle 8.1: Kombinationen möglicher Spinwerte, für die alle drei Operatoren A_i den Eigenwert 1 haben.

riert wurde und die geforderten Korrelationen zwischen den drei Teilchen bestehen, kann sich der Experimentator entschließen, für alle drei Teilchen den Spin in x–Richtung zu messen. Wie sich aus der obigen Tabelle ergibt, folgt in jedem der möglichen Fälle:

$$\boxed{s_x^1 s_x^2 s_x^3 \;=\; 1} \quad .$$

Sollte es die Elemente der Realität geben, muss das Produkt der Spinorientierungen in die x-Richtungen bei einer solchen Messung den Wert $+1$ liefern.

8.4.3 Argumentation der Quantenmechanik

Die Observable $B = S_x^1 S_x^2 S_x^3$ kommutiert mit allen A_i, d.h. der Zustand Ψ ist auch Eigenzustand zu B. Es gilt:

$$B \;=\; S_x^1\, S_x^2\, S_x^3 \;=\; -\,A_1\, A_2\, A_3 \; .$$

Da für jede Observalbe A_i das Messergebnis $+1$ ist, folgt als Messergebnis für die Observable B:

$$\boxed{s_x^1 s_x^2 s_x^3 \;=\; -\,1} \quad .$$

Es ist außerordentlich schwer, den Zustand $|\Psi\rangle$ zu präparieren. GHZ zusammen mit A. Shimony haben weitere 3- und 4-Teilchen-Experimente nach dem obigen Muster entwickelt[38]. 1999 gelang es einer Gruppe um A./ Zeilinger einen Drei-Photon-Zustand zu erzeugen, der die geforderten Eigenschaften besitzt [17]. Damit sind GHZ-Experimente heute keine Gedankenexperimente mehr sondern knnen tatsächlich durchgeführt werden (siehe auch [76]).

8.4.4 Reaktionen auf GHZ

Nachdem David Mermin 1990 in der Juni Ausgabe von *Physics Today* das GHZ-Experiment und die „all-or-nothing demolishion of the elements of reality“ ausführlich geschildert hatte, erschienen in der Dezember Ausgabe derselben Zeitschrift Reaktionen auf diesen Artikel. Interessant war insbesondere die Einstellung von Emilio Santos. Er schreibt zunächst:

> When, many years ago, I learned about Bell's theorem, I deduced that quantum mechanics is wrong, because for me – as for Einstein, I believe – realism and locality are not renounceable [verzichtbar].

Santos erklärt nun, dass die Bell'schen Ungleichungen ihn erst beunruhigt haben, als Alain Aspect [3] und seine Gruppe ihre experimentellen Ergebnisse veröffentlichten. Seine Schlussfolgerung: Diese Ergebnisse müssen falsch sein; die wahrscheinlichste Ursache dafür liegt in der niedrigen Effizienz von Detektoren, die das Ergebnis verfälschen.

Diese Überlegung gilt nicht mehr für das GHZ Gedankenexperiment. Daher sucht Santos nach einer neuen Erklärung:

> Again I feel obliged to find an escape. I am now convinced that, perhaps in addition to the problem of noise discussed above, what is wrong with quantum mechanics is the assumption that all vectors in the relevant Hilbert space represent actual states. This postulate was established by von Neumann and, although recognizedly too strong, it was widely accepted as long as there was no reason to weaken it. The first weakening came with the discovery of superselection rules. Now there are reasons for further weakening, namely, the demand for depriving all vectors violating local realism of the condition of representing physical states.

Dieser letzte Einwand ist grundsätzlich nicht unberechtigt. Wer garantiert uns, dass sämtliche Vektoren des Hilbert-Raums, die wir als Linearkombination von physikalischen Zuständen konstruieren können, auch tatsächlich wieder einem physikalisch realisierbaren Zustand entsprechen? Es gibt keinen Algorithmus, der uns sagt, wie man einen solchen Zustand präpariert. Ebensowenig wie wir einen Algorithmus haben, der zu zwei beobachtbaren (nichtkommutierenden) Größen die Messvorschrift der Summe dieser Größen liefert. Hier liegt tatsächlich eine konzeptuelle Schwäche der Quantenmechanik. Andererseits gibt es bis heute kein Gegenbeispiel, für das sich beweisen lässt, dass bestimmte Zustände nicht realisierbare sind (mit Ausnahme solcher Zustände, die Superauswahlregeln unterliegen) oder dass es zu bestimmten hermiteschen Operatoren keine physikalische Observable gibt. Wie wir schon erwähnt haben, wurde ein GHZ-Zustand mittlerweile tatsächlich präpariert [17].

Kapitel 9

Verborgene Variable

Wir wollen uns in diesem Kapitel ganz konkret mit dem Problem von Modellen mit verborgenen Parametern auseinandersetzen. Im Vordergrund stehen dabei einige sogenannte „No-Go“-Theoreme, allen voran das Theorem von von Neumann. Die Überlegungen der folgenden Abschnitte beruhen zum großen Teil auf der Arbeit von Bell [8]. Und wie Bell beginnen wir mit einem einfachen Beispiel für ein Modell mit verborgenen Variablen.

9.1 Verborgene Variable für die Spin-Physik

Wir betrachten den Zustandsraum des Spin-Freiheitsgrades für ein Spin-1/2-Teilchen. Die Observablen werden durch die hermiteschen 2×2-Matrizen

$$R \;=\; \alpha 1 + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}$$

repräsentiert. $\vec{\beta}$ ist ein beliebiger reeller Vektor, α eine beliebige reelle Zahl, und $\vec{\sigma}$ hat als Komponenten die Pauli-Matrizen. Eine einzelne Messung einer solchen Observablen liefert als Messwert einen der beiden Eigenwerte dieser Matrix

$$\alpha \pm |\vec{\beta}| \; .$$

Sei Ψ ein reiner Zustand, d.h. ein normierter 2-komponentiger komplexer Vektor, so ist der Erwartungswert für die Observable durch

$$\omega_\Psi(R) \;=\; \langle \Psi | \alpha + \vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} | \Psi \rangle$$

gegeben. Durch eine geeignete Wahl des Koordinatensystems können wir Ψ immer in der Form

$$\Psi \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. In dieser Basis ist der Erwartungswert durch

$$\omega_\Psi(R) \;=\; \alpha + \beta_z$$

gegeben.

Wir führen nun eine verborgene Variable λ mit

$$-\frac{1}{2} \le \lambda \le \frac{1}{2}$$

ein. Die dispersionsfreien Zustände sind nun durch (Ψ, λ) charakterisiert, und da wir Ψ durch die Wahl des Koordinatensystems festgelegt haben, hängen die dispersionsfreien Zustände nur noch von λ ab. Als Messwert in einem solchen Zustand erhalten wir mit Sicherheit den Eigenwert

$$\alpha + \epsilon(\lambda)|\vec{\beta}|$$

mit

$$\epsilon(\lambda) \;=\; \mathrm{sign}\left(\lambda|\vec{\beta}| + \frac{1}{2}|\beta_z|\right) \mathrm{sign} X \;,$$

wobei

$$X \;=\; \begin{cases} \beta_z & \text{falls } \beta_z \neq 0 \\ \beta_x & \text{falls } \beta_z = 0, \quad \beta_x \neq 0 \\ \beta_y & \text{falls } \beta_z = 0, \quad \text{und } \beta_x = 0 \end{cases} \;,$$

und

$$\mathrm{sign}\, X \;=\; \begin{cases} +1 & \text{falls } X \ge 0 \\ -1 & \text{falls } X < 0 \end{cases} \;.$$

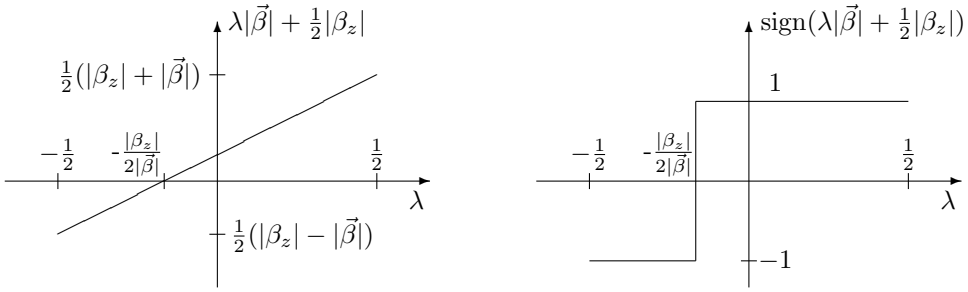


Abbildung 9.1: Die Funktion $\lambda|\vec{\beta}| + \frac{1}{2}|\beta_z|$ und die zugehörige Signums-Funktion.

Der quantenmechanische Zustand zu dem Vektor Ψ entsteht durch gleichförmige Mittelung über alle möglichen Werte von λ. Mit

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}\lambda\; \mathrm{sign}\left(\lambda|\vec{\beta}| + \frac{1}{2}|\beta_z|\right) \;=\; \frac{|\beta_z|}{|\vec{\beta}|}$$

erhalten wir das gewünschte Resultat:

$$\omega_\Psi(R) \;=\; \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}\lambda \;\left\{\alpha + |\vec{\beta}|\mathrm{sign}\left(\lambda|\vec{\beta}| + \frac{1}{2}|\beta_z|\right)\mathrm{sign}X\right\} \;=\; \alpha + \beta_z \;.$$

Bell betont in diesem Zusammenhang, dass es ihm nicht darum geht, der Variablen λ eine konkrete physikalische Bedeutung zuzuschreiben oder die Quantenmechanik neu zu interpretieren. Es geht ihm lediglich darum, ein Beispiel anzuführen, das offensichtlich von dem von Neumannschen Beweis nicht erfasst wird. Ein anderes (ähnliches) Beispiel findet man in [75], Kap. II.5.

9.2 Der von Neumannsche Beweis

9.2.1 Die Annahmen

In seinem Buch *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [62] möchte von Neumann durch eine minimale Anzahl von Forderungen an die Observablen und die Zustände in einer physikalischen Theorie wie der Quantentheorie beweisen, dass es keine dispersionsfreien Zustände geben kann. Seine Annahmen im einzelnen sind die folgenden:

1. Wenn die Größe $\mathcal{R}$ den Operator R hat, so hat die Größe $f(\mathcal{R})$ den Operator $f(R)$.
2. Wenn die Größen $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ die Operatoren $R, S, ...$ haben, so hat die Größe $\mathcal{R}+\mathcal{S}+...$ den Operator $R+S+....$ (Die gleichzeitige Messbarkeit von $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ wird nicht vorausgesetzt.)
3. Wenn die Größe $\mathcal{R}$ ihrer Natur nach nie negativ ist, wenn sie z.B. das Quadrat einer anderen Größe $\mathcal{S}$ ist, so ist $\mathrm{Erw}(\mathcal{R}) \geq 0$.
4. Sind $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ beliebige Größen, und $a, b, ...$ reelle Zahlen, so ist

$$\mathrm{Erw}(a\mathcal{R} + b\mathcal{S} + ...) \;=\; a\mathrm{Erw}(\mathcal{R}) + b\mathrm{Erw}(\mathcal{S}) + ... \;.$$

Die ersten beiden Annahmen (S. 167) beziehen sich auf Verknüpfungsrelationen physikalischer Größen, wir würden von Verknüpfungsrelationen von Observablen sprechen. Die letzten beiden Annahmen (S. 165) bezeichnen Eigenschaften, die ein Erwartungswertfunktional haben soll: Linearität und Positivität. Er verlangt nicht unbedingt die Normiertheit $\mathrm{Erw}(1) = 1$.

Einer Erläuterung bedürfen zunächst die ersten beiden Annahmen. Er unterscheidet zwischen der „Größe“ $\mathcal{R}$ und ihrer Darstellung durch einen hermiteschen Operator R. Er sagt (S. 158): „Unter einer Größe ist eigentlich die Anweisung zu verstehen, wie sie zu messen ist – und wie ihr Wert aus den Zeigerstellungen der Messinstrument abzulesen bzw. zu berechnen ist.“ Er fährt dann fort:

Wenn $\mathcal{R}$ eine Größe ist, und $f(x)$ irgendeine Funktion, so ist die Größe $f(\mathcal{R})$ so definiert: um $f(\mathcal{R})$ zu messen, messe man $\mathcal{R}$, findet man dabei (für $\mathcal{R}$) den Wert a, so hat $f(\mathcal{R})$ den Wert $f(a)$. Wie

man sieht, werden so alle Größen $f(\mathcal{R})$ ($\mathcal{R}$ fest, $f(x)$ eine beliebige Funktion) auf einmal miteinander und mit $\mathcal{R}$ gemessen: ein erstes Beispiel gleichzeitig messbarer Größen. Allgemein nennen wir zwei (oder mehrere) Größen $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ gleichzeitig messbar, wenn es eine Anordnung gibt, die beide gleichzeitig am selben System misst – nur dass ihre bzw. Werte auf verschiedene Weisen aus den Ablesungen zu berechnen sind. ... Für solche Größen, und eine Zweivariablenfunktion $f(x, y)$ können wir auch die Größe $f(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ definieren: sie wird gemessen, indem man $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ gleichzeitig misst, und wenn für diese die Werte a, b gefunden wurden, so ist der Wert von $f(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ $f(a, b)$. Man vergegenwärtige sich aber, dass es vollkommen unsinnig ist, $f(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ bilden zu wollen, wenn $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ nicht gleichzeitig messbar sind: es gibt ja keinen Weg, die dazugehörige Messanordnung anzugeben.

von Neumann definiert hier somit, wie man aus einer Observablen – als Äquivalenzklasse von Messvorschriften – eine beliebige Funktion dieser Observablen – ebenfalls als Messvorschrift – erhält. In einem gewissen Sinne handelt es sich um dieselbe Messvorschrift, allerdings wird die Messskala verändert (nicht nur linear, sondern durch eine beliebige Funktion der Messwerte ersetzt). Für gleichzeitig messbare (kommensurable) Observable kann man auf diese Weise ebenfalls beliebige Funktionen dieser Observablen definieren. Insbesondere ist für gleichzeitig messbare Observable $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ auch ihre Summe $\mathcal{R} + \mathcal{S}$ durch diese Vorschrift definiert: Man messe gleichzeitig beide Observable und bilde die Summe der Messergebnisse.

Bei seinen Forderungen für ein Erwartungswertfunktional findet von Neumann auch die Eigenschaft der Linearität für gleichzeitig messbare Größen (S. 164):

D. Wenn die Größen $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ gleichzeitig messbar sind, so ist Erw $(\mathcal{R}+\mathcal{S}+...)$ = Erw $(\mathcal{R})$+Erw $(\mathcal{S})$+ .... (Für nicht gleichzeitig messbare $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ ist $\mathcal{R} + \mathcal{S} + ...$ undefiniert.)

Er fährt dann fort:

All dies folgt ja unmittelbar aus den Definitionen der jeweils betrachteten Größen (d.h. ihrer Messvorschriften), und der Definition des Erwartungswertes als arithmetisches Mittel aller Messresultate an einer hinreichend großen statistischen Gesamtheit. Bei **D.** ist zu beachten, dass seine Richtigkeit auf demjenigen Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht, demzufolge der Erwartungswert einer Summe stets die Summe der Erwartungswerte der einzelnen Addenden ist, unabhängig davon, ob zwischen diesen Wahrscheinlichkeitsabhängigkeiten bestehen oder nicht (im Gegensatz z.B. zum Produkt). Dass wir es nur für gleichzeitig messbar $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ formulieren, ist natürlich: sonst ist $\mathcal{R} + \mathcal{S} + ...$ sinnlos.

In der Quantenmechanik gibt es aber noch eine andere, über das bisher Diskutierte hinausgehende Rechenoperation: nämlich das Addieren von zwei beliebigen, nicht notwendig gleichzeitig beobachtbaren Größen. Dieselbe beruht darauf, dass für zwei Hermitesche Operatoren R, S die Summe $R+S$ wieder ein Hermitescher Operator ist, auch dann, wenn R, S nicht vertauschbar sind, während z.B. das Produkt RS nur im Fall der Vertauschbarkeit wieder Hermitesch ausfällt... . In jedem Zustande ϕ addieren sich die Erwartungswerte: $(R\phi, \phi) + (S\phi, \phi) = ((R + S)\phi, \phi)...$. Dasselbe gilt für mehrere Addenden. Diese Tatsache übernehmen wir nun in unseren allgemeinen (vorläufig noch gar nicht zur Quantenmechanik spezialisierten) Ansatz:

E. Sind $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ beliebige Größen, so gibt es eine weitere Größe $\mathcal{R} + \mathcal{S} + ...$ (die von der Wahl der Erw($\mathcal{R}$)-Funktion ((Erwartungswertfunktional)) nicht abhängt), derart, dass Erw $(\mathcal{R} + \mathcal{S} + ...)$ = Erw $(\mathcal{R} +$ Erw $(\mathcal{S}) + ...$ gilt.

Wenn $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ gleichzeitig messbar sind, muss dieses $\mathcal{R} + \mathcal{S} + ...$ wegen **D.** die gewöhnliche Summe sein. Im allgemeinen ist es aber nur durch **E.** auf implizite Weise gekennzeichnet, und wir können die Messvorschriften für $\mathcal{R}, \mathcal{S}, ...$ kaum zu einer solchen von $\mathcal{R} + \mathcal{S} + ...$ zusammensetzen.

An die letzte Bemerkung fügt er noch eine Anmerkung, dass der Energieoperator $H = \frac{1}{2m}\vec{P}^2 + V(\vec{Q})$ die Summe von zwei nicht vertauschbaren Operatoren R und S ist. Während sich R aus der Messung der Impulse und S aus der Messung der Orte bestimmten lässt, muss der Energieoperator durch eine völlig andere Messvorschrift bestimmt werden, beispielsweise durch die Messung der emittierten Spektrallinien.

von Neumann ist sich offensichtlich des Schwachpunktes seiner Forderungen sehr wohl bewusst. Da die Messvorschrift zu dem Operator $R + S$ im allgemeinen nichts mit den Messvorschriften für die Operatoren R und S zu tun hat, gibt es eigentlich auch keinen Grund, für das Erwartungswertfunktional die Linearität für nicht gleichzeitig messbare Observable zu fordern. Auf diese Schwäche hat schon 1935 Grete Hermann [47] hingewiesen und dieser Punkt wird es auch sein, den Bell immer wieder kritisiert.

9.2.2 Der Beweis

Wir wollen an dieser Stelle nur die Beweisidee skizzieren. Die Notation ist bei von Neumann etwas schwerfällig, aber die Argumentation relativ einfach.

Aus der Tatsache, dass Hermitesche Operatoren einen Vektorraum bilden (d.h. insbesondere addiert werden können) und dass das Erwartungswertfunktional linear sein soll, schließt von Neumann zunächst, dass dieses Funktional von der Form

$$\text{Erw}\,(\mathcal{R}) \;=\; \text{Spur}\,(UR)$$

ist, wobei U eine allgemeine, von R unabhängige Matrix ist. Aus der Positivität des Erwartungswertfunktinals folgt dann, dass auch U positiv sein muss. Den Operator $U = 0$, der keiner Dichtematrix entspricht, schließt von Neumann explizit aus, da er „keinerlei Aussagen liefert“. Verlangt man von U noch die Normierungsbedingung $\text{Spur}\,U = 1$, so würden wir U heute als Dichtematrix bezeichnen. von Neumann macht noch einige Bemerkungen zu sogenannten „relativen“ Erwartungswerten, die manchmal von Bedeutung sein können wenn U nicht spurklasse ist. Dies soll uns aber hier nicht interessieren.

von Neumann argumentiert nun, dass es keine streuungsfreien Erwartungswertfunktionale geben kann. Dazu wählt er $R = P_\phi$, d.h. den Projektionsoperator auf den eindimensionalen Teilraum zu einen normierten Vektor ϕ. Für den Erwartungswert erhält er

$$\text{Spur}\,(UP_\phi) \;=\; \langle\phi|U|\phi\rangle\ .$$

Damit der Zustand streuungslos ist, muss gelten:

$$\text{Spur}\,(U(P_\phi)^2) \;=\; \big(\text{Spur}\,(UP_\phi)\big)^2\ .$$

Da aber $P_\phi^2 = P_\phi$ folgt

$$\langle\phi|U|\phi\rangle \;=\; \langle\phi|U|\phi\rangle^2\ .$$

Für einen streuungslosen Zustand, beschrieben durch die Dichtematrix U, muss somit *jeder* Erwartungswert zwischen normierten Vektoren ϕ entweder den Wert 0 oder 1 haben. Da sich aber zwei normierte Vektoren ϕ und ϕ' immer stetig ineinander überführen lassen (beispielsweise durch eine Rotation in der von ϕ und ϕ' aufgespannten Ebene), muss sich der Erwartungswert bei dieser Überführung stetig ändern, darf also keine Sprünge machen. Mit anderen Worten, der Erwartungswert von U muss *für alle* normierte Vektoren entweder 0 oder 1 sein. 0 kommt aber nicht in Frage, da es sich in diesem Fall um den bereits ausgeschlossenen 0-Operator handeln würde. Bleibt somit $U \equiv 1$. Aber auch diese Matrix scheidet aus. Einerseits, weil sie (auf einem unendlich dimensionalen Hilbert-Raum) nicht normierbar ist, andererseits aber auch, weil sie ebenfalls nicht streuungsfrei ist, beispielsweise für Operatoren, für die Spur $R^2 \neq (\text{Spur}\, R)^2$ gilt.

Abschließend zeigt von Neumann noch, dass die einzigen reinen (oder, wie er sagt, einheitlichen) Zustände von der Form $U = P_\phi$ sind, also Projektionsoperatoren auf eindimensionale Teilräume. Für den Beweis der „Unmöglichkeit verborgener Variabler“ ist das aber nicht wichtig. von Neumann beschließt seinen Beweis mit den Bemerkungen:

> Damit ist im Rahmen unserer Bedingungen die Entscheidung gefallen, und zwar gegen die Kausalität: denn alle Gesamtheiten streuen, auch die einheitlichen.
>
> Es wäre noch die in III.2. aufgeworfene Frage der „verborgenen Parameter“ zu diskutieren, d.h. die Frage, ob die Streuungen der durch die Wellenfunktionen ϕ ... gekennzeichneten einheitlichen Gesamtheiten nicht daher rühren, dass diese nicht die wahren Zustände sind, sondern nur Gemische mehrerer Zustände – während zur Kennzeichnung des wirklichen Zustandes neben der Angabe der Wellenfunktion ϕ noch weitere Angaben nötig wären (das sind die „verborgenen Parameter“), die zusammen alles kausal bestimmen, d.h. zu streuungsfreien Gesamtheiten führen. Die Statistik der einheitlichen Gesamtheit ($U = P_{[\phi]}, \|\phi\| = 1$) entstünde dann durch Mittelung über alle wirklichen Zustände, aus denen sie aufgebaut ist; d.h. durch Mittelung über jenen Wertbereich der „verborgenen Parameter“, der in jenen Zuständen verwirklicht ist. Dies ist aber aus zwei Gründen unmöglich: Erstens, weil dann die betreffende einheitliche Gesamtheit als Gemisch zweier verschiedener Gesamtheiten dargestellt werden könnte, entgegen ihrer Definition. Zweitens, weil die streuungsfreien Gesamtheiten, die den „wirklichen“ Zuständen entsprechen müssten (d.h. die aus lauter Systemen im selben „wirklichen“ Zustande bestehen) gar nicht existieren. Man beachte, dass wir hier gar nicht näher auf die Einzelheiten des Mechanismus der „verborgenen Parameter“ eingehen mussten: die sichergestellten Resultate der Quantenmechanik können mit ihrer Hilfe keinesfalls wiedergewonnen werden, ja es ist sogar ausgeschlossen, dass dieselben physikalischen Größen mit denselben Verknüpfungen vorhanden sind..., wenn neben der Wellenfunktion noch andere Bestimmungsstücke („verborgene Parameter“) existieren sollen.

Es schließt sich die berühmte Schlussfolgerung an, die wir bereits im letzten Kapitel zitiert hatten (S. 102).

9.2.3 Bemerkungen

Wir hatten schon angedeutet, dass sich von Neumann des Schwachpunktes seiner Forderungen durchaus bewusst ist. Entsprechen zwei hermitesche Operatoren R und S den beobachtbaren Größen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$, so muss er fordern, dass es auch zu dem hermiteschen Operator $R + S$ eine beobachtbare Größe gibt, die er mit $\mathcal{R} + \mathcal{S}$ bezeichnet. Wenn R und S aber nicht vertauschen,

kann man für diese Größe keine Messvorschrift angeben, die sich in irgendeiner Form aus den Messvorschriften von $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ angeben lässt. Schon die Existenz einer solchen Observablen wurde gelegentlich angezweifelt (vgl. die Bemerkungen in Abschnitt 8.4). Sie bildet aber nicht den eigentlichen Kritikpunkt, der beispielsweise von Bell immer wieder hervorgehoben wurde.

Der eigentlich Kritikpunkt ist die Linearität des Erwartungswertfunktionals für nicht vertauschende Operatoren. Wie von Neumann betont, ist die Linearität für vertauschbare Operatoren keine Forderung, sondern eine Eigenschaft eines Erwartungswertfunktionals. Da die Messgröße $m(R+S)$ (nicht zu verwechseln mit dem Erwartungswert) der Observablen $\mathcal{R}+\mathcal{S}$ dadurch bestimmt wird, dass $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ gleichzeitig gemessen und ihre Messwerte $m(R)$ und $m(S)$ addiert werden, d.h.

$$m(R+S) \;=\; m(R)+m(S) \qquad \text{falls } [R,S]=0\ ,$$

gilt die Linearität auch für Summen und damit auch für den Mittelwert dieser Messwerte.

Bei nichtkommutierenden Operatoren ist der Messwert für die Summe der Operatoren aber nicht gleich der Summe der Messwerte der einzelnen Operatoren (weder, wenn man sie in irgendeiner Reihenfolge nacheinander an einem System misst, oder, wenn man sie, wie von Neumann das vorschlägt, gleichzeitig an einem Ensemble von Systemen im selben Zustand misst):

$$m(R+S) \;\neq\; m(R)+m(S) \qquad \text{falls } [R,S]\neq 0\ .$$

Messwerte sind immer Eigenwerte der Operatoren. Bei nicht kommutierenden Operatoren sind die Eigenwerte einer Summe der Operatoren aber im allgemeien nicht gleich der Summe von Eigenwerten der einzelnen Operatoren. Das Beispiel des Energieoperators zeigt dies deutlich: sowohl P als auch Q haben im allgemeinen kontinuierliches Spektrum, der Energieoperator hat aber diskretes Spektrum.

Es gibt daher auch gar keinen Grund, die Linearität für die Summe von Messwerten bzw. den Mittelwert zu fordern. Diese Eigenschaft ist zwar in der Quantenmechanik erfüllt, aber dabei handelt es sich um eine sehr spezielle Eigenschaft, die alles andere als einer physikalischen Denknotwendigkeit entspricht.

Das Beispiel aus Abschnitt 9.1 zeigt auch, dass die Messwerte von R (seine Eigenwerte) keine linearen Funktionen in den Koeffizienten $\alpha, \beta_x, \beta_y, \beta_z$ sind. Erst die Mittelung über den verborgenen Parameter führt zu einer linearen Funktion in den Koeffizienten.

Es ist an dieser Stelle angebracht, auf eine Arbeit der Philosophin Grete Hermann aus dem Jahre 1935 mit dem Titel *Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik* [47] hinzuweisen. In § 7 ihrer Abhandlung mit dem Titel *Der Zirkel in Neumanns Beweis* schreibt sie:

> Es fehlt indessen nicht an Bemühungen, solche Entdeckungen [Theorien mit verborgenen Variablen], die von neuem eine Chance für exakte Vorausberechnungen aller Messungsergebnisse liefern könnten, prinzipiell als unmöglich zu erweisen. Besonders weit durchgearbeitet ist dieser Beweis in Neumanns mathematischer Durchbildung des Formalismus. Eine eingehende Prüfung zeigt aber auch hier, daß diese mathematisch sonst einwandfreie Argumentation in ihren formalen Voraussetzungen eine der zu beweisenden These äquivalente Aussage ohne Begründung einführt. Sie ist in dem folgenden Ansatz enthalten: Es sei irgend eine Schar physikalischer Systeme gegeben, $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ seien physikalische Größen,

die an den Systemen dieser Schar gemessen werden können; unter dem Erwartungswert von $\mathcal{R}$ (Erw($\mathcal{R}$)) sei der Mittelwert der Messungsergebnisse verstanden, die sich bei einer $\mathcal{R}$-Messung an allen Systemen der Schar einstellen, der Wert also, der als das wahrscheinlichste Ergebnis einer Schar zu erwarten ist. Für die so mit Hilfe einer Schar physikalischer Systeme definierte Erwartungswert-Funktion Erw($\mathcal{R}$), die jeder physikalischen Größe eine Zahl zuordnet, setzt Neumann voraus, daß Erw($\mathcal{R}+\mathcal{S}$) = Erw($\mathcal{R}$)+ Erw($\mathcal{S}$) ist. In Worten: *Der Erwartungswert einer Summe physikalischer Größen ist gleich der Summe der Erwartungswerte beider Größen.* Mit dieser Voraussetzung steht und fällt der Neumannsche Beweis.

Für die klassische Physik ist diese Voraussetzung trivial. Sie ist es auch für diejenigen quantenmechanischen Merkmale, die einander in ihrer Meßbarkeit gegenseitig nicht beschränken, zwischen denen also keine Unbestimmtheitsrelationen bestehen. ... Nicht selbstverständlich aber ist die Beziehung für quantenmechanische Größen, zwischen denen Unbestimmtheitsrelationen gelten, und zwar darum nicht, weil die Summe zweier solcher Größen unmittelbar gar nicht definiert ist ... Erst auf dem Umweg über gewisse mathematische Operatoren, die diesen Größen zugeordnet sind, führt der Formalismus auch für solche Größen den Begriff ihrer Summe ein.

... Gibt man dagegen - mit Neumann - diesen Schritt nicht preis, dann hat man in die Interpretation stillschweigend die unbewiesene Voraussetzung aufgenommen, daß es an den Elementen einer Schar durch φ charakterisierter physikalischer Systeme keine unterscheidenden Merkmale geben könne, von denen das Ergebnis der $\mathcal{R}$-Messung abhängt. Die Unmöglichkeit solcher Merkmale ist aber gerade die zu beweisene Behauptung. Der Beweis läuft somit auf einen Zirkel hinaus.

In Anbetracht dieser schon 1935 außerordentlich klar erkannten Schwäche des von Neumannschen Beweises ist es erstaunlich, dass die Physiker erst durch die Arbeit Bells 1966 auf diesen Punkt aufmerksam wurden. Bell scheint den Artikel Grete Hermanns zu diesem Zeitpunkt nicht gekannt zu haben, da er ihn nicht zitiert. Überhaupt scheint die Arbeit Grete Hermanns von den Physikern kaum zur Kenntnis genommen worden zu sein, obwohl Heisenberg diese Arbeit kannte und sie auch in einem Brief an Pauli vom 2. Juli 1935 lobend erwähnt.

9.3 Der Beweis von Jauch und Piron

1963 haben Jauch und Piron [52] versucht, die Möglichkeiten für verborgene Variable weiter einzuschränken, indem sie die Voraussetzungen an Obserable und Zustände in der Quantenmechanik abschwächten. Wir behandeln hier die Resultate von Jauch und Piron in der Form von Bell [8], d.h., wir akzeptieren den gewöhnlichen Formalismus der Quantenmechanik und versuchen, durch geeignete Forderungen die Unmöglichkeit streuungsfreier Zustände zu beweisen. Die Forderungen sind dabei schwächer als die Annahmen von Neumanns. Eine Diskussion des Jauch-Piron Theorems in der Sprache der Verbandstheorie findet sich in Giuntini [39].

Jauch und Piron benutzen für ihr Theorem Projektionsoperatoren, d.h., sie arbeiten im Propositionenkalkül. Die Annahmen von Jauch und Piron sind im wesentlichen:

1. Die Erwartungswerte von *kommutierenden* Projektionsoperatoren sind additiv.
2. Wenn es ein Erwartungswertfunktional gibt, so dass für zwei Projektionsoperatoren P_A und P_B gilt
$$\langle P_A \rangle \;=\; \langle P_B \rangle \;=\; 1\,,$$

dann soll auch gelten

$$\langle P_A \cap P_B \rangle \;=\; 1 \,.$$

Da die möglichen Eigenwerte von Projektionsoperatoren immer 0 oder 1 sind, bedeutet $\langle P \rangle = 1$, dass in diesem Zustand der Wert des Projektionsoperators mit Sicherheit 1 ist.

Die Bedeutung dieser Forderung ist offensichtlich, wenn man bei Projektionsoperatoren als Analoga zu einem Aussagenkalkül denkt. $\langle P_A \rangle = 1$ bedeutet, dass in diesem Zustand die Eigenschaft A mit Sicherheit vorhanden ist. Entsprechend folgt aus $\langle P_B \rangle = 1$, dass dieser Zustand auch mit Sicherheit die Eigenschaft B hat. Daher ist es naheliegend zu fordern, dass dieser Zustand mit Sicherheit die Eigenschaft „A und B“ hat.

Wir betrachten einen zweidimensionalen komplexen Vektorraum. Die Projektionsoperatoren sind 0, 1, sowie die Operatoren

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \,,$$

wobei $\vec{a}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist. In einem dispersionsfreien Zustand muss der Erwartungswert eines Operators gleich einem seiner Eigenwerte sein. Aus Annahme 1) folgt:

$$\left\langle \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \right\rangle \;=\; 1 \,.$$

Mit anderen Worten, in einem dispersionsfreien Zustand hat einer der beiden Operatoren (unabhängig von $\vec{a}$) immer den Erwartungswert 1, der andere hat entsprechend den Erwartungswert 0.

Seinen nun $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei nicht linear abhängige Einheitsvektoren und

$$P_A \;=\; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{\sigma} \quad , \qquad P_B \;=\; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{\sigma} \,.$$

Die Vorzeichen seinen jeweils so gewählt, dass der Erwartungswert des Projektionsoperators in dem zur Debatte stehenden Zustand gleich 1 ist.

Aus Forderung 2) würde daher folgen, dass

$$\langle P_A \cap P_B \rangle \;=\; 1 \,.$$

Wir haben aber schon gesehen (vgl. Abschnitt 4.2, S. 38), dass für Projektionsoperatoren zu verschiedenen Achsen gilt

$$P_A \cap P_B \;=\; 0 \,.$$

Daraus folgt, dass es unter den obigen Annahmen keine streuungsfreien Zustände geben kann.

Die Kritik von Bell ist ähnlich, wie schon beim von Neumannschen Beweis. P_A und P_B sind Projektionsoperatoren, die einer besonderen Messvorschrift entsprechen. Da P_A und P_B nicht kommutieren, sind diese Messvorschriften unterschiedlich und können nicht gleichzeitig an einem System durchgeführt werden. Die Messvorschrift für den Operator $P_A \cap P_B$ ist wieder eine andere, d.h. sie lässt sich nicht aus den einzelnen Messvorschriften zusammensetzen. Daher gibt es auch keinen Grund für die Annahme 2).

9.4 Gleason

1957 hat Gleason versucht, die Grundlagen der Quantenmechanik auf einem reduzierten Satz von Axiomen aufzubauen [40]. Das sogenannte Gleasonsche Theorem besagt im wesentlichen folgendes:

Gleasonsches Theorem: *Sei μ ein Maß auf den abgeschlossenen Teilräumen eines separablen (reellen oder komplexen) mindestens dreidimensionalen Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$. Dann gibt es einen positiv semi-definiten selbstadjungierten Spurklasse-Operator T, sodass für alle abgeschlossenen Teilräume A von $\mathcal{H}$*

$$\mu(A) \;=\; \mathrm{Spur}\, T P_A$$

gilt, wobei P_A der orthogonale Projektionsoperator auf den Teilraum A ist.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang die Definition eines Maßes auf den linearen Teilräumen eines Hilbert-Raumes:

Definition: Ein Maß auf den abgeschlossenen Teilräumen eines Hilbert-Raumes ist eine Funktion μ, die jedem abgeschlossenen Teilraum eine nicht-negative Zahl zuordnet, so dass für jede abzählbare Folge $\{A_i\}$ von untereinander orthogonalen Teilräumen mit abgeschlossener linearer Hülle B gilt:

$$\mu(B) \;=\; \sum_i \mu(A_i)\;.$$

Wichtig ist, dass für das Gleasonsche Theorem die Linearität nur für untereinander orthogonale Teilräume gefordert wird. Die allgemeine Theorie Gleasons und insbesondere der allgemeine Beweis des obigen Theorems sollen uns hier jedoch nicht interessieren. Im wesentlichen besagt es, dass ein Zustandsfunktional auf einem separablen Hilbert-Raum durch eine Dichtematrix gegeben ist, sofern man die Linearität für kommutierende Projektionsoperatoren fordert. Als ein Nebenprodukt seiner Arbeit erscheint ein Resultat, das die Möglichkeiten für verborgene Variable weit über die Theoreme von von Neumann oder Jauch und Piron einschränkt. Wir folgen wieder der Argumentation von Bell [8].

9.4.1 Annahmen und Behauptung von Gleason

Im folgenden sei $P(\phi)$ der Projektionsoperator auf den eindimensionalen Teilraum des Hilbert-Raums, der durch den Vektor ϕ aufgespannt wird. Von den folgenden zwei Annahmen wird wesentlicher Gebrauch gemacht:

1. Wenn für irgendeinen Hilbert-Raum-Vektor ϕ und einen Zustand (Erwartungswertfunktional $\langle\rangle$) gilt
$$\langle P(\phi)\rangle \;=\; 1\;,$$
dann gilt für denselben Zustand
$$\langle P(\psi)\rangle \;=\; 0$$
für alle ψ, die orthogonal zu ϕ sind.

2. Wenn für einen gegebenen Zustand und zwei orthogonale Vektoren ϕ_1 und ϕ_2 gilt

$$\langle P(\phi_1)\rangle \;=\; \langle P(\phi_2)\rangle \;=\; 0\,,$$

dann gilt auch

$$\langle P(\alpha\phi_1+\beta\phi_2)\rangle \;=\; 0\,.$$

Das bemerkenswerte an diesen Annahmen ist, dass sie sich nur aus Eigenschaften kommutierender Projektionsoperatoren herleiten lassen, d.h. nur die Linearität des Zustandes für kommutierende Observable zu benutzen scheinen.

Zu Forderung 1:
Sei ϕ_i ein vollständiger und orthogonaler Satz von Vektoren, dann gilt

$$\sum_i P(\phi_i) \;=\; 1\,.$$

Da alle diese Projektionsoperatoren kommutieren, folgt für jeden Zustand, der bzgl. kommutierender Operatoren linear ist, auch

$$\sum_i \langle P(\phi_i)\rangle \;=\; 1\,. \tag{9.1}$$

Da die Erwartungswerte von Projektionsoperatoren nur zwischen 0 und 1 liegen können und da je zwei orthogonale Vektoren ϕ und ψ als Teil eines vollständigen Orthonormalsystems aufgefasst werden können, folgt unmittelbar Annahme 1.

Zu Forderung 2:
Seien ψ_1 und ψ_2 zwei andere orthogonale Vektoren, die den Unterraum von ϕ_1 und ϕ_2 aufspannen, dann ist auch $\{\psi_1,\psi_2,\phi_{i\neq 1,2}\}$ ein Orthonormalsystem und es gilt

$$\langle P(\psi_1)\rangle + \langle P(\psi_2)\rangle \;=\; 1-\sum_{i\neq 1,2}\langle P(\phi_i)\rangle\,,$$

bzw.

$$\langle P(\psi_1)\rangle + \langle P(\psi_2)\rangle \;=\; \langle P(\phi_1)\rangle + \langle P(\phi_2)\rangle\,.$$

Wenn nun die rechte Seite verschwindet (Voraussetzung von Annahme 2), dann muss auch die linke Seite verschwinden, und da die Erwartungswerte nur zwischen 0 und 1 liegen können, müssen beide Erwartungswerte auf der linken Seite einzeln verschwinden. Da andererseits für $\psi_1=\alpha\phi_1+\beta\phi_2$ jede beliebige Linearkombination von ϕ_1 und ϕ_2 möglich ist, folgt Annahme 2.

Aus den beiden Annahmen leitet Gleason folgenden Satz ab:
Seien ϕ und ψ zwei (nicht orthogonale) Vektoren eines Hilbert-Raums der Dimension drei oder größer, so dass für einen gegebenen Zustand gilt:

$$\langle P(\psi)\rangle \;=\; 1\,, \tag{9.2}$$
$$\langle P(\phi)\rangle \;=\; 0\,. \tag{9.3}$$

Dann können ϕ und ψ nicht beliebig nahe beieinander liegen, genauer gilt

$$|\phi - \psi| > \frac{1}{2}|\psi| \; .$$

Aus diesem Theorem ergibt sich sofort, dass es keine dispersionsfreien Zustände geben kann. Für einen solchen Zustand muss nämlich der Erwartungswert für einen Projektionsoperator entweder 1 oder 0 sein. Wegen Gl. (9.1) müssen für die Projektionsoperatoren auf eindimensionale Teilräume auch beide Werte angenommen werden, d.h. man findet zwei Vektoren ϕ und ψ, so dass der Erwartungswert der zugehörigen Projektoren jeweils die Werte 0 und 1 annimmt. Verbinden wir nun diese beiden Vektoren stetig durch eine Schar von Vektoren, so muss es beliebig nahe beeinanderliegende Vektoren geben, für die in diesem Zustand verschiedene Werte 0 bzw. 1 angenommen werden. Dies widerspricht aber dem obigen Satz. Also kann es keine dispersionsfreien Zustände geben.

9.4.2 Beweis des Theorems

Zum Beweis des Theorems benutzen wir nur die beiden obigen Annahmen. Wir wählen ψ normiert und schreiben zunächst

$$\phi \;=\; \psi + \epsilon\psi' \; ,$$

wobei ψ' ebenfalls normiert und orthogonal zu ψ sei. ϵ ist eine reelle Zahl. Wir wählen nun einen normierten Vektor ψ'', der orthogonal zu ψ und ψ' (und damit zu ϕ) ist. (ψ, ψ' und ψ'' bilden also ein Orthonormalsystem). Nach Annahme 1 und Voraussetzung (9.2) folgt

$$\langle P(\psi')\rangle \;=\; 0 \; , \quad \text{und} \quad \langle P(\psi'')\rangle \;=\; 0 \; .$$

Annahme 2 und Voraussetzung (9.3) liefern somit

$$\langle P(\phi + \gamma^{-1}\epsilon\psi'')\rangle \;=\; 0 \; ,$$

wobei γ eine beliebige reelle Zahl sein kann. Ebenfalls nach Annahme 2 folgt

$$\langle P(-\epsilon\psi' + \gamma\epsilon\psi'')\rangle \;=\; 0 \; .$$

Die beiden Vektorargumente der letzten Gleichungen sind orthogonal,

$$(\phi + \gamma^{-1}\epsilon\psi'') \cdot (-\epsilon\psi' + \gamma\epsilon\psi'') \;=\; -\epsilon\phi \cdot \psi' + \epsilon^2 \;=\; -\epsilon(\psi + \epsilon\psi') \cdot \psi' + \epsilon^2 \;=\; 0 \; ,$$

und somit können wir ihre Summe bilden und nach Annahme 2 schließen:

$$\langle P(\psi + \epsilon(\gamma + \gamma^{-1})\psi'')\rangle \;=\; 0 \; .$$

Wenn ϵ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, dann gibt es reelle γ, so dass

$$\epsilon\left(\gamma + \gamma^{-1}\right) \;=\; \pm 1 \; ,$$

und somit würde in diesem Fall folgen:

$$\langle P(\psi + \psi'')\rangle \;=\; \langle P(\psi - \psi'')\rangle \;=\; 0 \; .$$

Die beiden Vektoren $\psi \pm \psi''$ sind aber orthogonal und somit gilt, wenn wir ihre Summe bilden, wiederum nach Annahme 2

$$\langle P(\psi) \rangle \;=\; 0 \,,$$

im Widerspruch zu unserer Voraussetzung (9.3). Somit muss $\epsilon > \frac{1}{2}$ gelten.

Letztendlich besteht die Beweisidee somit darin, aus den orthogonalen Paaren (ϕ, ψ'') und (ψ', ψ'') durch geeignete Linearkombinationen neue orthogonale Paare zu erzeugen – deren zugehörige Projektionsoperatoren nach Annahme 2 immer verschwindenden Erwartungswert haben – bis man schließlich den Vektor ψ erhält, dessen Projektionsoperator somit ebenfalls verschwindenen Erwartungswert haben müsste - entgegen der Beweisvoraussetzung.

9.4.3 Kommentar

Bell kritisiert natürlich die Annahme 2: Wenn für zwei orthogonale Vektoren ϕ_1 und ϕ_2 gilt

$$\langle P(\phi_1) \rangle \;=\; \langle P(\phi_2) \rangle \;=\; 0 \,,$$

dann soll auch für jede Linearkombination dieser beiden Vektoren gelten

$$\langle P(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) \rangle \;=\; 0 \,.$$

Diese Kritik erscheint zunächst berechtigt, denn die Projektionsoperatoren zu ϕ_1 und ϕ_2 kommutieren zwar untereinander, aber nicht mit dem Projektionsoperator zu einer nicht-trivialen Linearkombination der Vektoren. Also sind für $P(\phi_1)$ bzw. $P(\phi_2)$ einerseits und für $P(\alpha\phi_1+\beta\phi_2)$ andererseits völlig verschiedene Messvorschriften notwendig und es gibt keinen Grund, warum die Erwartungswerte dieser Operatoren miteinander zusammenhängen sollen.

Das Problem ist jedoch, dass sich die Annahme 2 aus einfacheren Annahmen ableiten ließ, die nur die Linearität des Erwartungswertfunktionals für kommutierende Projektionsoperatoren forderten. Schauen wir uns die Herleitung von Annahme 2 nochmals genauer an, wobei wir uns der Einfachheit halber auf einen dreidimensionalen Hilbert-Raum beschränken.

$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ seien ein Orthonormalsystem von Vektoren. Ebenso seien $\{\psi_1, \psi_2, \phi_3\}$ ein Orthonormalsystem von Vektoren. Beide Systeme haben also den Vektor ϕ_3 gemein, d.h. $\{\phi_1, \phi_2\}$ und $\{\psi_1, \psi_2\}$ spannen jeweils denselben zweidimensionalen Unterraum auf. Insbesondere sind ψ_1 und ψ_2 Linearkombinationen von ϕ_1 und ϕ_2.

Nach Voraussetzung über die Linearität des Erwartungswertfunktionals für kommutierende Operatoren gilt

$$\langle P(\phi_1) \rangle + \langle P(\phi_2) \rangle + \langle P(\phi_3) \rangle \;=\; 1 \,, \tag{9.4}$$

und

$$\langle P(\psi_1) \rangle + \langle P(\psi_2) \rangle + \langle P(\phi_3) \rangle \;=\; 1 \,. \tag{9.5}$$

Aus diesen beiden Relationen haben wir dann geschlossen, dass

$$\langle P(\phi_1) \rangle + \langle P(\phi_2) \rangle \;=\; \langle P(\psi_1) \rangle + \langle P(\psi_2) \rangle \,. \tag{9.6}$$

Haben wir diese Gleichung einmal akzeptiert, so folgt Annahme 2 unmittelbar.

Bell bezweifelt, dass wir aus (9.4) und (9.5) auf die Gleichung (9.6) schließen dürfen. Zur Überprüfung der Relation (9.4) bedarf es einer Messanordnung, die die drei kommutierenden Operatoren $P(\phi_1), P(\phi_2), P(\phi_3)$ gleichzeitig misst. Entsprechend bedarf es zur Überprüfung von (9.5) einer Messanordnung, die die drei kommutierenden Operatoren $P(\psi_1), P(\psi_2), P(\phi_3)$ gleichzeitig misst. Diese beiden Messanordnungen sind aber vollkommen verschieden, da $\{P(\phi_1), P(\phi_2)\}$ und $\{P(\psi_1), P(\psi_2)\}$ nicht miteinander vertauschen. Bell sieht keinen Grund, warum die Messergebnisse für $P(\phi_3)$ in beiden Fällen dieselben sein müssen:

> These different possibilities require different experimental arrangements; there is no *a priori* reason to believe that the results for $P(\phi_3)$ should be the same. The result of an observation may reasonably depend on the complete disposition of the apparatus.

Sollte dies tatsächlich der einzige Angriffspunkt gegen das Theorem von Gleason sein, so muss eine Theorie verborgener Variabler auch die Messanordnungen bzw. die Verhältnisse bei einer gleichzeitigen Messung verschiedener kommutierender Observable mit einbeziehen. Es macht eigentlich gar keinen Sinn mehr, von $\langle P(\phi)\rangle$ zu sprechen, da dieser Erwartungswert davon abhängt, welche anderen (mit $P(\phi)$ kommutierenden) Observable gleichzeitig gemessen werden.

Die Bellsche Kritik am Gleason'schen Theorem wirft viele weitere Fragen auf. Was ist, beispielsweise, wenn man die drei Observable $P(\phi_1), P(\phi_2), P(\phi_3)$ nicht gleichzeitig an einem System, sondern getrennt in einem Ensemble zu einem gegebenen streuungsfreien Zustand misst? Jetzt kann $\langle P(\phi_3)\rangle$ kaum davon abhängen, was die anderen gemessenen Observablen sind. Bedeutet dies, dass in einer entsprechenden Theorie mit verborgenen Variablen solche Ensembles *per definitionem* nie realisierbar sind?

Und was ist, wenn man die Messungen zwar an einem System ausführt, aber nicht gleichzeitig? Wenn man mit $P(\phi_3)$ beginnt, kann man sich immer noch entscheiden, welche anderen Operatoren man misst. Bedeutet dies, dass die dispersionsfreien Zustände eine beliebig rasche Zeitabhängigkeit haben, so dass wiederholte Messungen an einem Zustand nicht möglich sind? Doch was würde in diesen Fällen das Symbol $\langle\rangle$ bzw. der Ausdruck „Erwartungswertfunktional“ überhaupt bedeuten?

9.5 Die Bohmsche Interpretation der Quantenmechanik

Eines der bekanntesten Modelle und sicherlich das am weitesten ausgearbeitete Modell einer Interpretation der Quantenmechanik mit Hilfe verborgener Variabler stammt von David Bohm [12] aus dem Jahre 1952. Ähnliche Ideen wurden schon 1926 von Louis de Broglie [22] (siehe auch [23], Chap. IV) und von E. Madelung [57] geäußert. Nach Bemerkungen von Pauli auf der Solvay Konferenz 1927 [66] wurden diese Ideen aber nicht weiter entwickelt. Als Bezeichnung dieser Modelle findet man manchmal auch „Führungsfeldtheorie“ oder „Doppellösunginterpretation“.

9.5.1 Die allgemeine Idee

Die grundlegende Idee von Bohm besteht darin, das Schrödinger-Feld *und* das zugehörige Teilchen als zwei verschiedene, real existierende Objekte anzusehen. Das Feld genügt der Schrödinger-Gleichung. Das Teilchen genügt einer Dynamik, die es an das Feld bindet und durch die seine mittlere Aufenthaltswahrscheinlichkeit an einem Punkt x proportional zu $|\Psi(x)|^2$ ist. Da sich Ort und Impuls des Teilchens selber nicht bestimmen lassen - dies ist für Bohm kein Postulat, sondern er sieht diese Einschränkung nur durch die gegenwärtigen Observablen gegeben -, muss mit einem Ensemble von Teilchen gerechnet werden, deren Verteilung ebenfalls durch $|\Psi(x)|^2$ gegeben ist. Dieser statistische Aspekt der Bohmschen Theorie ist allerdings nur Ausdruck unserer Unkenntnis der Anfangsbedingungen (und damit der Bewegung) der einzelnen Teilchen. Auf die Verallgemeinerung dieser Überlegungen zu Mehrteilchensystemen werden wir noch eingehen.

Dieses Modell beschreibt insbesondere Situationen von Einteilchensystemen ausgezeichnet. Betrachten wir als Beispiel das Doppelspaltexperiment. Von der Quelle wird sowohl die Schrödinger-Welle als auch das Elektron emittiert. Die Schrödinger-Welle breitet sich nach der Schrödinger-Gleichung aus, d.h. es kommt hinter den beiden Spalten zu einer Superposition der beiden Anteile dieser Welle und zu den bekannten Interferenzmustern einer Welle. Da die Dynamik des Teilchens in dieser Welle gerade so ist, dass seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit proportional zu $|\Psi(x)|^2$ ist, und da die Anfangsbedingungen verschiedener Teilchen nicht genau bekannt sind und über diese gemittelt werden muss, treffen die unterschiedlichen Teilchen genau dem Interferenzmuster der Welle entsprechend auf der photongraphischen Platte auf.

Die Schrödinger-Welle bestimmt somit die Ausbreitung des Teilchens und seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit an bestimmten Orten. Trifft das Teilchen auf die photographische Platte, so wechselwirkt es unmittelbar mit den dortigen Atomen und bewirkt so die punktförmige Schwärzung.

Bohm untersucht noch weitere quantenmechanische Prozesse, beispielsweise Streuprozesse oder das Frank-Hertz Experiment. In Teil II beschreibt Bohm die Wechselwirkung von Elektronen mit Strahlung, so dass auch der Compton-Effekt und der photoelektrische Effekt in seiner Theorie beschrieben werden können. Diese Effekte gelten gemeinhin als die „Beweise“ für die Richtigkeit der Quantentheorie in ihrer herkömmlichen Formulierung.

Bohm diskutiert in seiner Arbeit auch den Messprozess und das Verhalten der Schrödinger-Welle sehr ausführlich. Er betont insbesondere den Einfluss der verborgenen Variablen des Messinstrumentes auf das Ergebnis. Darin liegt für ihn die Ursache, warum sein Modell nicht unter die Einschränkungen des von Neumannschen Beweises fällt (und auch nicht unter das Gleasonsche Theorem). Er schreibt (S. 187):

> Von Neumann shows that it would be inconsistent with the usual rules of calculating quantum-mechanical probabilities to assume that there were in the observed system a set of hidden parameters which simultaneously determined the results of measurements of position and momentum “observables”. With this conclusion, we are in agreement. However, in our suggested new interpretation of the theory, the so-called “observables” are ... not properties belonging to the observed system alone, but instead potentialities whose precise development depends just as much on the observing apparatus as on the

observed system. In fact, when we measure the momentum "observable", the final result is determined by hidden parameters in the momentum-measuring device as well as by hidden parameters in the observed electron. Similarly, when we measure the position "observable", the final result is determined in part by hidden parameters in the position-measuring device. Thus, the statistical distribution of "hidden" parameters to be used in calculating averages in a momentum measurement is different from the distribution to be used in calculating averages in a position measurement. Von Neumann's proof ... that no single distribution of hidden parameters could be consistent with the results of the quantum theory is therefore irrelevant here, since in our interpretation of measurements of the type that can now be carried out, the distribution of hidden parameters varies in accordance with the different mutually exclusive experimental arrangements of matter that must be used in making different kinds of measurements.

Die zu engen Annahmen von Neumanns in seinem Beweis (vgl. Abschnitt 9.2) erkennt Bohm nicht.

Wir werden im Folgenden nur die wesentlichen Aspekte der Bohmschen Theorie behandeln sowie einige Kritikpunkte aufzählen. Die Arbeit von Bohm ist wesentlich ausführlicher und die Rechnungen detaillierter.

9.5.2 Das Quantenpotential

Zunächst leitet Bohm eine Newtonsche Bewegungsgleichung für das Teilchen her. In diesem Punkt wollen wir ihm folgen, die weiteren Überlegungen Bohms sind dann sehr technisch und aufwendig. Bohm beginnt seine Überlegungen mit der nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V(x)\Psi \; .$$

Die Darstellung der Wellenfunktion

$$\Psi = R(x)\,\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S(x)\right) \tag{9.7}$$

mit reellen R und S führt auf die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(R\Delta S + 2\nabla R\cdot\nabla S)\;, \tag{9.8}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R}\right]\;. \tag{9.9}$$

Dieser Ansatz ist aus der WKB-Näherung für die Wellenfunktion bekannt. Statt R können wir auch das Absolutquadrat der Wellenfunktion einführen, $P(x) = R(x)^2$, und erhalten die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot\left(P\frac{\nabla S}{m}\right) = 0\;, \tag{9.10}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(x) - \frac{\hbar^2}{4m}\left[\frac{\Delta P}{P} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right] = 0\;. \tag{9.11}$$

Im Grenzfall[1] $\hbar \to 0$ haben die beiden Gleichungen (9.10) und (9.9) bzw. (9.11) eine einfache physikalische Interpretation: Die Differentialgleichung für S entspricht einer Hamilton-Jacobi-Gleichung mit Potential $V(x)$. Aus der klassischen Mechanik ist dann Folgendes bekannt: Jede Lösung der Newtonschen Bewegungsgleichungen, die an einem Punkt senkrecht auf einer Fläche mit $S = \text{const.}$ zu einer Lösung S dieser Gleichung ist, ist überall normal zu Flächen mit konstantem S. Außerdem ist $v(x) = \nabla S(x)/m$ die Geschwindigkeit des Teilchens an diesem Punkt x.

Die Differentialgleichung für P hat nach dem oben Gesagten die Form:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (Pv) \;=\; 0\,.$$

Diese Gleichung ist eine Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte (bwz. Ensembledichte) P und den „Wahrscheinlichkeitsstrom“ (bzw. Teilchenstrom im Ensemble) Pv.

Bohm stellt nun fest, dass diese Interpretation der Gleichungen (9.11) und (9.10) auch für $\hbar \neq 0$ aufrecht erhalten werden kann. Gleichung (9.11) ist immer noch eine Hamilton-Jacobi-Gleichung, allerdings kommt zu dem klassischen Potential $V(x)$ noch ein sogenanntes Quantenpotenzial,

$$U(x) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2m}\,.\frac{\Delta R}{R} \;=\; \left[\frac{\Delta P}{P} - \frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right]$$

hinzu. Ist $v(x) = \nabla S(x)/m$ immer noch die Geschwindigkeit des Teilchens, so ist Gleichung (9.10) nach wie vor eine Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte P.

Bevor wir mit der Bohmschen Interpretation fortfahren, soll kurz an zwei Hauptanwendungen der Hamilton-Jacobi-Gleichungen erinnert werden. Einerseits tritt diese Gleichung in der Optik auf. Ähnlich wie die Schrödigner-Gleichung in Bohms Diskussion ist in der Optik der Ausgangspunkt eine Wellengleichung. Ein Ansatz für die Lösung der Form $\varphi(x,t) = A(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Phi(x,t)}$ führt auf Differentialgleichungen für die Amplitude A und die Phase Φ. Im Grenzfall $k \to \infty$ (oder $\lambda \to 0$) erfüllt die Phase Φ eine Hamilton-Jacobi-Gleichung. Dieser Grenzfall entspricht dem Übergang zur geometrischen Optik, d.h., die Strahlen der geometrischen Optik sind senkrecht zu den Lösungsflächen $\Phi = \text{const}$.

Diese Darstellung entspricht der herkömmtlichen Interpretation des klassischen Limes in der Quantenmechanik: Ausgangspunkt ist die Schrödinger-Gleichung und die einzige physikalisch relevante Größe ist das Schrödinger-Feld Ψ. Der klassische Limes $\hbar \to 0$ entspricht dem Übergang zur geometrischen Optik. Die Wellenfunktion ist in diesem Grenzfall praktisch entlang einer klassischen Trajektorie lokalisiert. In dieser Interpretation gibt es nur die Welle als Lösung einer Wellengleichung. Die klassischen Trajektorien (bzw. die Strahlen der geometrischen Optik) entsprechen nur scheinbar den Trajektorien eines Teilchens.

Die andere Bedeutung der Hamilton-Jacobi-Gleichung kommt aus der klassischen Mechanik. Hier ist der Ausgangpunkt eine Newtonsche Bewegungsgleichung für die Trajektorie eines punktförmigen Teilchens. Äquivalent zu der Bewegungsgleichung ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung für S. Hierbei handelt es sich im wesentlichen um ein Hilfsmittel zur Lösung der

[1] Setzt man in den Gleichungen $\hbar = 0$, so entspricht das nur formal diesem Grenzfall. Es muss noch gezeigt werden, dass die Terme, die von $\hbar^2$ multipliziert werden, nicht von der Ordnung $1/\hbar^2$ sind. Dies ist beispielsweise bei stationären Lösungen der Schrödinger-Gleichung der Fall.

Newtonschen Gleichung. Diese Interpretation schwebt Bohm vor. Schließlich haben wir - nach seiner Meinung - im klassischen Grenzfall keine entlang einer Linie lokalisierte Welle (wie in der geometrischen Optik), sondern ein punktförmiges Teilchen.

Für Bohm existieren in der Quantenmechanik punktförmige Teilchen mit wohldefiniertem Ort und Impuls. Diese Teilchen genügen einer Bewegungsgleichung, zu der (9.9) bzw. (9.11) die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist. Diese Newtonschen Bewegungsgleichung enthält das Quantenpotential und ist offensichtlich:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\nabla\left(V(x) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R}\right) .$$

Der wesentliche Unterschied zu einer herkömmlichen Newtonschen Bewegungsgleichung besteht darin, dass das Quantenpotential von R abhängt, d.h. dem Absolutbetrag eines Feldes, dessen Phase der Hamilton-Jacobi-Gleichung zu obiger Bewegungsgleichung entspricht. Aus diesem Grund muss dem Schrödinger-Feld Ψ eine objektive Realität zukommen.

Bohm vergleicht das Schrödinger-Feld Ψ mit dem elektromagnetischen Feld oder dem Gravitationsfeld. Das Teilchen bewegt sich in dem Feld und das Feld übt auf das Teilchen eine Kraft aus. Aus diesem Grund müssen nun auch die Anfangsbedingungen zwischen Feld und Teilchen aufeinander abgestimmt werden. Dies geschieht im vorliegenden Fall durch die Forderung $v(x) = \nabla S(x)/m$. Ist diese Bedingung als Anfangsbedingung erfüllt, so folgt aus der Theorie der Hamilton-Jacobi-Gleichungen, dass sie für alle Zeiten erfüllt bleibt.

Noch eine zweite Anfangsbedingung ist allerdings zu stellen. Das Absolutquadrat P des Schrödinger-Feldes entspricht der Ensembledichte der Teilchen. Für jedes einzelne System sollte die Anfangsbedingung eines Teilchens somit entsprechend $P(x)$ verteilt sein. Die Unitarität der Schrödinger-Gleichung garantiert die Erhaltung dieser Wahrscheinlichkeit bzw. die Hamilton-Jacobi-Gleichung garantiert, dass die Ensembleverteilung unter der Zeitentwicklung des Systems weiterhin durch $P(x)$ gegeben ist.

Die Gleichung (9.10) drückt als Kontinuitätsgleichung die Erhaltung der Teilchenzahl aus. Lokal kann sich die Teilchenzahl nur dadurch ändern, dass Teilchen aus dem Gebiet abfliessen bzw. hinzukommen. Dies ist eine natürliche Forderung. In der Quantenmechanik entspricht P einer Wahrscheinlichkeit. In diesem Fall ist die Forderung einer Kontinuitätsgleichung weniger selbstverständlich. Es gibt keinen Grund, warum Wahrscheinlichkeit aus einem Gebiet „abfließen“ muss, wenn sich die Wahrscheinlichkeit ändert. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist zwar erhalten, aber eine Verringerung in einem Raumgebiet kann durch eine Erhöhung in einem anderen Raumgebiet kompensiert werden, ohne dass ein „Fluss“ stattfindet.

Bohm kommt zu der folgenden Schlussfolgerung:

Die hier vorgeschlagene neue Deutung der Quantentheorie führt also auf einen viel breiteren begrifflichen Rahmen als die übliche Deutung, da alle Ergebnisse der üblichen Interpretation daraus mit Hilfe der folgenden drei wechselseitig konsistenten Annahmen erhalten werden können:

1. Das Ψ-Feld erfüllt die Schrödinger-Gleichung.
2. Der Teilchenimpuls beträgt $p = \nabla S(x)$.

3. Wir können die exakte Lage des Teilchens nicht vorhersagen oder kontrollieren, sondern arbeiten in der Praxis mit einem statistischen Ensemble mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x) = |\Psi(x)|^2$. Die Verwendung der Statistik ist jedoch nicht eine inhärente Eigenschaft der begrifflichen Struktur der Theorie, sondern lediglich eine Konsequenz unserer Unwissenheit über die exakte Anfangslage des Teilchens.

Wir wollen es an dieser Stelle bei den obigen Erörterungen belassen. Die Theorie von Bohm wird heute nicht mehr als ernsthafte Erklärung der Quantenmechanik angesehen, sondern eher als ein Modell dafür, dass eine solche „klassische“ Erklärung möglich ist.

Es soll an dieser Stelle jedoch an einige Parallelen der Bohm'schen Theorie zur allgemeinen Relativitätstheorie erinnert werden. Dort wird (bzw. wurde) das metrische Feld $g(x)$ ebenfalls als „Führungsfeld“ bezeichnet. Ebenso wie in der Bohm'schen Theorie der Quantenmechanik gibt es auch in der allgemeinen Relativitätstheorie zwei Entitäten: ein Feld (das metrische Feld $g(x)$) und die Teilchen (sofern man sie nicht durch Materiefelder beschreibt), die sich in dem Feld bewegen. Das Feld genügt einer Feldgleichung (der Einstein'schen Gleichung), und die Bewegungsgleichung für die Bahnkurven der Teilchen enthalten dieses Feld, d.h., die Bewegung der Teilchen hängt von dem „Führungsfeld“ ab.

9.5.3 Kritikpunkte

Im Folgenden sollen kurz einige Kritikpunkte an der Bohmschen Theorie zusammengefasst werden.

Mehrteilchensysteme

Als eine der wesentlichen Schwächen der Bohmschen Theorie wird ihre Behandlung von Mehrteilchensystemen angesehen. Das Schrödinger-Feld von n Teilchen ist eine Funktion von $3n+1$ Variablen, $\Psi(x_1, ..., x_n, t)$. Diese Feld „lebt“ also nicht mehr über unserem dreidimensionalen Anschauungsraum, sondern über dem Konfigurationsraum der Teilchen. In diesem Sinne unterscheidet es sich wesentlich von dem elektromagnetischen Feld oder dem Gravitationsfeld.

Andererseits ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung für ein System von n Teilchen auch eine Differentialgleichung für eine Funktion $S(x_1, ..., x_n, t)$ von $3n + 1$ Variablen. Ein beliebiges Kraftfeld für ein n-Teilchensystem ist ebenfalls eine Funktion von allen Orten $F(x_1, ..., x_n)$. Erst die Tatsache, dass sich in der Elektrodynamik oder der Gravitationstheorie dieses Kraftfeld als Funktion eines „gewöhnlichen“ Feldes über dem dreidimensionalen Raum schreiben lässt, macht den Unterschied zum Schrödinger-Feld deutlich. Die Quantenmechanik entspricht eher einer „holistischen“ Theorie, bei der eine solche Zerlegung nicht möglich ist. Das Kraftfeld entspricht einer Vielkörperkraft, bei der die Position aller Teilchen eingeht.

Die Statistik der Teilchen

Bohm sagt am Ende des sechsten Kapitels:

> Wir sehen hier, dass das effektive Potential $U(x_1, ..., x_n)$, das auf jedes Teilchen wirkt, einer Vielkörperkraft entspricht, da die Kraft zwischen zwei beliebigen Teilchen wesentlich von der Lage jedes anderen Teilchens im Systems abhängen kann. Ein Beispiel für den Effekt einer derartigen Kraft ist das Ausschließungsprinzip. Ist nämlich die Wellenfunktion antisymmetrisch, folgern wir, dass die „quantenmechanischen" Kräfte zwei Teilchen daran hindern werden, jemals den gleichen Raumpunkt zu erreichen, da in diesem Fall $P = 0$ gelten muss.

Bohm erweckt hier den Eindruck, als ob die effektive Abstoßung zwischen Teilchen im Zusammenhang mit dem Ausschließungsprinzip bei Fermionen durch das Quantenpotential bewirkt wird. Dies ist aber nicht der Fall: Die Antisymmetrie der Wellenfunktion folgt nicht aus der Schrödinger-Gleichung, sondern muss zusätzlich gefordert werden.

Der Spin

Das Bohmsche Modell basiert auf einer Schrödinger-Gleichung für ein spinloses Teilchen. Es gibt zwar auch „klassische" Modelle für Spin-1/2-Teilchen, aber generell ist festzuhalten, dass das Phänomen „Spin" von der Bohmschen Theorie nicht erklärt wird.

Der Messprozess und der instantane Kollaps

Bohm diskutiert in Teil II seines Artikels den Messprozess sehr ausführlich und kommt zu dem Schluss, dass die verborgenen Parameter des Messgerätes eine wesentliche Rolle spielen. Dieser Teil der Arbeit ist sehr schwer lesbar und die physikalischen Vorstellungen sind sehr unnatürlich. Immerhin kann der Messprozess im Rahmen der Bohmschen Theorie beschrieben werden. Für Bohm ist die Einbeziehung der verborgenen Parameter des Messgerätes wichtig, da er so das von Neumannsche Theorem zu umgehen glaubt. Die Analyse von Bell hat jedoch ergeben, dass schon die allgemeinen Annahmen des von Neumannschen Beweises nicht erfüllt zu sein brauchen (vgl. Abschnitt 9.2) und in dem Bohmschen Modell auch nicht erfüllt sind.

Da die Bohmsche Theorie in allen Teilen mit den Vorhersagen der Quantenmechanik übereinstimmt, enthält sie auch die „spooky action at a distance", die wir im Zusammenhang mit den Gedankenexperimenten von EPR und von de Broglie angesprochen hatten. Während sich die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik in diesem Zusammenhang auf den subjektiven Charakter der Wellenfunktion und die „Vorraussetzungen der Vorhersagbarkeit zukünfiger Messungen" zurückziehen konnte, kann Bohm mit seiner realistischen Interpretation der Wellenfunktion dieses Problem nicht umgehen. Es kommt zu einem instantanen Kollaps der Wellenfunktion und damit zu einem Widerspruch mit der speziellen Relativitätstheorie. Dieser Widerspruch wird allerdings erst messbar, wenn die verborgenen Variablen bzw. das Schrödinger-Feld selber messbar werden. Die Überlegungen von Bell im Zusammenhang mit den Bellschen Ungleichungen zeigen darüberhinaus, dass dieser Widerspruch grundsätzlich ist und nicht mit den

speziellen Ansätzen des Bohmschen Modells zusammenhängt.

Die nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung

Der Ausgangspunkt für das Bohmsche Modell war die nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung. Viele seiner Überleungen hängen von der speziellen Form dieser Gleichung ab. So ist beispielsweise fraglich, ob sich seine Theorie auf die Dirac-Gleichung übertragen lässt.

Die Asymmetrie zwischen Ort und Impuls

Die Formulierung der herkömmlichen Quantenmechanik ist symmetrisch in den Orts- und Impulsvariablen. Grundsätzlich kann jede Darstellung (d.h. jeder Satz von kompatiblen Observablen) gewählt werden. Die Bohmsche Formulierung hängt jedoch wesentlich von der Ortsdarstellung ab. Während die Quantenmechanik ebenso von der Schrödinger-Gleichung im Impulsraum ausgehen kann, ist dies für die Bohmsche Interpretation nicht der Fall. Diese „Brechung der Symmetrie“ zwischen Ort und Impuls, die in der herkömmtlichen Interpretation der Quantenmechanik noch gegeben ist, wurde insbesondere von Heisenberg immer als Hauptkritikpunkt am Bohmschen Modell betont.

Kapitel 10

Der Messprozess

Im Rahmen der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik (vgl. 2.2) gab es zwei Regeln, nach denen sich ein quantenmechanisches System verändern kann:

1. Die Schrödinger-Gleichung beschreibt die Zeitentwicklung des Zustands eines abgeschlossenen quantenmechanischen Systems:

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi\rangle \;=\; H|\psi\rangle \;.$$

2. Hat die Messung der Observablen zu dem selbstadjungierten Operator A an einem quantenmechanischen System den Messwert λ geliefert, so befindet sich das System unmittelbar nach der Messung in dem zugehörigen Eigenzustand $|\lambda\rangle$.

Axiom 1 beschreibt somit die Zeitentwicklung eines abgeschlossenen quantenmechanischen Systems. Axiom 2 macht eine Aussage über die Veränderung eines Systems, das mit einem anderen System - dem Messinstrument - in Wechselwirkung getreten ist. Für die Kopenhagener Deutung ist dabei wesentlich, dass das andere System in der Sprache der klassischen Physik beschrieben wird. Die Theorie des Messprozesses beschäftigt sich mit der Frage, inwieweit sich Axiom 2 aus Axiom 1 herleiten lässt, wenn man das Messinstrument (oder andere Teile der Umgebung des quantenmechanischen Systems, wie beispielsweise den Beobachter) mit in die quantenmechanische Beschreibung einbezieht.

Ein wesentlicher Aspekt der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik ist somit die Aufspaltung der Welt (des Universums) in zwei (oder mehr) Teile: (1) das untersuchte System, das sogenannte Objektsystem, das den quantenmechanischen Gesetzen genügen soll, und (2) der Rest des Universums, der durch die klassische Physik beschrieben wird. Bei der Untersuchung des Messprozesses wird das Universum oft in drei Anteile aufgespalten: (1) das Objektsystem, (2) das Messinstrument bzw. ein Teil davon, welches mal klassisch und mal quantenmechanisch

beschrieben wird, und (3) der Rest des Universums, der immer klassisch beschrieben wird.

Objektsystem	– – –	Messinstrument	– – –	Umgebung
quantenmechanisch		QM/klassisch		klassisch

Diese Aufspaltung dient dem Nachweis, dass der sogenannte *Schnitt* zwischen der quantenmechanischen Welt und der klassischen Welt beliebig gewählt werden kann, vorausgesetzt er liegt irgendwo zwischen dem quantenmechanischen System einerseits und dem Bewusstsein des Beobachters andererseits.

Eine erste ausführliche Theorie des Messprozesses stammt von von Neumann [62]. Der Schwerpunkt seiner Untersuchung ist die Unabhängigkeit der quantenmechanischen Beschreibung für das untersuchte System von der Wahl des Schnittes zwischen den Teilen des Universums, die quantenmechanisch bzw. klassisch beschrieben werden. Bekannte Darstellungen des Messprozesses finden sich auch in den klassischen Texten zur Quantenmechanik, beispielsweise in Pauli [65] (Kap. 9), Landau&Lifschitz [56] (Kap. I,§7), oder Gottfried [41] (Kap. IV, 19,20). Insgesamt ist es jedoch erstaunlich, wie wenig Lehrücher auf diesen wichtigen Aspekt der Quantenmechanik ausführlicher eingehen.

Ein interessanter Beitrag zur Diskussion des Messprozesses stammt auch von van Kampen [53]. Die erwähnten Beschreibungen des Messprozesses wurden 1989 in einer bekannten Arbeit von Bell aufgegriffen, kritisiert und teilweise polemisiert [6]. Zu diesem Artikel von Bell wiederum gibt es einen Gegenartikel von Gottfried aus dem Jahre 1991, anlässlich einer Konferenz zum Gedenken von J. Bell [42], in dem er seinen Standpunkt nochmals bekräftigt. Die folgende Darstellung des Problems des Messprozesses macht von all diesen Arbeiten gebrauch.

Bevor wir uns jedoch der eigentlichen Theorie bzw. den Problemen des Messprozesses widmen, wollen wir zunächst kurz wiederholen, wie in der Quantenmechanik mehrere Systeme beschrieben werden, die in Kontakt stehen.

10.1 Zusammensetzung zweier Systeme

Wir beschränken uns im folgenden auf die Zusammensetzung zweier quantenmechanischer Systeme, da die Verallgemeinerung auf drei und mehr Systeme keine zusätzlichen Einsichten bringt.

Seien $\mathcal{H}^1$, $\{|s\rangle^1\}$ und A_i^1 der Hilbert-Raum, die Zustände und die Operatoren zu einem quantenmechanischen System 1 und entsprechend $\mathcal{H}^2$, $\{|\phi\rangle^2\}$ und A_i^2 der Hilbert-Raum, die Zustände und die Operatoren zu einem quantenmechanischen System 2. Wir definieren

$$\mathcal{H}^{\text{ges}} \;=\; \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2 \,.$$

Der Einfachheit halber definieren wir das Tensorprodukt zweier Hilbert-Räume dabei über das Tensorprodukt der Basen: Sei $\{|s_n\rangle^1\}$ eine Basis von $\mathcal{H}_1$ und $\{|\phi_m\rangle^2\}$ eine Basis von $\mathcal{H}_2$, dann definieren wir

$$\{|s_n, \phi_m\rangle \;=\; |s_n\rangle|\phi_m\rangle \;=\; |s_n\rangle^1 \otimes |\phi_m\rangle^2\}$$

als Basis von $\mathcal{H}^{\text{ges}}$. Das Tensorprodukt zweier Vektorräume lässt sich zwar auch basisunabhängig, beispielsweise über Funktoren definieren (für Details siehe z.B. [50], Band II, Abschn. 3.7, S. 125), doch der dazu notwendige Aufwand an Abstraktion und die damit verbundene Unhandlichkeit überwiegen leider den Nachteil, den eine konkrete Basiswahl immer hat. Wir wollen hier auch nicht beweisen, dass die so erhaltene Konstruktion des Tensorprodukt unabhängig von der konkreten Basiswahl ist.

Die Observablen an System 1 haben auf diesem Hilbert-Raum die Darstellung

$$A_i^1 \otimes \mathbf{1} \, ,$$

entsprechend ist die Darstellung der Observablen von System 2 auf diesem Raum durch

$$\mathbf{1} \otimes A_i^2$$

gegeben. Die Tensorproduktkonstruktion trägt somit der Bedingung Rechnung, dass zwei Observable zu verschiedenen Quantensystemen immer gleichzeitig messbar sind, d.h. die zugehörigen Operatoren kommutieren.

Wir sollten betonen, dass im unendlich dimensionalen Fall die Hilbert-Räume $\mathcal{H}^1$, $\mathcal{H}^2$ und $\mathcal{H}^{\text{ges}}$ *als Hilbert-Räume* isomorph sind. Die Tensorproduktstruktur macht daher in diesem Fall weniger eine Aussage über die Hilbert-Räume selber, als über die Darstellung der Operatoren der Einzelsysteme, d.h. die Zuordnung bestimmter Observabler mit bestimmten Operatoren.

Wir bezeichnen einen Zustand $|\Phi\rangle$ in $\mathcal{H}^{\text{ges}}$ als *separierbar*, wenn es einen Zustand $|s\rangle^1$ aus $\mathcal{H}^1$ und einen Zustand $|\phi\rangle^2$ aus $\mathcal{H}^2$ gibt, so dass

$$|\Phi\rangle \;=\; |s\rangle^1 \otimes |\phi\rangle^2 \, .$$

Seien $\mathcal{L}(\mathcal{H}^i)$ die Menge der linearen Operatoren auf den Hilbert-Räumen $\mathcal{H}^i$ $(i = 1, 2, \text{ges})$. Wir definieren nun eine Abbildung

$$\text{Sp}_1 \;:\; \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\text{ges}}) \;\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)$$

durch folgende Vorschrift: Seien $|s_i\rangle^1$ und $|\phi_i\rangle^2$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}^1$ und $\mathcal{H}^2$, dann gelte für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\text{ges}})$:

$$\langle \phi_n | \text{Sp}_1 A | \phi_m \rangle \;=\; \sum_k \langle s_k, \phi_n | A | \phi_m, s_k \rangle \, .$$

Entsprechend definieren wir auch eine Abbildung

$$\text{Sp}_2 \;:\; \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\text{ges}}) \;\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}^1)$$

durch die Vorschrift:

$$\langle s_k | \text{Sp}_2 A | s_l \rangle \;=\; \sum_n \langle s_k, \phi_n | A | \phi_n, s_l \rangle \, .$$

Wendet man diese Vorschrift speziell auf Dichtematrizen an, so spricht man auch von einer Verkürzung der Zustände.

Sei ρ eine Dichtematrix auf $\mathcal{H}^{\text{ges}}$ und

$$\rho_1 \;=\; \text{Sp}_2\rho \;,$$

dann gilt für Operatoren der Form $A \otimes \mathbf{1}$:

$$\text{Spur}(\rho(A \otimes \mathbf{1})) \;=\; \text{Spur}(A\rho_1) \;,$$

wobei auf der linken Seite der Gleichung die Spur über $\mathcal{H}^{\text{ges}}$ zu nehmen ist, auf der rechten Seite über $\mathcal{H}^1$. Entsprechend gilt mit

$$\rho_2 \;=\; \text{Sp}_1\rho$$

für alle linearen Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)$ die Beziehung

$$\text{Spur}(\rho(\mathbf{1} \otimes A)) \;=\; \text{Spur}(A\rho_2) \;,$$

wobei nun auf der rechten Seite die Spur in $\mathcal{H}^2$ zu nehmen ist. Umgekehrt lassen sich die Abbildungen Sp_i durch diese Eigenschaften basisinvariant definieren.

Messungen an System 1 geben somit nur Information über die verkürzte Dichtematrix $\rho_1 = \text{Sp}_2\rho$. Entsprechend liefern Messungen an System 2 nur Information über $\rho_2 = \text{Sp}_1\rho$. Daraus ergibt sich die interessante Fragestellung, inwieweit die Kenntnis der Einzelsystemen den Zustand des Gesamtsystems festlegen.

Theorem: Eine Dichtematrix ρ ist durch ihre Verkürzungen $\rho_1 = \text{Sp}_2\rho$ und $\rho_2 = \text{Sp}_1\rho$ dann und nur dann eindeutig gegeben, wenn $\rho_1 = P_s$ (bzw. $\rho_2 = P_\phi$) ein reiner Zustand ist. In diesem Fall ist $\rho = P_s \otimes \rho_2$ (bzw. $\rho = \rho_1 \otimes P_\phi$).

$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ ist offensichtlich immer eine Lösung des Problems, zu zwei Verkürzungen ρ_1 und ρ_2 eine Dichtematrix ρ auf $\mathcal{H}^{\text{ges}}$ zu finden. Das Problem ist jedoch zu entscheiden, wann diese Lösung die einzige ist.

Wir zeigen zunächst, dass es für gemischte Zustände ρ_1 und ρ_2 immer mehrere Lösungen gibt. Sei

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \alpha\omega_1 + (1-\alpha)\omega_2 \\ \rho_2 &= \beta\sigma_1 + (1-\beta)\sigma_2 \;. \end{aligned}$$

Dann hat jede Dichtematrix der Form

$$\rho \;=\; a_{11}\omega_1 \otimes \sigma_1 + a_{12}\omega_1 \otimes \sigma_2 + a_{21}\omega_2 \otimes \sigma_1 + a_{22}\omega_2 \otimes \sigma_2$$

die verlangte Eigenschaft, vorausgesetzt es gilt

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0 \\ \alpha &= a_{11} + a_{21} \;=\; 1 - a_{22} - a_{12} \\ \beta &= a_{21} + a_{22} \;=\; 1 - a_{11} - a_{21} \;. \end{aligned}$$

Dies liefert aber nur drei Gleichungen für vier Unbekannte, d.h., es gibt unendlich viele Lösungen. Nur die Bedingungen $\alpha = 0$ oder 1 oder $\beta = 0$ oder 1 verlangen wegen der Positivität

der Koeffizienten, dass zwei der Koeffizienten verschwinden, so dass zwei Gleichungen für zwei Unbekannte übrigbleiben. Nur in diesem Fall ist die Lösung eindeutig.

Wir zeigen nun, dass $\rho_1 = P_s$ eine hinreichtende Bedingung ist, so dass $\rho = P_s \otimes \rho_2$ eindeutig festliegt. Der Beweis für $\rho_2 = P_\phi$ ist entsprechend.

Wir definieren eine Basis $\{s_i\}$ von $\mathcal{H}^1$ mit der zusätzlichen Forderung $s_1 = s$, also dem Vektor zu dem Zustand P_s. Außerdem sei $\{\phi_\alpha\}$ eine Basis von $\mathcal{H}^2$. Zur Vereinfachung der Notation definieren wir noch

$$\langle s_i, \phi_\alpha|\rho|\phi_\beta, s_j\rangle \;=\; \langle i, \alpha|\rho|\beta, j\rangle \;.$$

Wir zeigen, dass diese Matrixelemente eindeutig bestimmt sind, wenn $\rho_1 = P_{s_1}$. Offensichtlich gilt

$$\sum_\alpha \langle i, \alpha|\rho|\alpha, i\rangle \;=\; \langle i|\rho_1|i\rangle \;=\; \delta_{1\,i} \;.$$

Insbesondere verschwindet die Summe für $i \neq 1$. Da wegen der positiven Definitheit von ρ die Diagonaltherme aber nicht negativ sein dürfen, folgt:

$$\langle i, \alpha|\rho|\alpha, i\rangle \;=\; 0 \qquad (i \neq 1) \;.$$

Nun gilt für positiv definite, selbstadjungierte Operatoren R die Schwarzsche Ungleichung

$$|(g, Rf)| \;\leq\; \sqrt{(f, Rf)(g, Rg)}$$

(vgl. von Neumann [62], II.5, Satz 19, S. 53) und somit folgt aus $(f, Rf) = 0$ auch $Rf = 0$. Das bedeutet

$$\langle j, \beta|\rho|\alpha, i\rangle \;=\; 0 \qquad (i \neq 1) \;.$$

j, α und β sind dabei beliebig. Da ρ selbstadjungiert ist gilt diese Bedingung auch für $j \neq 1$ und i beliebig.

Wir kennen somit alle Matrixelemente von ρ außer $\langle 1, \alpha|\rho|\beta, 1\rangle$. Da aber $\langle i, \alpha|\rho|\beta, i\rangle = 0$ für $i \neq 1$ folgt

$$\langle 1, \alpha|\rho|\beta, 1\rangle \;=\; \sum_i \langle i, \alpha|\rho|\beta, i\rangle \;=\; \langle \alpha|\rho_2|\beta\rangle \;.$$

Es liegen somit sämtliche Matrixelemente von ρ fest, was zu zeigen war.

Also Korollar erhalten wir aus diesem Theorem: Sei $\rho = P_\Phi$ die Dichtematrix eines reinen Zustandes zu einem Vektor Φ. Die Verkürzungen ρ_1 und ρ_2 sind dann und nur dann reine Zustände, d.h. $\rho_1 = P_s$ und $\rho_2 = P_\phi$, wenn Φ separierbar ist.

$\Phi = s \otimes \phi$ separierbar ist gleichbedeutend mit der Eigenschaft $\rho_\Phi = P_s \otimes P_\phi$. In diesem Fall sind die Verkürzungen natürlich reine Zustände. Umgekehrt folgt aus obigem Theorem, dass für $\rho_1 = P_s$ und $\rho_2 = P_\phi$ auch gilt $\rho_\Phi = P_s \otimes P_\phi$. $\Phi = s \otimes \phi$ ist also separierbar.

Ein Beispiel für diesen Sachverhalt liefert uns wieder das EPR-Paradoxon in der Bohmschen Version. Der reine Zustand des Gesamtsystems war

$$|\Phi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|s_3 = 1\rangle_1|s_3 = -1\rangle_2 - |s_3 = -1\rangle_1|s_3 = 1\rangle_2\right) \;.$$

Die Verkürzungen zu diesem Zustand sind:

$$\rho_1 \;=\; \rho_2 \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Durch Messungen an einem der beiden Elektronen gewinnen wir den Eindruck, dass es sich um ein Gemisch handelt, in dem alle Spinrichtungen gleichermaßen vertreten sind. Erst der Vergleich der Daten an beiden Systemen zeigt die Quantenkorrelationen.

von Neumann untersucht die Verkürzungen von reinen Zuständen genauer ([62] VI.2, S. 229–232). Die Ergebnisse können wir in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz: Sei Φ ein Vektor und $\rho = P_\Phi$ der reine Zustand zu diesem Vektor. ρ_1 und ρ_2 seien die Verkürzungen dieses Zustandes. Dann gilt:

1. ρ_1 und ρ_2 haben die selben Eigenwerte (einschließlich der Entartungsgrade für nichtverschwindende Eigenwerte).

2. Seien s_k bzw. ϕ_k die Eigenvektoren von ρ_1 bzw. ρ_2 zu den Eigenwerten $w_k \neq 0$ ($k = 1, \ldots, M$), dann ist
$$\Phi \;=\; \sum_{k=1}^{M} \sqrt{w_k} |s_k, \phi_k\rangle \; .$$

3. Seien A und B Operatoren, die $\{s_k\}$ bzw. $\{\phi_k\}$ als Eigenzustände zu untereinander verschiedenen Eigenwerten haben, dann legt die Messung von A an System 1 den Messwert von B an System 2 fest und umgekehrt.

Wir wollen den Beweis dieses Satzes hier nur skizzieren. Ein Zustand $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$ definiert zwei Abbildungen, $F : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^2$ und $F^+ : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^1$: Sei $|s_i, \phi_j\rangle$ eine Basis von $\mathcal{H}^{\text{ges}}$, so lässt sich $|\Phi\rangle$ entwickeln:

$$|\Phi\rangle \;=\; \sum_{ij} f_{ij} \; |s_i, \phi_j\rangle \; .$$

Die Abbildungen F bzw. F^+ sind dann folgendermaßen definiert:

$$F|s\rangle \;=\; \sum_{ij} f_{ij} \; \langle s|s_i\rangle \; |\phi_j\rangle \tag{10.1}$$

$$F^+|\phi\rangle \;=\; \sum_{ij} f_{ij} \; \langle \phi|\phi_i\rangle \; |s_j\rangle \; . \tag{10.2}$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass F^+ die zu F adjungierte Abbildung ist. Außerdem folgt sofort:

$$FF^+ \;=\; \text{Spur}_1 P_\Phi \;=\; \rho_2 \; , \quad \text{und} \quad F^+F \;=\; \text{Spur}_2 P_\Phi \;=\; \rho_1 \; ,$$

d.h. FF^+ und F^+F sind die jeweiligen Verkürzungen des Projektionsoperators zum Zustand Φ.

Aus dieser Darstellung von ρ_1 und ρ_2 lässt sich leicht herleiten, dass beide Dichtematrizen dieselben Eigenwerte haben und dass bezüglich der durch die Eigenvektoren ausgezeichneten Basis Φ obige Gestalt hat. Es gilt

$$\rho_\Phi \;=\; |\Phi\rangle\langle\Phi| \;=\; \sum_{k,l} \sqrt{w_k w_l}|s_k,\phi_k\rangle\langle\phi_l,s_l| \;.$$

Die Verkürzungen sind gerade:

$$\rho_1 \;=\; \sum_k w_k|s_k\rangle\langle s_k| \;,\quad \rho_2 \;=\; \sum_k w_k|\phi_k\rangle\langle\phi_k| \;.$$

Aus physikalischer Sicht ist Punkt 1 sehr einleuchtend: Wenn Φ kein separierbarer Zustand ist, bestehen „Quantenkorrelationen“ zwischen System 1 und System 2. Diese Korrelationen können durch alleinige Messungen an einem der beiden Systeme nicht erkannt werden, daher sind die Verkürzungen keine reinen Zustände sondern gemischte. Die Gleichheit der Eigenwerte der verkürzten Dichtematrizen drückt dabei die Symmetrie der Unkenntnis dieser Korrelationen aus.

Punkt 3 macht die Form der Quantenkorrelationen explizit: Messungen A bzw. B an System 1 bzw. System 2 vertauschen zwar, können sich aber gegenseitig beeinflussen. Je nachdem, welchen Messwert eine Messung von A an System 1 erbracht hat, liegt der Messwert von B an System 2 fest. Trotzdem kann durch solche Messungen nicht festgestellt werden, ob an dem jeweils anderen System eine Messung vorgenommen wurde oder nicht. Dieser seltsame Form der Korrelationen sind wir im Zusammenhang mit dem Paradoxon von Einstein, Podolsky und Rosen (Kap. 6.6.1) schon begegnet. von Neumann hat die Physik des EPR-Experiments bereits beschrieben und auf die Quantenkorrelationen aufmerksam gemacht, aber er hat die physikalischen Implikationen, wie sie gerade für Einstein so wesentlich waren, nicht gesehen, oder zumindest als nicht erwähnenswert empfunden.

10.2 Zerlegung des Messprozesses

Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst den Messprozess im Überblick betrachten, um dann in den folgenden Abschnitten auf Einzelheiten eingehen zu können. Insbesondere soll untersucht werden, inwieweit sich der Messprozess aus der Quantenmechanik heraus verstehen lässt und welche Probleme dabei auftreten.

Die Axiome 5 und 6 der Kopenhagener Deutung (vgl. Abschnitt 2.2) gaben zwei Formen der zeitlichen Entwicklung eines Quantensystems an. Axiom 5 besagte, dass ein Zustandsvektor sich nach der Schrödinger-Gleichung entwickelt, bzw. allgemeiner eine Dichtematrix nach der Form

$$\rho(t) \;=\; \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H\right)\rho(0)\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}H\right) \;. \tag{10.3}$$

(Für zeitabhängige Hamilton-Operatoren gilt eine ähnliche Beziehung, allerdings sind die Exponentialfunktionen durch sogenannte zeitgeordnete Produkte zu ersetzen.) Das entspricht einer

unitären, deterministischen Zeitentwicklung. Axiom 6 besagte, dass bei einem Messprozess, d.h. der Wechselwirkung des Quantensystems mit einem klassischen System, das System im Zustand P_s zunächst in ein Gemisch der Form

$$\rho' \;=\; \sum_n |\langle s|s_n\rangle|^2 P_{s_n} \tag{10.4}$$

übergeht, d.h. nach der Messung befindet sich das System mit der Wahrscheinlichkeit $|\langle s|s_n\rangle|^2$ in einem Eigenzustand s_n zu dem Messoperator. Allgemeiner geht ein Gemisch ρ in das Gemisch

$$\rho' \;=\; \sum_n \langle s_n|\rho|s_n\rangle P_{s_n}$$

über. Wird als Messwert der Eigenwert λ_n registriert, befindet sich das System schließlich in dem Zustand P_{s_n}.

Axiom 6 kann sich nicht einfach aus Axiom 5 herleiten lassen, da die ungestörte zeitliche Entwicklung unitär ist. Ein reiner Zustand bleibt also ein reiner Zustand. Dies erkennt man unmittelbar aus Gl. 10.3, wonach aus

$$\rho(0)^2 \;=\; \rho(0)$$

auch

$$\rho(t)^2 \;=\; \rho(t)$$

folgt.

Eine naheliegende - scheinbare - Erklärung wird von von Neumann diskutiert ([62], VI.3, S. 233): Vor der Messung befindet sich das Gesamtsystem (Quantensystem+Beobachter) in einem gemischten Zustand: Das Quantensystem ist in einem reinen Zustand P_s, der Beobachter ist in einem gemischten Zustand ρ_{B}. Damit ist das Gesamtsystem (nach dem Theorem des letzten Abschnitts) in dem Zustand $\rho = P_s \otimes \rho_{\mathrm{B}}$. Könnte nicht - so lautet die Erklärung - im Verlauf der Wechselwirkung das Quantensystem von dem Beobachtersystem „angesteckt“ worden sein und dabei der reine Zustand zu einem gemischten Zustand geworden sein?

von Neumann zeigt, dass diese Überlegung als Erklärung nicht in Frage kommt. Sein Argument basiert im wesentlichen darauf, dass die Eigenwerte von ρ durch die Eigenwerte von ρ_{B} gegeben sind. Diese Eigenwerte bleiben bei einer unitären zeitlichen Entwicklung erhalten, sind also auch die Eigenwerte von ρ'. Andererseits hängen diese Eigenwerte nicht von dem Zustand $|s\rangle$ ab. Genau hierin liegt der Widerspruch: Die Quantenmechanik verlangt, dass die Gewichte in ρ' (Gleichung 10.4) für die Zustände $|s_n\rangle$ durch $w_n = |\langle s|s_n\rangle|^2$ gegeben sind, also von $|s\rangle$ abhängen. Somit kann ρ' aus Gl. 10.4 nicht durch eine unitäre zeitliche Entwicklung aus ρ entstehen.

Wir betrachten nun die beiden Systeme 1 (das zu untersuchende quantenmechanische System) und das System 2 (das Messgerät). Vor der Messung seien beide Systeme in einem reinen, separablen Zustand $|\Phi_0\rangle = |s\rangle|\phi_0\rangle$, das Quantensystem in dem Zustand $|s\rangle$ und das Messgerät in dem Zustand $|\phi_0\rangle$. Wir zerlegen nun den Messprozess in mehrere Teilschritte, die wir dann später eingehender untersuchen:

1.

$$|\Phi_0\rangle \;=\; |s_n, \phi_0\rangle \;\longrightarrow\; |s_n, \phi_n\rangle \;,$$

bzw. allgemeiner:

$$|\Phi_0\rangle \;=\; |s, \phi_0\rangle \;\longrightarrow\; |\Phi_1\rangle \;=\; \sum_n \langle s_n|s\rangle \, |s_n, \phi_n\rangle \tag{10.5}$$

$$\simeq\; \rho \;=\; \sum_{n,m} c_n c_m^* \, |s_n, \phi_n\rangle\langle\phi_m, s_m| \qquad c_n \;:=\; \langle s|s_n\rangle \;. \tag{10.6}$$

Schritt 1 (10.5) beschreibt den Übergang von dem separierbaren Anfangszustand $|s\rangle|\phi_0\rangle$ in den Zustand, in dem das Quantensystem und das Messgerät in korrelierten Zuständen sind: Das Quantensystem im Zustand $|s_n\rangle$ und das Messgerät in dem Zustand $|\phi_n\rangle$, der der Zeigerstellung zu dem Quantenzustand $|s_n\rangle$ entspricht. Diesen korrelierten Zustand kann man natürlich auch durch eine Dichtematrix ρ ausdrücken.

Beide Zustände sind reine Zustände und sollten sich somit durch eine unitäre quantenmechanische Zeitentwicklung beschreiben lassen. Das Problem an dieser Stelle wird sein, einen geeigneten Hamilton-Operator zu finden, der den oben angegebenen Übergang beschreibt. Es handelt sich also darum, die geeignete „Wechselwirkung des Messprozesses“ zu finden.

2.

$$\rho \;\simeq\; \hat{\rho} \;=\; \sum_n |\langle s_n|s\rangle|^2 \, |s_n, \phi_n\rangle\langle\phi_n, s_n| \;. \tag{10.7}$$

Schritt 2 enthält eigentlich drei verschiedene Probleme. Zum einen handelt es sich hier um einen Übergang von einem reinen Zustand

$$|\Phi_1\rangle \;=\; \sum_n c_n \, |s_n, \phi_n\rangle$$

mit zugehöriger Dichtematrix

$$\rho \;=\; \sum_{m,n} c_n c_m^* \, |s_n, \phi_n\rangle\langle\phi_m, s_m|$$

in einen gemischten Zustand mit Dichtematrix

$$\hat{\rho} \;=\; \sum_n |c_n|^2 \, |s_n, \phi_n\rangle\langle\phi_n, s_n| \;=\; \sum_n |c_n|^2 P_{\phi_n} \otimes P_{\varphi_n} \;.$$

Mathematisch besteht dieser Übergang im wesentlichen darin, die Nicht-Diagonalterme in der Dichtematrix des reinen Zustandes wegzulassen. Wir müssen somit begründen, warum diese Terme tatsächlich weggelassen werden können, bzw. welche Annahmen oder Nähungen in diesen Schritt eingehen. Eine unitäre Zeitentwicklung kann diesen Übergang „vom reinen Zustand zum Gemisch“ natürlich nicht beschreiben.

Ein zweites Problem in Schritt 2 bezieht sich auf die Basis, bezüglich der die Nicht-Diagonalterme in der Dichtematrix weggelassen werden. Die Entwicklung des Zustands

$|\Phi_1\rangle$ nach Eigenfunktionen zur Zeigenstellung des Messgerätes $|\phi_n\rangle$ scheint zwar naheliegend, trotzdem handelt es sich um eine quantenmechanische Superposition, und wir können den Zustand ebensogut nach jeder anderen Basis entwickeln. Was zeichnet die „Zeigerstellungsbasis“ aus?

Dieses Problem in Schritt 2 wird dann besonders deutlich, wenn einige der Eigenwerte der Dichtematrix (d.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten $|\langle\phi_n|\phi\rangle|^2$) entartet sind. Der quantenmechanische Formalismus – die Dichtematrix – zeichnet in diesem Fall nämlich keine Basis aus. Heisenberg spricht daher auch bei makroskopisch verschiedenen Zuständen nicht von einem Gemisch sondern von einem „Gemenge“. Die Problematik im Zusammenhang mit dieser Unterscheidung werden wir somit zu untersuchen haben.

Das dritte Problem in Schritt 2 wird oftmals vergessen, da es sich ebenfalls nicht im Rahmen des mathematischen Formalismus ausdrücken lässt, sondern in der physikalischen Interpretation der Dichtematrix liegt. Der Übergang von einem reinen Zustand zu einer Dichtematrix mag zwar als Näherung für alle praktischen Anwendungen gerechtfertigt sein, trotzdem handelt es sich im quantenmechanischen Sinne um eine Superposition verschiedener Zustände. Bell betont in diesem Zusammenhang immer wieder, dass die Summe in der Dichtmatrix zunächst als „und“ zu interpretieren ist. Der Zustand $|s_1\rangle|\phi_1\rangle$ *und* $|s_2\rangle|\phi_2\rangle$ *und* ... liegt vor. Interpretiert man dann die Dichtematrix aber im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie, so spricht man davon, dass der Zustand $|s_1\rangle|\phi_1\rangle$ *oder* $|s_2\rangle|\phi_2\rangle$ *oder* ... vorliegt. Dieser Übergang vom „und“ zu „oder“ ist der eigentlich problematische Schritt beim Messprozess. Hier liegt der Indeterminismus der Quantenmechanik. Dieser Übergang lässt sich nicht durch eine Näherung erreichen. Trotzdem ist er die entscheidende Voraussetzung für Schritt 3, nämlich die Auswahl eines der möglichen („oder“) Zustände in der Dichtematrix $\hat{\rho}$ zu dem real vorliegenden Zustand als Ergebnis der Messung.

3.
$$\hat{\rho} = \sum_n |c_n|^2 P_{s_n} \otimes P_{\phi_n} \longrightarrow P_{s_k} \otimes P_{\phi_k} \simeq |s_k, \phi_k\rangle \; . \tag{10.8}$$

Ist der Übergang von „und“ zum „oder“ gemacht, so ist Schritt 3 eher ein Problem in der Interpretation von Wahrscheinlichkeiten. Eine Begründung, warum bei einer konkreten Messung ein bestimmter Zustand und nicht ein anderer als „Realität“ ausgezeichnet wird, kann innerhalb des quantenmechanischen Formalismus nicht erwartet werden. Dieser dritte Schritt beinhaltet allerdings den eigentlichen Kollaps der Wellenfunktion.

In den folgenden Abschnitten wollen wir uns den oben angeführten Problemen im einzelnen zuwenden.

10.3 Die Wechselwirkung des Messprozesses

Wir wollen nun einen Hamilton-Operator konstruieren, der die Wechselwirkung des Messprozesses beschreibt. Äquivalent können wir auch einen unitären Operator konstruieren, der den

Übergang des ersten Schrittes beschreibt. Viele solche Operatoren werden in der Literatur untersucht, einige wollen wir uns hier auch anschauen.

10.3.1 Der Übergangsoperator von von Neumann

Von Neumann wählt für das Quantensystem ein Orthonormalsystem $\{s_n\}$ (entsprechend der Basis, die ausgemessen werden soll), und für das Messinstrument das Orthonormalsystem $\{\phi_m\}$, wobei jeweils $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Ein beliebiger Zustand des Gesamtsystems hat die Form

$$|\Phi\rangle \;=\; \sum_{m,n} \chi_{mn}\, |s_n, \phi_m\rangle \;.$$

Wir definieren nun den Operator U durch die Vorschrift:

$$U|\Phi\rangle \;=\; \sum_{m,n} \chi_{mn}\, |s_n, \phi_{n+m}\rangle \;.$$

Dieser Operator ist offensichtlich unitär, da er eineindeutig Basiselemente $|s_n, \phi_m\rangle$ auf Basiselemente $|s_n, \phi_{n+m}\rangle$ abbildet.

Der Anfangszustand des Quantensystems sei $|s\rangle$ mit der Entwicklung:

$$|s\rangle \;=\; \sum_{n} \langle s_n|s\rangle\; |s_n\rangle \;.$$

Der Anfangszustand des Messsystems sei $|\phi_0\rangle$. Also ist der Anfangszustand des Gesamtsystems:

$$|\Phi_0\rangle \;=\; |s, \phi_0\rangle \;=\; \sum_{n} \langle s_n|s\rangle\; |s_n, \phi_0\rangle \;.$$

Sei U nun der unitäre Operator der Zeitentwicklung für eine bestimmte Zeit t so gilt:

$$|\Phi_t\rangle \;=\; U|\Phi_0\rangle \;=\; \sum_{n} \langle s_n|s\rangle\; |s_n, \phi_n\rangle \;.$$

Offensichtlich bewirkt der Operator U genau die Veränderung des Gesamtzustandes (QM-System + Messgerät), die man bei einer Messung an einem quantenmechanischen System erwartet.

Für von Neumann ist mit diesem Beweis zweierlei gezeigt:

1. Es gibt unitäre Operatoren - und damit quantenmechanische Zeitentwicklungen -, die den geforderten Übergang des Zustands des Gesamtsystems beschreiben.

2. Der Schnitt zwischen quantenmechanischem Objektsystem und Messapparatur kann beliebig verschoben werden.

Normalerweise wird dieser Schnitt zwischen Objektsystem und Messapparatur gelegt und in dieser Form tritt er in den Axiomen der Kopenhagener Deutung auf. Es wurde nun gezeigt, dass der Schnitt auch zwischen Messgerät und Beobachter gelegt werden kann. Da die Natur des Messgerätes in obige Argumentation überhaupt nicht eingeht und somit auch beispielsweise das Auge des Beobachters einschließen kann, ist für von Neumann damit die Unabhängigkeit des quantenmechanischen Formalismus von der Wahl dieses Schnittes bewiesen.

Für von Neumann steht dabei außer Zweifel, dass dieser Schnitt irgendwo zwischen Objektsystem und Beobachterbewusstsein erfolgen muss. So schreibt er [62] (VI.1, S. 223):

> Zunächst ist es an und für sich durchaus richtig, dass das Messen, bzw. der damit verknüpfte Vorgang der subjektiven Apperzeption eine gegenüber der physikalischen Umwelt neue, auf diese nicht zurückführbare Wesenheit ist. Denn sie führt aus dieser hinaus, oder richtiger: sie führt hinein, in das unkontrollierbare, weil von jedem Kontrollversuch schon vorausgesetzte, gedankliche Innenleben des Individuums...

Allerdings ist für von Neumann dieser Schnitt keine ausgesprochene Eigenschaft von Quantensystemen bzw. ihren Beobachtungen, sondern tritt in gleicher Form auch schon bei der Beobachtung von klassischen Systemen auf. Bei der Beschreibung von klassischen Messprozessen spielt er jedoch keine Rolle, da die Messung dort das System nicht beeinflusst.

Neben dem eher allgemeinen Beweis der Existenz eines adäquaten unitären Operators diskutiert von Neumann noch einen zweiten, ganz konkreten Messoperator, mit dessen Hilfe es möglich ist, quantenmechanische Messungen immer auf die Beobachtung klassischer Positionen zurückzuführen. Insbesondere gibt er in diesem Fall direkt einen Hamilton-Operator an.

Wir betrachten ein Objektsystem an dem wir die Messung einer Variablen vornehmen wollen, die der Einfachheit halber ein Spektrum von $-\infty$ bis $+\infty$ haben soll. Der Wert dieses Parameters sei q. Mit x bezeichnen wir eine Ortskoordinate des Messinstruments. Außerdem vernachlässigen wir die kinetischen Anteile von Objektsystem und Messinstrument und konzentrieren uns ausschließlich auf den Wechselwirkungsterm zwischen Objektsystem und Messgerät. Dieser Wechselwirkungs-Hamiltonian sei:

$$H \;=\; \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\alpha q\frac{\partial}{\partial x}\;.$$

Die Wellenfunktion des Gesamtsystems ist von der Form $\Psi(q,x)$. Sie genügt (in der angegebenen Näherung) der Schrödinger-Gleichung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha q\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(q,x;t) \;=\; 0\;.$$

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichung ist

$$\Psi(q,x;t) \;=\; f(q,x-\alpha qt)\;.$$

Sei nun vor der Messung der Zustand des Messinstrumentes $\phi(x)$ und der Zustand des Objektsystems $s(q)$, dann gilt somit

$$\Psi(q,x;0) \;=\; s(q)\phi(x)\;,$$

und nach der Messung ist

$$\Psi(q, x; t) \;=\; s(q)\phi(x - \alpha q t) \; .$$

Zu einem festen Zeitpunkt t besteht somit eine eindeutige Korrelation zwischen dem Quantenzustand $s(q)$ und dem Zustand des Messgerätes $\phi(x - \alpha q t)$. Da es sich bei $\alpha q t$ um makroskopische Distanzen handeln kann, lassen sich mit dieser Messanordnung die Werte von q im Prinzip beliebig genau bestimmen (allerdings nicht exakt). Von Neumann verdeutlicht dies noch, indem er für ϕ eine Funktion annimmt, die nur in einem sehr kleinen Intervall von Null verschieden ist.

10.3.2 Der Stern-Gerlach Operator von Gottfried

Im Gegensatz zu den eher allgemeinen Überlegungen bei von Neumann betrachtet Gottfried [41] im IV. Kapitel seines Buches eine ganz konkrete experimentelle Situation, nämlich das Stern-Gerlach-Experiment. Gottfried übernimmt dabei im wesentlichen die Darstellung von Pauli [65], überträgt diese aber in eine etwas aktuellere Sprache und behandelt die Stern-Gerlach-Situation auch etwas ausführlicher.

Beim Stern-Gerlach-Experiment tritt ein Strahl aus Teilchen mit einem magnetischen Moment - beispielsweise einem Spin - durch ein nicht-homogenes Magnetfeld. Je nach Spinorientierung relativ zur Richtung des Magnetfeldes wird der Strahl abgelenkt. Treffen die einzelnen Teilstrahlen hinter dieser Anordnung auf eine photographische Platte, so lässt sich durch den Auftreffpunkt auf dieser Platte die Spinkomponente bestimmen.

Beim Stern-Gerlach-Experiment handelt es sich um eine besonders einfache experimentelle Anordnung zur Messung der Spin-Komponente. Dies ist auch der Grund, warum es oft als Paradebeispiel eines Messanordnung gewählt wird.

Gottfried diskutiert zunächst das Verhalten der Wellenfunktion eines Teilchenstrahls in einem schwach-veränderlichen Feld. Wie in diesem Zusammenhang üblich betrachtet er das System dabei in der sogenannten *adiabatischen Näherung*. Im Rahmen dieser Näherung kann man für die Wellenfunktion des Teilchenstrahls eine Faktorisierungseigenschaft annehmen:

$$\Phi \;\simeq\; \phi_n(R, t) s_n(r, R) \; .$$

R bezeichnet hierbei die Schwerpunktkoordinate des Teilchenstrahls, r die interne „Relativkoordinate“, bei einem Spin-1/2-Teilchen nimmt r nur die Werte ± 1 an. n bezeichnet den Energiezustand, da ein Teilchen je nach seiner Spinorientierung in dem homogenen Magnetfeld eine unterschiedliche Energie hat. Wir werden später n mit der Spinorientierung identifizieren. Die Wellenfunktion $s_n(r, R)$ ist die Wellenfunktion des internen Zustands. R spielt dabei die Rolle eines äußeren Parameters, der sich relativ langsam verändert. $\phi_n(R, t)$ ist die Wellenfunktion zur Schwerpunktsbewegung des Teilchenstrahls.

Für die Schwerpunktsbewegung des Teilchenstrahls kann man eine semiklassische Näherung machen, da das Potential nur langsam im Vergleich zur de Broglie-Wellenlänge zur Schwerpunktsbewegung variiert. Der Einfachheit halber betrachten wir $\phi_n(R, t)$ als relativ scharf konzentriert um die klassische Bahnkurve. Ist die Breite dieser Kurve zum Zeitpunkt $t = 0$ (im

Magnetfeld) durch $a(0)$ gegeben, so verbreitert sich die Wellenfunktion als Funktion der Zeit nach

$$a(t) \approx \frac{\hbar}{a}\frac{t}{M} , \tag{10.9}$$

wobei M die (Schwerpunkts)-Masse des Systems ist. Bei gegebenem (parallelen) Abstand der Teilstrahlen, gegebener Masse M und Anfangsbreite a kann man so eine Zeitdauer berechnen, nach der die einzelnen (makroskopisch getrennten Teilstrahlen) wieder einen wesentlichen Überlapp aufweisen und somit wieder eine kohärente Vermischung auftritt. Diese Abschätzung benutzt Gottfried später zur Erklärung der Wellenpaketsreduktionen (vgl. nächsten Abschnitt).

Gottfried zeigt nun, dass aus dem Anfangszustand des Gesamtsystems

$$\Phi_0 = \phi_0(Rt)\sum_n c_n|s_n\rangle$$

nach Durchlaufen des Magnetfeldes folgt

$$\Phi(t) = \sum_n c_n\phi_n(Rt)|s_n\rangle ,$$

wobei wiederum $c_n = \langle s_n|s\rangle$, und $|s\rangle$ der Zustand der internen Freiheitsgrade, d.h. der Spinzustand ist. Auch wenn Gottfried bei dieser Herleitung die Schrödinger-Gleichung für Teilchen im Magnetfeld etc. löst, ist die Faktorisierung des Zustandes des Gesamtsystems im Rahmen der adiabatischen Näherung die wesentliche Eigenschaft, die in diese Rechnungen eingeht.

10.3.3 Der Mess-Hamiltonian von Wigner

Für das folgende betrachten wir wieder ein Quantensystem im Zustand $|s\rangle$ und ein Messsystem im Anfangszustand $|\phi_0\rangle$. Die möglichen Zustände zu verschiedenen Zeigerstellungen sind $|\phi_n\rangle$ und die zugehörigen Quantenzustände sind $|s_n\rangle$.

Der Wechselwirkungsteil des Hamilton-Operators der Messung sei

$$H_{\text{int}} = \epsilon\sum_n \left[|s_n,\phi_n\rangle\langle\phi_0,s_n| + |s_n,\phi_0\rangle\langle\phi_n,s_n|\right] .$$

Der erste dieser beiden Beiträge ist eigentlich derjenige, den wir für den Messvorgang benötigen. Damit H jedoch selbstadjungiert ist, müssen wie den entsprechend adjungierten Term noch addieren. Der Anfangszustand des Gesamtsystems ist wieder

$$|\Phi_0\rangle = \sum_n c_n|s_n,\phi_0\rangle .$$

Für die Zeitentwicklung dieses Zustandes folgt:

$$|\Phi(t)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht}|\Phi_0\rangle = \sum_n c_n\left[\sin\epsilon t\,|s_n,\phi_n\rangle + \cos\epsilon t\,|s_n,\phi_0\rangle\right] . \tag{10.10}$$

Lassen wir das Messsystem und das Objektsystem für eine Zeitdauer von $t = \pi/\epsilon$ wechselwirken, so erhalten wir das gewünschte Ergebnis:

$$|\Phi\rangle = \sum_n c_n\,|s_n,\phi_n\rangle .$$

10.3.4 Kritikpunkte

Gerade das letzte Beispiel macht eine Schwäche besonders deutlich, die in allen obengenannten Beispielen auftritt: Die wesentliche Rolle der Zeitdauer der Wechselwirkung.

Betrachten wir nochmals die einzelnen Messprozesse:

1. von Neumanns Messoperator U:
   Er enthält implizit eine feste Messzeit. Bestünde der Kontakt zwischen Messinstrument und Objektsystem doppelt so lange, wäre der Messoperator U^2. Dies würde für die Zustände $|s_n\rangle$ andere Anzeigezustände ($|\phi_{2n}\rangle$ ergeben.
2. von Neumanns Wechselwirkungs-Hamiltonian H_{int}:
   Hier ist $\phi(x - \alpha qt)$ der „Ausschlag“ des Messgerätes nach der Zeit t für den internen Zustand q. Dieser Ausschlag nimmt proportional mit der Zeit zu.
3. Das Stern-Gerlach-Experiment:
   Der Teilchenstrahl ist für eine feste Zeitdauer im Magnetfeld. Die Trennung der einzelnen Teilstrahlen ist proportional zu dieser Zeitdauer.
4. Wigners Hamiltonian:
   Hier ist die Zeitabhängigkeit besonders einschneidend. Nach der doppelten Zeit ($t = 2\pi/\epsilon$) ist das System offensichtlich wieder in seinem Anfangszustand, d.h. der Zustand des Messgeräts hängt überhaupt nicht von dem Zustand des Objektsystems ab.

Grundsätzlich ist diese explizite Zeitabhängigkeit des Zustandes des Messgerätes zwar kein Problem, aber mit Ausnahme des Stern-Gerlach-Experimentes (und ähnlicher experimenteller Anordnungen) entspricht das nicht unbedingt unseren Vorstellungen einer Messanordnung. Im Allgemeinen wird das Messgerät auf den Zustand des Objektsystems mit einer bestimmten Zeigerstellung reagieren *und dann in diesem Zustand bleiben.* Ein solches Messgerät wird durch keinen der oben angegebenen Messoperatoren wiedergegeben. Worin liegt das Problem?

Die Zeitentwicklung ist ein unitärer Operator. Ein solcher Operator kann nicht den Übergang $\phi_0 \to \phi_n$ beschreiben, und dann in diesem Zustand ϕ_n für alle Zeiten stehenbleiben. Der einzige Operator, der in allen Zuständen ϕ_n ($n \neq 0$) für alle Zeiten konstant bleibt, ist der Einheitsoperator. Der bleibt aber auch in ϕ_0 konstant, d.h. führt zu keiner Messung. Wenn wir also den Übergang $\phi_0 \to \phi_n$ zulassen, dann müssen wir auch weitere Übergänge $\phi_n \to \phi_m$ ($m \neq n$) zulassen; im extremen Fall, wie bei Wigners Hamiltonian, geht das System wieder in seinen Anfangszustand über.

Der Grund, warum wir dies in der Praxis meist nicht beobachten, liegt darin, dass der Anfangszustand ϕ_0 eines Messgerätes (sobald dieses einmal aktiviert ist) ein extrem instabiler Zustand ist. Es bedarf nur eines kleinen Anstoßes, beispielsweise hervorgerufen durch die Wechselwirkung mit dem Objektsystem, um diesen instabilen Anfangszustand in einen Zustand ϕ_n zu überführen, der dann allerdings energetisch stabil ist, zumindest für „exponentiell große Zeiten“. Solche Hamilton-Operatoren für das Messgerät lassen sich zwar konstruieren, sind allerdings wesentlich komplizierter, als die oben betrachteten, da die Zeigerstellungen nun auch einem Potenzial unterliegen.

Es wurde auch gelegentlich bezweifelt, ob eine beliebig scharfe Messung nach einer unitären Entwicklung der Form

$$|s_n, \phi_0\rangle \longrightarrow |s_n, \phi_n\rangle$$

tatsächlich immer möglich ist. Wigner hat in einer Arbeit aus dem Jahre 1952 [84] darauf hingewiesen, dass schon die Gültigkeit von Erhaltungssätzen für die Wechselwirkung zwischen Messobjekt und Messapparat die Messgenauigkeit beeinflussen kann. In diesem Fall lassen sich Messungen der meisten Operatoren nur als ein Grenzfall realisieren. Als Beispiel untersucht Wigner den Fall der Messung der x-Komponente des Spins mit Hilfe eines Messapparats, für den (zusammen mit dem Objektsystem) die Erhaltung der z-Komponente des Spins gilt. Diese Überlegungen wurden später in einer Arbeit von Araki und Yanase [2] - dem sogenannten Araki-Yanase-Theorem - verallgemeinert. Siehe dazu auch [80, 86].

10.4 Von reinen Zustand zur Dichtematrix

Wir hatten gesehen, dass der Gesamtzustand von Objektsystem und Messgerät nach der Wechselwirkung zwischen beiden System bei einer Messung durch den Zustand

$$|\Phi_1\rangle = \sum_n c_n |s_n, \phi_n\rangle \qquad c_n = \langle s_n|s\rangle \tag{10.11}$$

beschrieben wird. Diesen Zustand können wir auch durch eine Dichtematrix beschreiben, die in diesem Fall natürlich dem Projektionsoperator auf den zugehörigen eindimensionalen Teilraum entspricht:

$$\rho = \sum_{m,n} c_n c_m^* \, |s_n, \phi_n\rangle\langle\phi_m, s_m| \, . \tag{10.12}$$

Der nächste Schritt in der Beschreibung des Messprozesses besteht in der Ersetzung dieses reinen Zustandes durch ein Gemisch:

$$\hat{\rho} = \sum_n |c_n|^2 \, |s_n, \phi_n\rangle\langle\phi_n, s_n| \, . \tag{10.13}$$

$\hat{\rho}$ entsteht formal aus ρ durch das Weglassen der Nicht-Diagonalterme. Unsere Aufgabe ist es nun, diesen Schritt zu rechtfertigen. Wie schon mehrfach betont wurde, können wir dafür keine unitäre Zeitentwicklung des Gesamtsystems (Objektsystem + Messgerät) verantwortlich machen. Wir können diesen Schritt auch nicht dadurch begründen, dass die Nicht-Diagonalterme in irgendeinem Sinne „klein“ sind bzw. in einem wohldefinierbaren Grenzfall gegen Null gehen. Die nicht-diagonalen Matrixelemente sind Produkte der Form

$$\rho_{mn} = \langle s_n|s\rangle\langle s|s_m\rangle \, .$$

Ihr Absolutbetrag ist somit von derselben Größenordnung wie die Diagonalterme.

Generell kann man die Argumentationen für die Ersetzung des reinen Zustands durch das Gemisch in zwei (nicht unbedingt disjunkte) Klassen einteilen:

1. Bei den Zuständen $\{\phi_m\}$ (den Zuständen des Messgerätes zu verschiedenen Zeigerstellungen) handelt es sich um makroskopisch, d.h. klassisch unterscheidbare Zustände. In diesem Fall verschwinden die Erwartungswerte $\langle\phi_m|A|\phi_n\rangle$ für $m \neq n$ für alle „vernünftigen“ Observablen A. Für solche Observable sind die beiden Dichtematrizen ununterscheidbar und die Ersetzung somit gerechtfertigt. Es bleibt in diesem Fall die Diskussion, was unter „vernünftigen“ Observablen zu verstehen ist.

2. Sehr viele Freiheitsgrade des Messgerätes bzw. der Umgebung nehmen an der Wechselwirkung mit dem Objektsystem teil, und es entsteht eine Korrelation zwischen den Zuständen zu diesen Freiheitsgraden und dem Mikrozustand des Objektsystems. Wenn wir diese Freiheitsgrade (oder auch nur einen Teil davon) nicht beobachten, dürfen wir über diese Freiheitsgrade ausspuren. Die Dichtematrix zum reinen Zustand wird so zu einer reduzierten Dichtematrix eines gemischten Zustands.

Letztendlich haben beide Argumente gemein, dass bestimmte Beobachtungen als „unmöglich“ oder zumindest „nicht realisierbar“ oder „unphysikalisch“ ausgeschlossen werden.

Wir werden zunächst beide Argumente eingehender erläutern, und zwar anhand „klassischer“ Lehrbuchliteratur. Gerade vor dem Hintergrund einer ganzheitlichen Anwendung der Quantenmechanik auf das gesamte Universum wurde dieses Problem in den vergangenen Jahrzehnten eingehend untersucht und ist immer noch Gegenstand aktueller Forschung. Das Stichtwort lautet in diesem Zusammenhang „Dekohärenz“.

10.4.1 „Vernünftige“ Observable

Die Elemente der Dichtematrix werden im Allgemeinen nicht unmittelbar beobachtet. Von physikalischer Relevanz sind die Erwartungswerte von Observablen:

$$\langle A\rangle \;=\; \mathrm{tr}\, A\rho\,.$$

Wie schon erwähnt, lautet die langläufige Begründung für die Ersetzung des Zustands (Gl. 10.11 bzw. 10.12) durch die Dichtematrix (10.13), dass es sich bei den Zuständen $\{\phi_m\}$ um klassisch unterscheidbare Zustände handelt mit makroskopischen Ausmaßen bzw. mit einer makroskopischen Anzahl von Freiheitsgraden, die daran beteiligt sind. In diesem Fall verschwinden die Erwartungswerte $\langle\phi_m|A|\phi_n\rangle$ für $m \neq n$ für alle „vernünftigen“ Observablen A.

Diese Aussage kann sicherlich nicht generell gelten. Nach dem Formalismus der Quantenmechanik entspricht jedem selbstadjungierten Operator auf dem Hilbert-Raum der Zustände prinzipiell auch eine Observable. (Auf das Problem der Superauswahlregeln werden wir noch eingehen.) Und selbstverständlich gibt es selbstadjungierte Operatoren mit der Eigenschaft $\langle\phi_m|A|\phi_n\rangle \neq 0$ für $m \neq n$. Nun war oben von „vernünftigen“ Operatoren die Rede, und wir müssen nun sagen, was wir darunter verstehen. Exemplarisch wollen wir in diesem Zusammenhang die Äusserungen von Gottfried genauer untersuchen.

Gottfried

Das Buch *Quantum Mechanics* von Kurt Gottfried [41] ist eines des wenigen Lehrbücher, in denen ausführlich auf die Problematik des Messprozesses eingegangen wird. Gottfried argumentiert im wesentlichen damit, dass es sich bei den eigentlichen Observablen um „lokale“ Größen handelt. Dies soll kurz erläutert werden.

Jeder lineare Operator lässt sich in der Ortsdarstellung der Wellenfunktionen als Integralkern schreiben, d.h.

$$A\psi(x) \;=\; \int A(x,x')\psi(x')\,\mathrm{d}x' \;.$$

(Üblicherweise schreibt man in der Quantenmechanik

$$A(x,x') \;=\; \langle x|A|x'\rangle \;,$$

allerdings wird bei der Integralkerndarstellung nicht vorausgesetzt, dass es die Eigenzustände $|x\rangle$ zum Ortsoperator im Hilbert-Raum tatsächlich gibt.)

So gilt für den Ortsoperator

$$Q(x,x') \;=\; x\,\delta(x-x')$$

und für den Impulsoperator

$$P(x,x') \;=\; \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\,\delta^{(1)}(x-x') \;.$$

($\delta^{(1)}$ bezeichnet die erste Ableitung der δ-Funktion.) Diese Operatoren sind *lokal* in dem Sinne, dass sie sich als Funktionen der δ-Funktion und ihrer Ableitungen schreiben lassen. Natürlich gibt es auch nichtlokale Operatoren, beispielsweise

$$\exp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}aP \;\simeq\; \delta(x-x'-a)$$

oder

$$\exp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\frac{P^2}{2M} \;\simeq\; \left(\frac{M}{2\pi\mathrm{i}\hbar t}\right)^{1/2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{M(x-x')^2}{2\hbar t}\right) \;.$$

Gottfried argumentiert nun ([41]; Kap. 20; S. 175):

Essentially all quantities actually known to occur in nature are represented by operators having a nonlocality in configuration space that is at most of microscopic dimensions. We shall reserve the name “observable” for such *physically significant* Hermitean operators.

Dazu gibt es noch eine Fußnote:

We have used the qualification “essentially” here because superfluids and superconductors possess observables that are macroscopically nonlocal in coordinate space. ...

In seinem „Special Preface“ zur 1989-er Ausgabe seines Buches schreibt Gottfried ([41]; S. xiv), dass er glaubt, das Problem der „Reduktion des Wellenpaketes“ gelöst zu haben:

... to my mind ... pp. 185–189 resolves the long-standing “mystery” of the “reduction of the wave packet”. This I do by showing that for all observable A that are local on a macroscopic length, the result of any measurement is given by $\mathrm{Tr}A\hat{\rho}$, where $\hat{\rho}$ is the density matrix obtained from the true and complete density matrix by discarding terms corresponding to interference between macroscopically distinct states of the measurement apparatus. In other words, I divide the set of all Hermitean operators into two categories, those that are macroscopically local and those that are not, and show that the former, which includes all those conventionally associated with “observables”, the reduction postulate is superfluous.

Auch hier gibt es eine Anmerkung, die sich auf obige Fußnote bezieht:

As pointed out on p. 186, the set of macroscopically local observables does not include everything of interest to physics. Superfluids have observables that are macroscopically non-local, and one can devise experiments using superfluids which manifest non-local effects over macroscopic distances. In this circumstance nonsense would result were one to replace the true density matrix by its truncated counterpart; on the other hand, such an apparatus would not perform a “measurement” in the sense that the term is used in measurement theory.

Diese Zitate machen den Standpunkt von Gottfried deutlich. Die angegebenen Seiten 185–189 seines Buches beziehen sich auf das Kapitel 20.3 mit dem Titel „The statistical interpretation of quantum mechanics“. Dort präzisiert er seinen Standpunkt, insbesondere auch seine Definition eines Messinstruments ([41], S. 186):

An experimental arrangement is a measuring device if and only if the different Ξ_m [unsere ϕ_m] are macroscopically distinguishable. When this is the case, $\mathrm{tr}A\hat{\rho} = \mathrm{tr}A\rho$ for all observables A known to occur in nature. Consequently the pure state ρ and the mixture $\hat{\rho}$ are indistinguishable. In this sense it is permissible to say that the measurement process turns a pure state into a mixture, in spite of the fact that $\mathrm{tr}\rho^2$ is a rigorous constant of the motion.

Auch hier schließt sich wieder eine Fußnote an, in der er nochmals betont, dass es bei Superfluiden und Supraleitern Observable gibt, die im Ortsraum makroskopisch nicht-lokal sind. Er bemerkt dazu:

However, it would seem that any contraption that takes advantage of these longrange coherence properties of superfluids would not comply with our definition of a “measuring device”, because it would not act as a generalized pointer.

Gottfried betont diesen Standpunkt nochmals in einem Artikel aus dem Jahre 1991 [42] (S. 15):

The restriction to macroscopically local apparatus observables also requires a comment. In contrast to Dirac’s usage, I restrict the term ‘observable’ to objects that actually occur in natur, or for that matter, that one might imagine to occur in nature. In Dirac’s terminology, all Hermitian operators

are observables. Apart from a set of measure zero (which includes those of physical interest), Dirac's 'observables' are macroscopically *non*-local. The theory should not be expected to have an interpretation in terms of everyday (i.e., macroscopic) concepts unless there are restrictions that reflect the real world on the Hamiltonians admitted into Schrödinger's equation - there is no reason why the theory should produce outcomes of which we can make sense if we insert unphysical interactions between $\mathcal{S}$ [dem Objektsystem] and $\mathcal{A}$ [dem Messapparat] into the equation of motion.

Alles in allem gewinnt man den Eindruck, als ob Gottfried das Problem der Reduktion des Wellenpaketes als gelöst ansieht, allerdings nicht in einem fundamentalen Sinne sondern eher in einem praktischen Sinne. Dies wird auch nochmals an folgendem Zitat aus seinem Lehrbuch deutlich (S. 186):

In a realistic experimental arrangement, on the other hand, it is essentially impossible to demonstrate the mathematical fact that $\hat{\rho} \neq \rho$, no matter how much time one has at one's disposal.

Die letzte Bemerkung bezieht sich auf eine (schwer nachvollziehbare) Abschätzung der Zeit, die zwei makroskopisch getrennte Wellenpakete benötigen, um wieder in Kohärenz zu kommen. Die Idee dabei ist, dass in der Quantenmechanik Wellenpakete „zerlaufen", d.h. im Verlaufe der Zeit breiter werden. Selbst wenn also eine Wellenfunktion aus zwei makroskopisch getrennten Wellenpaketen besteht, so werden diese nach ausreichend langer Zeit wieder überlappen und somit die Dekohärenz verschwinden. Er schließt dann weiter, dass für makroskopisch viele Freiheitsgrade dieser Prozess eine Zeitspanne in Anspruch nehmen würde, die in der klassischen Mechanik der Poincaréschen Wiederkehrzeit entspricht, also wesentlich länger als die Gesamtdauer unseres Universums. Das abschließende Zitat (S. 188) macht diesen Standpunkt nochmals deutlich:

Let us focus our attention once more on the fact that we do not observe ρ but only $\mathrm{tr}A\rho$, and that for all *observables* (though *not* all Hermitian operators!) $\mathrm{tr}A\rho = \mathrm{tr}A\hat{\rho}$ once the measurement apparatus has been brought into play. Consequently the question of whether the pure state ρ or the mixture $\hat{\rho}$ emerges can only be answered if we are willing to wait for coherence to be re-established between the various wave functions Ξ_m. As we have seen, under realistic conditions this time T_c is monstrously large, and therefore plays a role analogous to that of the Poincaré recurrence time T_P in statistical mechanics. Just as the second law of thermodynamics is only correct over times small compared to T_P, so is the replacement of ρ by $\hat{\rho}$ only valid for times small compared to T_c. [Fußnote: In this connection one should note that in approximating ρ by $\hat{\rho}$ one introduces irreversibility, because the time reversed Schrödinger equation cannot retrieve ρ from $\hat{\rho}$.] Because our knowledge of the microcosmos is, in any case, restricted to times that are exceedingly short compared to T_c, a discussion of precisely what form the laws of microscopic physics have over times of order T_c takes us outside the realm of purely scientific speculation.

To recapitulate: We are free to replace ρ by $\hat{\rho}$ after the measurement in the knowledge that the error will never be found.

In seinem Artikel [42] zur Gedenkfreier von J. Bell macht Gottfried seinen Standpunkt nochmals deutlich(S. 15):

To summarize, I claim that

- the desired statistical distribution - without interference terms between distinct outcomes - is indistinguishable from the density matrix that evolves in accordance with the unitary Schrödinger equation once a reasonably realistic description of the measurement process is incorporated into the dynamics, provided all the operators pertaining to $\mathcal{S}$ and $\mathcal{A}$ are macroscopically local.
- these interference can only reappear, if at all, in some exceedingly entangled fashion if we wait for a time that is enormous compared to macroscopic (and not atomic) time scales.

Gottfrieds Absicht ist somit nicht, irgendeinen physikalischen Mechanismus anzugeben, durch den sich der Übergang $\rho \rightarrow \hat{\rho}$ begründen lässt, sondern ihm geht es lediglich darum, dass sich die Dichtematrix ρ für alle „praktischen“ Belange durch die Dichtematrix $\hat{\rho}$ *ersetzen* lässt. Es geht nur darum zu begründen, warum eine mathematische Erleichterung bei den Rechnungen tatsächlich angewandt werden darf. Gottfried streitet nicht ab, dass die Dichtematrix ρ bestehen bleibt, und er betont dies sogar dadurch, dass er bei sehr langen Zeiten (die für uns im nichtüberprüfbaren Bereich liegen) einen „entangled“ Einfluss der Interferenzterme in ρ für möglich hält. Gottfried streitet auch nicht ab, dass es nicht-lokale Operatoren gibt, die in manchen experimentellen Situationen makroskopisch getrennte Anteile eines Zustandes in Kohärenz bringen können, aber in diesem Fall würde er nicht von „Messung“ sprechen, und nur darum geht es ihm.

Es hat den Anschein, als ob Gottfried hier die „Many-worlds“-Interpretation favorisiert, obwohl er an anderer Stelle ([42]; S. 9) betont, dass ein reiner Zustand immer nur ein Ensemble von Systemen beschreibt, und dass die Quantenmechanik nicht auf das Universum als Ganzes anwendbar ist.

Wir werden im nächsten Abschnitt nochmals auf die Argumentation von Gottfried zurückkommen, insbesondere im Zusammenhang mit einer Kritik Bells.

Superauswahlregeln im Messprozess

Wir haben oben festgestellt, dass - zumindest nach Meinung einiger Physiker - die physikalisch realisierbaren oder zugängigen Observablen durch verschiedene Bedingungen, beispielsweise die makroskopische Lokalität, eingeschränkt sind, und dass daher bei weitem nicht jedem selbstadjungierten Operator auch eine Observable entspricht. Insbesondere galt die Einschränkung, dass für klassische „Zeigerstellungen“ eines Messinstrumentes gilt $\langle \phi_n | A | \phi_m \rangle = 0$ für $m \neq n$.

Eine solche Einschränkung der Observablenalgebra zieht nach den Überlegungen aus Kapitel 2.3 Superauswahlregeln nach sich: Übergänge von $|\phi_n\rangle$ nach $|\phi_m\rangle$ $(m \neq n)$ sind physikalisch nicht realisiertbar. (Hier ist nicht gemeint, dass wir ‘by brute force’ den Zeiger mit der Hand in eine andere Stellung bringen können, sondern dass sämtliche am Messprozess beteiligten Freiheitsgrade den anderen Zustand entsprechend verändert werden.) Worin besteht diese Superauswahlregel und was könnte die (Eich)-Symmetrie sein, die dahinter steckt?

Die Superauswahlregel besteht darin, dass wir keine Übergänge zwischen makroskopisch verschiedenen „Welten“ induzieren können. Sobald sich ein klassischer Zustand einmal manifestiert hat, lässt er sich durch keine Operation wieder rückgängig machen. (Wir wollen uns an dieser Stelle mit praktisch realisierbaren Prozessen beschäftigen und nicht über theoretische Möglich-

keiten spekulieren. Dies wird wir im Zusammenhang mit der „Many-worlds-interpretation“ noch geschehen.) Allerdings ergibt sich die Frage, ob wir einen solchen Übergang überhaupt wahrnehmen würden. Falls bei einem solchen Übergang *sämtliche* Freiheitsgrade umgelegt werden, einschließlich der Freiheitsgrade, die in unserem Gehirn für Erinnerungen zuständig sind, könnten wir nachher durch nichts feststellen, dass wir früher einmal in einem anderen, makroskopisch verschiedenen Zustand waren. Wir hätten das Gefühl, es sei immer so gewesen. Da aber noch nie beobachtet wurde, dass makroskopische Zustände auch nur teilweise in andere makroskopische Zustände „tunneln“, und wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten dafür auch als außerordentlich gering bestimmten können, vermuten wir mit einer gewissen Berechtigung, dass solche Übergänge nicht stattfinden.

Was ist die Symmetrie hinter diesen Superauswahlregeln? Die Wellenfunktion des Gesamtsystems (einschließlich aller an dem Prozess beteiligten Freiheitsgrade) ist nach der Quantenmechanik zunächst eine Summe verschiedener Anteile, zwischen denen keine Kohärenz mehr besteht. Wenn wir jeden dieser Anteile mit einem anderen Phasenfaktor multiplizieren, werden wir mit unseren Observablen keine Veränderung feststellen können. Die Symmetrie besteht also gewissermaßen in einer „lokalen“ Freiheit, die Phase der Wellenfunktion zu wählen, allerdings bezieht sich „lokal“ hier nicht auf den Ortsraum, sondern auf den Konfigurationsraum der Wellenfunktion. Die eingeschränkte Observablenalgebra erlaubt es uns nicht, in andere „Welten“ hineinzuschauen.

10.4.2 Ausspuren unbeobachteter Freiheitsgrade

Bisher haben wir den Gesamtzustand des Systems nach der Messung durch

$$|\Phi\rangle \;=\; \sum_n c_n \,|s_n, \phi_n\rangle$$

angegeben. Insbesondere $|\phi_n\rangle$ hatte eher eine symbolische Bedeutung als „Zeigerstellung“. Auch wenn die Zeigerstellung von uns beobachtet wird, so gehen doch implizit in den Zustand des Messgerätes wesentlich mehr Freiheitsgrade ein, makroskopisch viele Freiheitsgrade, die wir nicht beobachten, und bei denen auch nicht die Absicht besteht, die insgesamt zu beobachten. Außerdem sind letztendlich nicht nur die Freiheitsgrade des Messinstrumentes an dem Prozess beteiligt, sondern alle Freiheitsgrade der Umgebung, mit denen das Messinstrument in Wechselwirkung steht. Diese Wechselwirkung kann durch die abgestrahlten Photonen bewirkt werden, durch das Gravitationsfeld der Erde, durch die Hintergrundstrahlung und vieles mehr.

Wir wollen diese Freiheitsgrade symbolisch mit $\{z^i\}_{i=1,\ldots,N}$ (N groß) bezeichnen. Der eigentliche Zustand nach der Messung ist somit durch

$$|\Phi_1'\rangle \;=\; \sum_n c_n \,|s_n, \phi_n, \{z_n^i\}\rangle$$

bzw.

$$\rho' \;=\; \sum_{m,n} c_n c_m^* \,|\{z_n^i\}, s_n, \phi_n\rangle\langle\phi_m, s_m, \{z_m^j\}|$$

gegeben. Wenn auch nur einige dieser Freiheitsgrade nicht weiter beobachtet werden, dürfen wir sie „ausspuren“, d.h. die Dichtematrix (die noch eine Dichtematrix zu einem reinen Zustand ist) bezüglich dieser Freiheitsgrade verkürzen. Das Ergebnis dieser Verkürzung ist im wesentlichen die Dichtematrix $\hat{\rho}$ zu dem gemischten Zustand:

$$\hat{\rho} \;=\; \mathrm{Spur}_{\{z^i\}}\rho' \;.$$

Bei dieser Argumentation bleibt zu begründen, warum bestimmte Freiheitsgrade $\{z^i\}$ ausgespurt werden dürfen, da es uns prinzipiell frei bleibt, jeden Freiheitsgrad zu beobachten.

Wir wollen an dieser Stelle nicht intensiver auf dieses Argument eingehen, da wir im Zusammenhang mit den Untersuchungen zur Dekohärenz darauf zurückkommen werden.

10.5 Die Basis der Zeigerstellung

10.5.1 Vorbemerkungen

Wir hatten gesehen, dass der Zustand des Gesamtsystems nach einer Messung durch

$$|\Phi\rangle \;=\; \sum_n c_n\,|s_n,\phi_n\rangle$$

wiedergegeben wird. Doch ist damit eindeutig geklärt, ob die Observable S zu den Eigenzuständen $|s_n\rangle$ gemessen wurde, bzw. ob ϕ_n tatsächlich den Zeigerstellungen des Messinstrumentes entspricht? Wir können beispielsweise die Zustände $|s_n\rangle$ nach einer anderen Basis entwickeln,

$$|s_n\rangle \;=\; \sum_i b_{ni}\,|\sigma_i\rangle \;, \tag{10.14}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
|\Phi\rangle \;&=\; \sum_n\sum_i c_n b_{ni}\,|\sigma_i,\phi_n\rangle \\
&=\; \sum_i |\sigma_i\rangle\left(\sum_n c_n b_{ni}|\phi_n\rangle\right) \\
&=\; \sum_i |\sigma_i\rangle|\psi_i\rangle
\end{aligned}$$

mit

$$|\psi_i\rangle \;=\; \sum_n c_n b_{ni}|\phi_n\rangle \;.$$

Haben wir nun die Größe S mit Eigenzuständen $|s_n\rangle$ gemessen, oder die Größe Σ mit Eigenzuständen $|\sigma_i\rangle$? In beiden Fällen haben wir eine Korrelation zwischen den Zuständen des Objektsystems und bestimmten Zuständen des Messapparates.

Zunächst könnte man einwerfen, dass die Zustände $|\psi_i\rangle$ nicht orthogonal sind:

$$\begin{aligned}\langle\psi_i|\psi_j\rangle &= \sum_m \sum_n c_n^* c_m b_{ni}^* b_{mj} \langle\phi_n|\phi_m\rangle \\ &= \sum_n |c_n|^2 b_{ni}^* b_{nj} \ .\end{aligned}$$

Handelt es sich bei der Transformation (10.14) um eine unitäre Transformation, sind die Zustände $|\sigma_i\rangle$ also orthonormal, dann ist b_{ni} eine unitäre Matrix. In diesem Fall sind die Zustände $|\psi_i\rangle$ genau dann orthogonal, wenn alle $|c_n|$ gleich sind: $|c_n|^2 = \text{const.}$

Selbst wenn man die Orthogonalität der Zustände zu verschiedenen Zeigerstellungen des Messgerätes voraussetzen möchte, gibt es Fälle, in denen die Observable, bezüglich der eine Messung vorgenommen wurde, aus obigen Formeln alleine nicht hervorgeht. Besonders deutlich wird dies, wenn bei einer Messung alle Möglichkeiten mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten:

$$|\Phi\rangle = c \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n} |s_n\rangle|\phi_n\rangle \ ,$$

sodass nun $c_n = c \exp(\mathrm{i}\alpha_n)$ gilt und somit alle $|c_n|^2$ gleich sind. Jede unitäre Transformation der Mikrozustände (10.14) impliziert eine unitäre Transformation der Zustände des Messgerätes,

$$|\psi_i\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_n} b_{ni} |\phi_n\rangle \ ,$$

sodass der Gesamtzustand auch die korrelierte Zerlegung

$$|\Phi\rangle = c \sum_i |\sigma_i\rangle|\psi_i\rangle$$

zulässt. Die Dichtematrizen $\hat{\rho}_\phi$ und $\hat{\rho}_\psi$, die man aus der Dichtematrix ρ zu $|\Phi\rangle$ durch Weglassen der Nicht-Diagonalterme in der Basis $|s_n\rangle|\phi_m\rangle$ bzw. $|\sigma_i\rangle|\psi_j\rangle$ erhält sind verschieden. $\hat{\rho}_\phi$ ist proportional zum Projektionsoperator auf den Raum, der durch die Zustände $|s_n\rangle|\phi_n\rangle$ aufgespannt wird, während $\hat{\rho}_\psi$ proportional zum Projektionsoperator auf den Raum ist, der durch $|\sigma_i\rangle|\psi_i\rangle$ aufgespannt wird. Diese beiden Räume sind im Allgemeinen verschieden, auch wenn sie beide den Zustand $|\Phi\rangle$ enthalten. Je nach Wahl der Basis erhalten wir somit verschiedene Dichtematrizen $\hat{\rho}$. Welche ist die richtige?

Betrachten wir diesen Sachverhalt noch aus einem anderen Blickwinkel. Angenommen wir verzichten auf die Ablesung der Anzeige am Messgerät und verkürzen den Zustand $|\Phi\rangle$ noch über die Zustände des Messgerätes. Diese Verkürzung ist natürlich unabhängig von der gewählten Basis ($\{|\phi_n\rangle\}$ oder $\{|\psi_i\rangle\}$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \sum_k \langle\phi_k| \left(\rho = \sum_{m,n} c_n c_m^* |s_n, \phi_n\rangle\langle\phi_m, s_m| \right) |\phi_k\rangle \\ &= \sum_k |c_k|^2 \ |s_k\rangle\langle s_k| \ .\end{aligned}$$

Wenn wir wieder annehmen, dass $|c_k|^2 = \text{const.}$, folgt, dass ρ_1 proportional zur Einheitsmatrix ist. Wir sehen dieser Matrix somit nicht mehr an, bezüglich welcher Basis die Messungen

vorgenommen wurden. Bevor wir auf das Problem der „Zeigerbasis“ zurückkommen, wollen wir uns kurz mit dem Begriff des „Gemenges“ beschäftigen, der in diesem Zusammenhang von Bedeutung ist.

10.5.2 Gemisch und Gemenge

Der Begriff „Gemenge“ geht auf Heisenberg [45] zurück. In Kapitel IV seines Buches *Physikalische Prinzipien der Quantentheorie* behandelt er den Messprozess und die statistische Deutung der Quantentheorie. Dort sagt er:

> Wenn eine Messung des Wertes q durchgeführt werden soll, so muss zunächst an die Stelle der genauen Kenntnis ... eine ungenaue Kenntnis treten, die aufgefasst werden kann als ein mit Wahrscheinlichkeitskoeffizienten versehenes „Gemenge“... Aus dem entstandenen Gemenge greift die Messung einen bestimmten Wert q' als tatsächliches Resultat heraus.

Definiert findet man den Begriff des Gemenges beispielsweise bei Mittelstaedt [61] (S. 114). Danach ist ein Gemenge $G(w_i, P_{A_i})$ eine Menge gewichteter Alternativ-Zustände P_{A_i}, deren Gewichte durch die Wahrscheinlichkeiten w_i gegeben sind.

Ein Gemenge wird in der Quantenmechanik durch eine Dichtematrix

$$\rho \;=\; \sum_i w_i P_{A_i}$$

beschrieben. Doch was unterscheidet dann ein Gemenge von einem Gemisch?

Betrachten wir als einfaches Beispiel den zweidimensionalen Zustandsraum des Spin-1/2-Systems. Nehmen wir an, es liege das Gemenge

$$G_1 \;=\; \left\{ \left(\frac{1}{2}, |s_3 = +1\rangle \right), \left(\frac{1}{2}, |s_3 = -1\rangle \right) \right\}$$

vor. Die beiden Eigenzustände zur 3-Komponente des Spinoperators haben je die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wir wählen die Basis so, dass die 3-Komponente des Spin-Operators diagonal ist. Die zugehörige Dichtematrix ist

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2}|s_3 = +1\rangle\langle s_3 = +1| + \frac{1}{2}|s_3 = -1\rangle\langle s_3 = -1| \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die zugehörige Dichtematrix ist somit proportional zur Einheitsmatrix.

Nun betrachten wir das Gemenge

$$G_2 \;=\; \left\{ \left(\frac{1}{2}, |s_1 = +1\rangle \right), \left(\frac{1}{2}, |s_1 = -1\rangle \right) \right\} .$$

Die normierten Eigenzustände in der obigen Basis sind

$$|s_1 = +1\rangle \;\simeq\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |s_1 = -1\rangle \;\simeq\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Damit sind die beiden Projektionsoperatoren zu diesen Zuständen

$$P_{s_1=+} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{s_1=-} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten also für die Dichtematrix zu obigem Gemenge:

$$\rho_2 \;=\; \frac{1}{2}P_{s_1=+} + \frac{1}{2}P_{s_1=-} \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Offensichtlich sind die beiden Dichtematrizen gleich. Dieses Ergebnis hätten wir auch „erraten“ können, denn die Dichtematrix ρ_1 ist proportional zur Einheitsmatrix und damit invariant unter unitären Transformationen, die Rotationen entsprechen. Das obige Ergebnis gilt somit für jedes Gemenge, bei denen die beiden Eigenzustände zu einer Spinkomponente mit den Gewichten $w_i = 1/2$ auftreten - unabhängig von der Richtung der Spinkomponente.

Mit anderen Worten, der Dichtematrix sieht man in diesem Fall nicht an, bezüglich welcher Basis das Gemenge denn besteht. Hierin unterscheidet sich das Gemisch von einem Gemenge. Ein Gemenge gibt eindeutig die Zustände und die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen diese Zustände in dem Gemenge vertreten sind. Dem Gemisch, gegeben durch eine Dichtematrix, sieht man diese Zustandsbasis unter Umständen jedoch nicht an.

Der Grund liegt natürlich darin, dass obige Dichtematrix entartete Eigenwerte hat. Immer, wenn dies der Fall ist, kann die Dichtematrix noch bezüglich dieses Entartungsraumes unitär transformiert werden, sodass sich die Dichtematrix nicht ändert, aber eine andere Basis gewählt wurde. Während also bei einem Gemenge die Zustände eindeutig sind, ist dies bei einer Dichtematrix mit entarteten Eigenwerten nicht der Fall. Interessant ist, dass der Formalismus der Quantenmechanik keinen Unterschied zwischen diesen beiden Fällen macht. Im Sinne der Quantenmechanik gewinnen wir somit keine Information hinzu, wenn wir erfahren, dass ein Gemenge vorliegt.

Heisenberg betont jedoch, dass der Zustand des Objektsystems (und auch des Gesamtsystems) nach einer Messung ein Gemenge sei; denn durch den Aufbau des Messgerätes sei eine bestimmte Observable ausgezeichnet, die an dem Objektsystem gemessen wird. Es bleibt allerdings zu klären, wie wir auf dem Niveau der Quantenmechanik diese Auszeichnung verstehen können.

10.5.3 Umgebungsbedingte Superauswahlregeln

Wir hatten oben gesagt, dass die Zustände $|\phi_n\rangle$, die verschiedenen Zeigerstellungen der Messapparatur entsprechen, makroskopisch unterscheidbar sind, und dass wir für solche Zustände effektive Superauswahlregeln anwenden können: Für alle physikalisch sinnvollen Observablen A

gilt $\langle\phi_n|A|\phi_m\rangle = A_n\delta_{nm}$. Eine solche Relation gilt nicht für die transformierten Zustände $|\psi_i\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle\psi_i|A|\psi_j\rangle &= \sum_{n,m} b^*_{ni}b_{mj}\langle\phi_n|A|\phi_m\rangle \\ &= \sum_n b^*_{ni}b_{nj}A_n \;\neq\; 0 \qquad \text{im Allgemeinen .}\end{aligned}$$

Da A_n generell von n abhängt, verschwindet obiger Erwartungswert für $i \neq j$ im Allgemeinen nicht. Wir können somit sagen: Die Zeigerstellungsbasis $\{|\phi_n\rangle\}$ ist ausgezeichnet, weil sie bezüglich der physikalisch sinnvollen Observablen stabil ist und Superauswahlsektoren definiert.

Wir werden sehen, dass dies tatsächlich die Grundidee der Erklärung ist, aber wir müssen noch ein Argument ausräumen: Wir haben bisher die „physikalisch sinnvollen“ Observablen nicht besonders scharf charakterisiert. Makroskopische Lokalität ist die Eigenschaft, die Gottfried besonders betont. In diesem Fall wird die Ortsraumbasis jedoch besonders ausgezeichnet, und wir müssen erklären, warum dies der Fall ist. Warum ist Lokalität im Impulsraum nicht das entscheidende Kriterium?

Die Zustände $|\psi_i\rangle$ bilden nämlich ebenfalls Superauswahlsektoren, allerdings nicht bezüglich der „ortsraumlokalen“ Observablen $\{A\}$, sondern bezüglich der transformierten Observablen $\{\hat{A} = bAb^+\}$. In diesem Fall gilt nämlich

$$\langle\psi_i|\hat{A}|\psi_j\rangle \;=\; \langle\phi_n|A|\phi_m\rangle \; .$$

Die transformierten Observablen $\{\hat{A}\}$ sind „makroskopisch lokal“ bezüglich der Basis, die durch die unitäre Transformation b aus der Ortsraumbasis hervorgeht.

Der Physiker Wojciech H. Zurek hat sich mit dieser Frage eingehender beschäftigt ([87, 88]). Zureks Vorstellung ist, dass die Art der Wechselwirkung des Messgerätes mit der Umgebung die Basis der Superauswahlsektoren bestimmt. Die Zustände zu den Zeigerstellungen - die Zeigerstellungsbasis - sind stationäre Zustände für den Wechselwirkungs-Hamilton-Operator zwischen Messgerät und Umgebung. Sie sind daher unter der Zeitentwicklung stabil. Wegen der permanenten Wechselwirkung zwischen Messgerät und Umgebung wird das System „durch die Beobachtung“ immer wieder in diese Basis „gedrückt“. Wir haben früher (Kap. 7.1) im Zusammenhang mit dem Quanten-Zenon-Effekt etwas Ähnliches gesehen, sodass es an dieser Stelle bei der knappen Erläuterung der Grundidee bleiben soll.

Außerdem muss man feststellen, dass es eine endgültige und rundum befriedigende Klärung der Frage, warum die Ortsraumbasis für unsere Wahrnehmung der Umgebung ausgezeichnet zu sein scheint, noch nicht gibt.

10.6 Vom „Und“ zum „Oder“

Im Jahre 1989 erschien eine Arbeit von John S. Bell mit dem Titel *Against “Measurement“* [6]. Es handelte sich dabei um einen Beitrag zu der Konferenz in Erice, August 1989, *62 years of uncertainty*. Diese Konferenz beschäftigte sich mit Grundlagenproblemen zur Quantenmechanik, und der Titel der Konferenz bezieht sich auf das Jahr 1927, als auf dem Solvay-Kongress

die statistische Deutung der Quantenmechanik in ihrer heute mehr oder weniger anerkannten Form formuliert und verteidigt wurde. Außerdem fand Heisenberg im Jahre 1927 seine Unschärferelation und auf einer Tagung in Como prägte und erläuterte Bohr den Begriff der „Komplementarität“.

Auf die Arbeit von Bell werden wir im folgenden Kapitel noch intensiver eingehen. Hier wollen wir uns mit einem Problem beschäftigen, das Bell bei nahezu allen Behandlungen des Messprozesses, sei es in Lehrbüchern oder in Publikationen, vermisst, das er aber als wesentlich und grundlegend für das Verständnis der Reduktion der Wellenfunktion ansieht.

Bell akzeptiert die Meinung vieler Physiker, dass der reine Zustand $|\Phi\rangle$, wie er sich nach der Wechselwirkung zwischen Objektsystem und Messapparatur für das Gesamtsystem einstellt, für alle praktischen Zwecke (er prägt dafür den Ausdruck FAPP: for all practical purposes) durch die Dichtematrix $\hat{\rho}$ ersetzt werden darf. Er zitiert Gottfried - “... [as] $\mathrm{tr}A\hat{\rho} = \mathrm{tr}A\rho$ for all observables A known to occur in nature ... we are free to replace ρ by $\hat{\rho}$ after the measurement, safe in the knowledge that the error will never be found...” - und kommentiert:

> Now while quite uncomfortable with the concept “all known observables”, I am fully convinced of the practical elusiveness [Unbestimmbarkeit], even the absence FAPP, of interference between macroscopically different states. So let us go along with KG on this and see where it leads.
>
> “... If we take advantage of the indistinguishibility of ρ and $\hat{\rho}$ to say that $\hat{\rho}$ is the state of the system subsequent to measurement, the intuitive interpretation of c_m as a probability amplitude emerges without further ado. This is because c_m enters $\hat{\rho}$ only via $|c_m|^2$, and the latter quantity appears in $\hat{\rho}$ in precisely the same manner as probabilities do in classical statistical physics...”
>
> I am quite puzzled by this. If one were not actually on the lookout for probabilities, I think the obvious interpretation of even $\hat{\rho}$ would be that the system is in a state in which the various Ψ's somehow *coexist*:
>
> $$\Psi_1\Psi_1^* \textit{ and } \Psi_2\Psi_2^* \textit{ and....}$$
>
> This is not at all a *probability* interpretation, in which the different terms are seen not as *coexisting*, but as *alternatives*:
>
> $$\Psi_1\Psi_1^* \textit{ or } \Psi_2\Psi_2^* \textit{ or....}$$
>
> The idea that elimination of coherence, in one way or another, implies the replacement of “and” by “or”, is a very common one among solvers of the “measurement problem”. It has always puzzled me.

Bell macht hier auf eine Mehrdeutigkeit in der Interpretation einer quantenmechanischen Dichtematrix aufmerksam. (Eine andere Mehrdeutigkeit ist uns schon bei der Unterscheidung zwischen Gemisch und Gemenge begegnet.) Es gibt mehrere Gründe, warum wir zur Beschreibung eines quantenmechanischen Systems eine Dichtematrix benutzen:

1. Wir wollen ein Ensemble von Systemen beschreiben, die sich mit wohldefinierten Wahrscheinlichkeiten in unterschiedlichen bekannten (reinen) Zuständen befinden. Dies ist beispielsweise in der statistischen Mechanik der Fall. In diesem Fall liegt ein Gemenge vor. Die Eigenwerte der Dichtematrix haben die Interpretation klassischer Wahrscheinlichkeiten und geben an, mit welcher relativen Häufigkeit ein bestimmter Zustand in diesem Ensemble vertreten *ist*.

2. Wir drücken durch die Dichtematrix unsere Unkenntnis über ein System aus. Wir beschreiben mit der Dichtematrix ein Einzelsystem, von dem wir aber nicht wissen, in welchem (reinen) Zustand es sich befindet. Aufgrund unserer Kenntnis über die Vergangenheit dieses Systems können wir lediglich Angaben machen, mit welcher relativen Häufigkeit bei einem Ensemble von Systemen mit derselben Vergangenheit ein bestimmter Zustand vertreten *wäre*.

3. Die Dichtematrix entsteht durch Verkürzung eines reinen Zustandes über Freiheitsgrade, die wir nicht beobachten können oder wollen. In diesem Fall wissen wir, dass die verkürzte Dichtematrix für die Erwartungswerte aller Observablen, die sich nur auf das verbleibende Teilsystem beziehen, dieselben Erwartungswerte liefert, die wir auch aus dem reinen Zustand des Gesamtsystems erhalten würden.

In Fall 1 sind die Eigenwerte der Dichtematrix relative Häufigkeiten und somit unmittelbar als Wahrscheinlichkeiten interpretierbar. In Fall 2 handelt es sich bei den Eigenwerten um Wahrscheinlichkeiten im Sinne einer „Erwartungshaltung“.

Bell betont nun, dass im Fall 3 - und dieser liegt beim Messprozess vor - die Dichtematrix *nicht* Wahrscheinlichkeiten im Sinne von Alternativen ausdrückt. Für die *Berechnung* von Erwartungswerten dürfen wir FAPP die Dichtematrix benutzen, nicht aber zur *Interpretation* des physikalischen Zustands. Bei diesem handelt es sich um einen reinen Zustand, und die $|c_m|^2$'s sind die Faktoren der verschiedenen Anteile in diesem Zustand im Sinne einer Superposition ("and"). Diese Interpretation geht nach Bells Ansicht auch nicht dadurch verloren, dass wir zu praktischen, rechnerischen Zwecken den reinen Zustand durch eine Dichtematrix ersetzen dürfen.

In meinen Augen ist die Kritik von Bell durchaus berechtigt. Implizit scheint auch Gottfried der Überzeugung zu sein, dass $\hat{\rho}$ nur ein praktisches (FAPP erlaubtes) Hilfsmittel ist. Anderenfalls kann man nicht verstehen, warum Gottfried für außerordentlich lange Zeiten die Möglichkeit von Kohärenzen zwischen den verschiedenen makroskopischen Anteilen des Zustands einräumt.

Es ist interessant, die Antwort Gottfrieds auf die Kritik Bells zu untersuchen. In seinem 1991-er Artikel [42] schreibt er (S. 16):

> Bell argued that if the various terms in ... $[\hat{\rho}]$ correspond to *distinct alternatives*, what should be demonstrated (at least at the QED FAPP level) is not that the outcome is the *sum* of these terms, as in $\hat{\rho}$, but rather:
>
> $$\begin{aligned} \Psi\Psi^* \quad &\longrightarrow \quad |c_1|^2 \eta_1 \eta_1^* \phi_1 \phi_1^* \cdots \\ &\longrightarrow \quad \text{or} \quad |c_2|^2 \eta_2 \eta_2^* \phi_2 \phi_2^* ... \\ &\longrightarrow \quad \text{or} \quad \cdots . \end{aligned}$$
>
> This seems to be a devastating blow. But in $\hat{\rho}$ the different terms have no overlap in the space of the apparatus variables ...; moreover, if a probability distribution (e.g., of a population's incomes) breaks up into two or more non-overlapping pieces, theses can always be added together, normalized to unity, and the sum plotted as a function of the variables that label the individual members of the ensemble. After this is done, it is still legitimate to say that this sum of terms represents the probability that a

member will fall into one *or* another of the subensembles. As this is obvious, Bell's criticism could not be so superficial. ...

Für mich entsteht hier der Eindruck, als ob Gottfried den Kritikpunkt Bells nicht erkennt. Er argumentiert nur, dass das „+“ in einer Dichtematrix, bei der Überlappterme fehlen, in anderen bekannten Fällen die Bedeutung von Alternativen hat und somit kein Widerspruch zu einer statistischen Interpretation (“or”) besteht. In seinen weiteren Erörterungen glaubt er, dass für Bell das eigentliche Problem darin besteht, dass $\hat{\rho}$ hier auf Einzelsysteme angewandt wird. Gottfried schreibt dazu in seinem Buch (und wiederholt nochmals in seinem Artikel):“...we have not attempted to reconcile [in Einklang bringen] the fact that the theory only makes statistical predictions with our observation of individual, solitary, events.”

Vergleichen wir nochmals den reinen Zustand $|\Phi\rangle$ mit der Dichtematrix $\hat{\rho}$:

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &= c_1|s_1\rangle|\phi_1\rangle \ + \ c_2|s_2\rangle|\phi_2\rangle \ + \ ... \\ \hat{\rho} &= |c_1|^2 P_{s_1} \otimes P_{\phi_1} \ + \ |c_2|^2 P_{s_2} \otimes P_{\phi_2} \ + \ ... \ . \end{aligned}$$

Die „+“-Zeichen in beiden Zeilen haben nicht nur mathematisch eine unterschiedliche Bedeutung (im ersten Fall beschreiben sie eine Verknüpfung von Vektoren eines Hilbert-Raumes, im zweiten Fall eine Verknüpfung von Operatoren über diesem Hilbertraum), wir interpretieren sie im Allgemeinen auch unterschiedlich. Im oberen Fall handelt es sich um eine Superposition (“and”) reiner Zustände, die nicht im Sinne von Alternativen, sondern im Sinne von „sowohl als auch“ interpretiert wird. Im unteren Fall handelt es sich in der statistischen Interpretation um die Summe alternativer Möglichkeiten (“or”).

Bedenken wir, dass es sich bei $\{|\phi_n\rangle\}$ um eine Sammelbezeichnung für den Zustand eines Systems mit makroskopisch vielen Freiheitsgraden handelt, so lebt die Wellenfunktion, $\langle r, \{x_i\}|\Phi\rangle$ (r bezieht sich auf den Freiheitsgrad S und $\{x_i\}$ auf die Freiheitsgrade der Bestandteile des Messinstruments) in einem hochdimensionalen ($d \simeq 10^{23}$) Raum. In diesem Raum gibt es vereinzelte „Blasen“ (entsprechend den makroskopisch unterscheidbaren Zuständen) in denen die Wellenfunktion wesentlich von Null verschieden ist, ansonsten besitzen diese Blasen jedoch keinen Überlapp. Und unsere Einschränkung auf „physikalisch sinnvolle“ Observable bedeutet zusätzlich, dass es keine Operatoren zu Observablen gibt, die eine Blase in den Bereich einer anderen Blase „verschieben“. Sämtliche Observable agieren immer nur innerhalb einer solchen Blase.

Bell mahnt an, dass wir durch die stillschweigende Ersetzung des “and” durch ein “or” den Kollaps der Wellenfunktion postulieren, nicht aber ihn in irgendeinem Sinne quantenmechanisch erklären (“The mystery is then: what has the author [KG] actually derived rather than assumed?”).

Es hat den Anschein, als ob sowohl Bell als auch Gottfried sich mit Gewalt um die Many-Worlds-Interpretation herumdrücken wollen, ohne jedoch den Boden der Quantenmechanik verlassen zu wollen. Worauf Bell aufmerksam macht, ist, dass dies mit den Argumenten von Gottfried nicht möglich ist.

10.7 Der Kollaps der Wellenfunktion

Es fehlt noch die Erklärung des letzten Schritts beim Messprozess, der eigentliche Kollaps der Wellenfunktion. Das 6. Axiom der Kopenhagener Deutung besagte ja, dass der Zustand eines Systems, an dem die Observable S gemessen wurde und der Eigenwert s_n registriert wurde, nach dieser Messung durch den Eigenzustand $|s_n\rangle$ gegeben ist. Wir müssen also klären, wie es zu dem Übergang kommt:

$$|\Phi\rangle \;=\; \sum_n c_n |s_n\rangle|\phi_n\rangle \;\longrightarrow\; |s_n\rangle|\phi_n\rangle$$

bzw., falls man die Ersetzung von $|\Phi\rangle$ durch $\hat{\rho}$ akzeptiert,

$$\hat{\rho} \;=\; \sum_n |c_n|^2 P_{s_n} \otimes P_{\phi_n} \;\longrightarrow\; P_{s_n} \otimes P_{\phi_n} \;.$$

Zu diesem Schritt betrachten wir zunächst einige „Autorenmeinungen“.

10.7.1 Autorenmeinungen

Gottfried

Die Meinung von Gottfried [41] zum Kollaps der Wellenfunktion wurde uns teilweise schon von Bell vorgeführt. Wir fassen einige noch nicht zitierte Stellen zusammen:

(s. 188) ... *only* $|c_m|^2$ appears in the results of *all* observations carried out on the state of the entire system (apparatus + object), and therefore the conventional statistical interpretation of quantum mechanics follows by employing concepts familiar to us on the macroscopic (or classical) level of perception. To be sure, a reduction does occur in the statistical distributions that arise from $\hat{\rho}$, but there is nothing novel to quantum mechanics in this. In classical probability theory the state of a coin following the toss is, say, “heads”, whereas befor the toss it was 50% “tails” and 50% “heads”. In the same way the state of any member of the ensemble is $\hat{\rho}$ after the experimental arrangement has done its work, but immediately after an observation ascertains that, say, the mth possiblity has actually occurred, that particular member is in the ensemble described by $[|s_n\rangle|\phi_n\rangle]$.

Die Haupteinwände gegen die Meinung von Gottfried hat Bell vorgebracht: Gottfried zeigt zunächst, dass ρ und $\hat{\rho}$ durch die eingeschränkte Observablenmenge *ununtescheidbar* sind, fährt dann aber fort, als ob der Zustand des Systems nach der Messung tatsächlich *gleich* $\hat{\rho}$ sei. Dann interpretiert er die verschiedenen Beiträge in $\hat{\rho}$ als alternative Möglichkeiten und benutzt die Analogie zur klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, um den Kollaps der Wellenfunktion - den er nicht abstreitet (“a reduction does occur”) - mit dem Wurf einer Münze vergleichbar zu machen. Er schließt dann noch mit der Bemerkung (S. 189):

The essentially new feature in quantum mechanics is that the wave function is asserted to provide the most complete description conceivable, and that the statistical nature of the theory

cannot (as in the case of coin tossing) be removed by a more detailed theory involving further variables and/or a more precise specification of initial conditions.

Landau & Lifschitz

Landau & Lifschitz geben in §7 ihres Lehrbuches [56] eine kurze Beschreibung des Messprozesses. Sie betonen zunächst den klassischen Charakter des Messinstruments:

Wir betrachten ein System aus zwei Teilen: einem klassischen Gerät und einem Elektron (das als Quantenobjekt angesehen wird). ... Die Zustände des Geräts unterscheiden sich in den Werten einer charakteristischen Größe (oder mehrerer Größen), durch die „Anzeigen des Geräts“. Wir bezeichnen diese Größe mit g und ihre Eigenwerte mit g_n. ... Die Zustände des Geräts werden mit quasiklassischen Wellenfunktionen beschrieben, die wir mit $\Phi_n(\xi)$ bezeichnen werden. ... Der klassische Charakter des Geräts kommt darin zum Ausdruck, dass man in jedem gegebenen Zeitpunkt mit Sicherheit behaupten kann, es befinde sich in einem Zustand Φ_n mit einem bestimmten Wert der Größe g. ...

Landau und Lifschitz argumentieren dann in Analogie zu unseren obigen Überlegungen, dass bei der Messung ein Anfangszustand von Objektsystem und Gerät in einen Zustand

$$\sum_n A_n(q)\Phi_n(\xi)$$

übergeht (q steht für die Koordinate des Elektrons). Nun kommt die Beschreibung des eigentlichen Kollapses des Zustands:

Jetzt treten der „klassische Charakter“ des Gerätes sowie die zwiespältige Rolle der klassischen Mechanik als Grenzfall und gleichzeitig als Grundlage der Quantenmechanik in Erscheinung. Wie schon erwähnt worden ist, hat die Größe g (die „Anzeige des Gerätes“) wegen der klassischen Natur des Gerätes in jedem Zeitpunkt einen bestimmten Wert. Daher kann man feststellen, dass der Zustand des Systems Gerät + Elektron nach der Messung in Wirklichkeit nicht durch die ganze Summe beschrieben wird, sondern nur durch das eine Glied, das zur „Anzeige“ g_n des Gerätes gehört:

$$A_n(q)\Phi_n(\xi)\ .$$

$A_n(q)$ ist folglich proportional zur Wellenfunktion des Elektrons nach der Messung.

Bell schreibt zu dieser Erklärung des Kollapses [6] (S. 6):

This last is (a generalization of) the Dirac jump, not an assumption here but a theorem. Note however that it has become a theorem only in virtue of *another* jump being assumed ... that of a “classical” apparatus into an eigenstate of its “reading”. ...

It remains that the theory is ambiguous in principle, about exactly when and exactly how the collapse occurs,...

Für Landau & Lifschitz liegt die Erklärung des Kollapses in der klassischen Natur des Messgerätes. Doch welche Eigenschaft des Messgerätes es zu einem solchen klassischen Instrument

macht, und wie sich das klassische Verhalten aus dem quantenmechanischen Formalismus ableiten lassen könnte, darauf gehen Landau & Lifschitz nicht ein. Dies steckt in der „zwiespältigen Rolle der klassischen Mechanik als Grenzfall und gleichzeitig als Grundlage der Quantenmechanik“.

Pauli

Zur Reduktion des Wellenpaketes schreibt Pauli unter Ziffer 9 seines Buches [65] (S. 68/69):

> Der Umstand, dass ein bestimmter Messapparat angewandt wurde, kann ... in dem mathematischen Formalismus der Wellenmechanik direkt zum Ausdruck gebracht werden. Anders ist es dagegen mit der Feststellung, die Messung habe ein ganz bestimmtes Resultat ergeben ... Eine solche *Setzung einer physikalischen Tatsache* durch ein nicht zum System gezähltes Messmittel (Beobachter oder Registrierapparat) ist vom Standpunkt des mathematischen Formalismus aus, der direkt nur Möglichkeiten (Wahrscheinlichkeiten) beschreibt, ein besonderer, naturgesetzlich nicht im voraus determinierter Akt, dem nachträglich durch *Reduktion der Wellenpakete* ... Rechnung zu tragen ist.

Pauli versucht also erst gar nicht, innerhalb der Quantenmechanik nach einer Erklärung für den Kollaps zu suchen. Eine solche liegt für ihn außerhalb des Formalismus der Quantenmechanik. Eine ähnliche Auffassung scheinen fast alle „älteren“ Gründer der Quantenmechanik zu vertreten (beispielsweise Bohr, von Neumann oder Wigner). Erst das Bedürfnis, den fundamentalen Charakter der Quantenmechanik zu betonen und von der „lästigen“ Bezugnahme auf einen klassischen Bereich wegzukommen hat dazu geführt, dass nach Erklärungen gesucht wird.

Dawydow

In seiner *Quantenmechanik* schreibt Dawydow [20] zum Messprozess:

> Neben der zeitlichen Änderung der Wellenfunktion ψ infolge der Zustandsänderung unter dem Einfluss der auf das System wirkenden Kräfte, die eindeutig durch die Schrödinger-Gleichung bestimmt wird, behandelt man in der Quantenmechanik noch „Änderungen“ der Wellenfunktion infolge eines Messprozesses. In diesem Falle handelt es sich eigentlich nicht um eine Änderung der Wellenfunktion, sondern es wird eine Wellenfunktion durch eine andere ersetzt, weil die Aufgabenstellung geändert wird - es ändern sich die Anfangsbedingungen.

Dawydow zeigt sich hier als reiner Praktiker. Die Aufgabe der Quantenmechanik ist die Beschreibung von atomaren Systemen in konkreten experimentellen Situationen. Der Messprozess selber ist schon nicht mehr Teil der Quantenmechanik, und die Reduktion der Wellenfunktion daher etwas, was man als Physiker von Hand machen muss.

10.7.2 Erklärungen?

Wir haben oben vier verschiedene Einstellungen zum Kollaps der Wellenfunktion aufgezeigt:

1. Dawydow, der als Pragmatiker den Messprozess nicht mehr zur Quantenmechanik zählt und für den der Kollaps der Wellenfunktion eigentlich durch den Physiker „gemacht“ wird, der neue Anfangsbedingungen setzt.

2. Pauli, der die Unumgänglichkeit eines von der Quantenmechanik ausgeschlossenen Bereiches (Registrierapparat oder Bewusstsein) akzeptiert, und den Kollaps der Wellenfunktion als Axiom hinsichtlich der Interaktion von Quantensystem und diesem „äußeren“ Bereich zur Quantenmechanik hinzunimmt.

3. Landau und Lifschitz, die den Kollaps der Wellenfunktion eines Quantensystems durch die Wechselwirkung mit dem Messapparat erklären, aber die den Kollaps der Wellenfunktion für den Messapparat als Teil seiner klassischen Eigenschaften postulieren.

4. Gottfried, der im Rahmen des Formalismus der Quantenmechanik die praktische Ersetzung von ρ durch $\hat{\rho}$ zeigt, und $\hat{\rho}$ anschließend als rein statistische Dichtematrix mit den alternativen Möglichkeiten und Wahrscheinlichkeiten der klassischen Welt ansieht, so dass der Kollaps zwar auftritt, aber der Reduktion von Wahrscheinlichkeiten bei klassischen Prozessen entspricht. Auch dies ist, wie Bell gezeigt hat, keine Erklärung des Kollapses im Sinne der Quantenmechanik.

Die wenigsten Physiker, die sich mit Grundlagenproblemen der Quantenmechanik befassen, glauben daran, dass sich der Kollaps tatsächlich im Rahmen des quantenmechanischen Formalismus beschreiben lässt. Es gibt jedoch eine ganze Reihe von alternativen Vorschlägen, auf die wir kurz eingehen wollen.

Änderungen der Interpretation der Quantenmechanik

Hierauf beruhen die meisten Erklärungen der Reduktion der Wellenfunktion. Da wir in einem späteren Kapitel noch auf verschiedene Interpretationen der Quantenmechanik eingehen werden, sollen diese Möglichkeiten hier nur erwähnt werden:

1. Die Wellenfunktion beschreibt unser Wissen über einen Zustand. Der Kollaps entspricht der spontanen Änderung unseres Wissens.

2. Die Wellenfunktion beschreibt eine Relation zwischen zwei Teilen des Universums: dem Quantensystem und dem Rest des Universums. Sie kommt daher eher der Grenzfläche zwischen diesen beiden Teilen zu und beschreibt so etwas wie das Wissen des Rests des Universums über das Quantensystem.

3. Die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik: Die Wellenfunktion beschreibt grundsätzlich nur Ensembles von Quantensystemen. Sie ist auf Einzelsysteme nicht anwendbar. Damit umgeht man nahezu alle Grundlagenprobleme der Quantenmechanik, beraubt sie jedoch auch ihres fundamentalen Charakters.

Abänderung der Dynamik der Quantenmechanik

Manche Physiker sind der Überzeugung, dass die Quantenmechanik in der bisher bekannten Form keinen Bestand haben kann. Der unerklärbare Kollaps der Wellenfunktion ist einer der Gründe dafür. Diese Physiker glauben, dass die Dynamik, wie sie durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben wird, nur näherungsweise gültig sein kann und in Wirklich keit durch Terme erweitert werden muss, die zu einem dynamischen Kollaps der Wellenfunktion führen. Beispiele sind

1. Roger Penrose:
   In seinem Buch *The Emperor's New Mind* [67] beschreibt Penrose unter anderem, wie der Einfluss der Gravitation auf die Wellenfunktion zu einem Kollaps führen könnte. Er entwickelt dabei eine direkte Wechselwirkung zwischen der Wellenfunktion eines Systems und der Gravitation. Je schwerer das System ist, das durch die Wellenfunktion beschrieben wird, um so intensiver wirkt die Gravitation und um so rascher kommt es zu einem Kollaps der Wellenfunktion. Während dieser Mechanismus bei Quantensystemen - Atomen oder Elementarteilchen - praktisch nicht nachweisbar ist, wirkt er bei makroskopischen Systemen so rasch, dass der Kollaps nahezu instantan erfolgt.

2. Ghirardi-Rimini-Weber:
   Diese Autoren ändern die Schrödinger-Gleichung explizit ab. Neben dem linaren Anteil der herkömmlichen Quantentheorie gibt es noch einen nichtlinearen Anteil, der für Mikrosysteme zwar schwach ist, aber der für Makrosysteme den „beobachteten" Kollaps der Wellenfunktion beschreibt. Bell scheint ein Anhänger solcher und ähnlicher Versuche zur Beschreibung des Kollaps zu sein.

Die Many-Worlds-Interpretation

Der Kollaps findet gar nicht statt. Allerdings zeigen die uns zur Verfügung stehenden Observablen nur Korrelationen innerhalb einer „Blase" (s.o.) der Wellenfunktion an, und daher erscheint es uns so, als ob ein Kollaps stattgefunden hätte. Auch dieser Interpretation werden wir uns noch ausführlicher widmen. Viele Physiker glauben, dass dies die einzige Möglichkeit ist, den Rahmen der Quantenmechanik nicht zu verlassen. Allerdings halten mindestens ebensoviele Physiker (unter ihnen Bell) diese Theorie für vollkommen absurd, ohne jedoch eine wirkliche Begründung außer einer persönlichen Abneigung gegen die Konsequenzen dieser Vorstellung angeben zu können.

10.8 Against "Measurement"

In einem vielbeachteten Werk mit dem Titel *Against Method*, zu Deutsch *Wider den Methodenzwang*, hat sich er österreichisch-amerikanische Wissenschaftstheoretiker Paul Feyerabend gegen zu rationale Methodologien und strenge Regelsysteme gewandt. Möglicherweise ist die schon oft zitierte Arbeit von John Bell [6] mit dem Titel *Against "Measurement"* eine Anspielung auf

dieses Werk. Soweit John Bell sich in seinem Artikel gegen die herkömmlichen Beschreibungen und Erklärungen des Messprozesses und insbesondere des Kollaps der Wellenfunktion wendet, haben wir schon mehrfach aus diesem Artikel zitiert. Bell wendet sich aber in diesem Artikel nicht nur gegen einige verbreitete Erklärungsversuche, sondern plädiert generell für einen präziseren Spachgebrauch im Zusammenhang mit der Quantenmechanik.

So fordert er beispielsweise, die folgende Liste von Begriffen aus den Erklärungen bzw. der Diskussion der Quantenmechanik herauszunehmen:

1. System, apparatus, environment
   Weil sich diese Begriffe auf eine künstliche Aufspaltung der Welt in zwei oder mehrere Anteile beziehen. Die Intention dahinter sei häufig, die Wechselwirkungen an dieser Grenze zu vernachlässigen oder nur formal zu berücksichtigen.

2. Microscopic, macroscopic, reversible, irreversible
   Diese Begriffe sind nach Bells Ansicht zu ungenau definiert bzw. definierbar.

3. Observable
   Hier zitiert Bell Einstein mit seiner Bemerkung, dass die Theorie selber entscheidet, was eine Observable ist.

4. Observation
   ist für Bell ein „complicated and theory-laden business“. Daher sollte dieser Begriff nicht in der Formulierung einer fundamentalen Theorie auftauchen.

5. Information
   Wessen Information und Information worüber?

6. Measurement
   Bell sagt dazu: „In this list of bad words from good books, the worst of all is “measurement” “.

Kapitel 11

Interpretationen der Quantenmechanik

Auch wenn seit 1927 die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik der „herrschenden Meinung“ entspricht, wurden immer wieder alternative Deutungen der Quantenmechanik formuliert und propagiert. Eine Auswahl der bekanntesten dieser Deutungen folgt in diesem Kapitel.

11.1 Nochmals Kopenhagener Deutung

Die Axiomatik der Kopenhagener Deutung haben wir schon im Zusammenhang mit den Grundlagen der Quantenmechanik (Abschnitt 2.2) angeführt. Nun wollen wir uns nochmals mit den einzelnen Axiomen auseinandersetzen und ihren Inhalt kritisch beleuchten.

11.1.1 Axiom 1: Zustände

Das erste Axiom lautet:
(Reine) physikalische Zustände werden durch (komplex) eindimensionale Teilräume eines separablen Hilbert-Raums dargestellt.

Äquivalent kann man auch von „komplexen Strahlen“ im Hilbert-Raum sprechen oder aber von Äquivalenzklassen von Vektoren, wobei zwei (nichtverschwindende) Vektoren als äquivalent gelten, wenn sie sich in der Multiplikation mit einer komplexen Zahl unterscheiden. Im Rahmen von Dichtematrizen lassen sich reine Zustände auch durch den Projektionsoperator auf den entsprechenden Teilraum darstellen. Als Repräsentanten eines reinen Zustands wählt man oft einen normierten Vektor $|\psi\rangle$ des zugehörigen Teilraums. Ein Zustand ist somit ein Punkt eines projektiven Raumes.

Die Darstellung eines reinen Zustandes durch einen normierten Vektor als Repräsentaten ist so geläufig, dass man oft hört: Reine Zustände sind normierte Vektoren in einem Hilbert-Raum. Mit dieser oberflächlichen Sprechweise sollte man jedoch vorsichtig sein. Die Vektoren eines Hilbert-Raumes lassen sich addieren und man erhält neue Vektoren. Wird die Summe zweier normierter Vektoren wieder auf Eins normiert, so lässt sich auch auf der Menge der normierten Vektoren eine eindeutige (kommutative, jedoch nicht assoziative) Addition definieren. Diese Summe hängt jedoch von der Wahl der Repräsentaten ab und lässt sich daher nicht auf die reinen Zustände übertragen. Wir werden später noch auf das Superpositionsprinzip eingehen, wo diese Problematik besonders deutlich ist.

Kaum ein Physiker zweifelt dieses Axiom an. Auch die (eher technische) Annahme der Separabilität des Hilbert-Raumes (d.h., es gibt eine abzählbare Basis) ist kein Gegenstand von Diskussionen.

Anders ist es jedoch mit der physikalischen Bedeutung des „Zustands“. Die Kopenhagener Interpretation lässt diese Frage offen. Interpretiert werden lediglich die Absolutquadrate von Produkten von Zuständen, und damit beispielsweise auch der Absolutbetrag der Wellenfunktion an einer bestimmten Stelle, $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\psi(x)|^2$ (siehe Axiom 4). Viele der unten angegebenen Interpretationen der Quantenmechanik widmen sich genau dieser Frage. Für einen Verfechter der Kopenhagener Deutung gehört diese Frage jedoch nicht in den Bereich der Quantenmechanik, d.h. nicht zu einer wissenschaftlichen Diskussion. Man vergleiche beispielsweise die Äußerung von von Kampen [53]: *Theorem IV: Whoever endows ψ with more meaning than is needed for computing observable phenomena is responsible for the consequences.*

Vom rein mathematischen (algebraischen) Standpunkt aus betrachtet ist der Zustandsbegriff abgeleitet. Fundamental ist der Begriff der Observablenalgebra. Ist sie gegeben, so sind die Zustände „lineare, positive, normierte“ Funktionale auf dieser Algebra. Dieser Zugang betont also eher die Rolle des Zustands als „das, was man über ein System wissen kann“. Rein intuitiv würde man vielleicht eher den Zustand als das Fundamentale - als „das, was ist“ - ansehen und die Observablenalgebra als „das, was sich am Zustand beobachten lässt“ ableiten. In diesem Fall würde man aber Gefahr laufen, dass man einem Zustand auch Eigenschaften zusprechen könnte, die sich nicht beobachten lassen. Beschränkt man sich auf die beobachtbaren Eigenschaften, so steht die Observablenalgebra eben im Vordergrund.

11.1.2 Axiom 2: Die Observablen

Das zweite Axiom lautet:
Die Observablen an einem physikalischen System werden durch die selbstadjungierten Operatoren des Hilbert-Raumes dargestellt.

Wir hatten schon in Abschnitt (2.2) die Problematik hinter dieser Aussage betont. Da alle (unendlich-dimensionalen) separablen Hilbert-Räume isomorph sind, sind auch die Algebren aller selbst-adjungierten linearen Operatoren isomorph. (Üblicherweise erweitert man die Menge der selbst-adjungierten Operatoren zur Menge aller linearen Operatoren, da diese Algebra wesentlich einfacher strukturiert ist.) Um zu nicht-trivialen Darstellungen zu kommen, muss man der Observablen-Algebra noch weitere Strukturen auferlegen, dazu zählen beispielsweise

die kanonischen Vertauschungsrelationen für Orts- und Impulsoperatoren, die Auszeichnung eines Hamiltonoperators, etc.

Eine weitere Klasse von Problemen bezieht sich auf die Umkehrung des obigen Axioms: Gibt es zu jedem selbst-adjungierten Operator auch eine Observable. Hierbei verstehen wir unter einer Observablen wieder eine Messvorschrift, die durch den Operator repräsentiert wird. Diesem Problem sind wir schon mehrfach begegnet.

Von Neumann hatte für sein Theorem zur Unmöglichkeit von Theorien mit verborgenen Variablen angenommen, dass es zu je zwei Observablen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit den Operatoren A und B auch eine Observable $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ gibt, die durch den Operator $A+B$ repräsentiert wird. Wir hatten jedoch gesehen, dass es zu bekannten Messvorschriften $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ keine Regel gibt, die Messvorschrift für die Observable $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ anzugeben.

Etwas Ähnliches gilt für das Produkt zweier selbst-adjungierter Operatoren. Allerdings ist dieses nur dann wieder selbst-adjungiert, wenn die beiden Operatoren vertauschen, d.h., man muss auf der Menge der selbst-adjungierten Operatoren zunächst ein Produkt $\mathcal{S}(\cdot)$ einführen, beispielsweise das symmetrisierte Produkt (das jedoch nicht assoziativ ist) oder die Wignersche Symmetrisierungs-Vorschrift, die jedoch von der Auszeichnung von Orts- und Impulsoperatoren abhängt. Ist ein solches Produkt definiert, haben wir jedoch wiederum keine Regel, zu zwei Messvorschriften $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit Operatoren A und B die Messvorschrift zu dem Operator $\mathcal{S}(A{\cdot}B)$ anzugeben.

Ein zweites Mal sind wir diesem Problem im Zusammenhang mit den Superauswahlregeln und dem Messprozess begegnet: Entspricht tatsächlich jedem selbst-adjungierten Operator auf dem Hilbert-Raum auch eine Observable, oder ist die eigentliche Observablenmenge nochmals eingeschränkt? Im Fall der Superauswahlregeln galt diese Einschränkung exakt. Im Fall des Messprozesses hatten wir (im Sinne von Gottfried) von „vernünftigen“ bzw. „physikalisch realisierbaren“ Observablen gesprochen. So gehören beispielsweise zu Operatoren, deren Matrixelemente zwischen makroskopisch unterscheidbaren Zuständen nicht verschwinden, keine Observable. Auf die Ungenauigkeit der Definition von „makroskopisch“ in diesem Zusammenhang wurde schon hingewiesen.

11.1.3 Axiom 3: die Messwerte

Axiom 3 lautete:
Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators entspricht den möglichen Messwerten einer Messung der zugehörigen Observablen an dem System.

Dieses Axiom wird eigentlich nie in Zweifel gezogen. Trotzdem sind einige Worte zu seiner Bedeutung angebracht.

Beim Messprozess tritt ein Quantensystem mit einer Messapparatur in Wechselwirkung. Anschließend besteht eine Korrelation zwischen den Zeigerstellungen $|\phi_n\rangle$ des Messgerätes und den Eigenzuständen $|s_n\rangle$ zu der Observablen A, die der entsprechenden Messvorschrift entspricht. Der zugehörige Eigenwert sei λ_n.

Nun ist nicht gesagt, dass die Zeigerstellung $|\phi_n\rangle$ auch tatsächlich den Wert λ_n anzeigt. Dies scheint zunächst eine Frage der Bezeichnung zu sein. Wir könnten als Anzeige beispielsweise auch die Zahl n benutzen. Warum sagen wir, der Messwert sei λ_n?

Betrachten wir zunächst einige Beispiele. Angenommen A entspricht dem Hamilton-Operator eines Atoms. $|s_n\rangle$ wären dann die zugehörigen Eigenzustände, d.h. die verschiedenen Orbitale, und λ_n die Eigenwerte von A bezüglich dieser Zustände. Wenn wir Atome „beobachten“, so sehen wir Spektrallinien. Diese entsprechen dem Übergang zwischen zwei Niveaus und haben eine wohldefinierte Energie. Modulo einer Konstanten können wir somit den einzelnen Niveaus ebenfalls eine Energie zuordnen, und diese entspricht genau den Eigenwerten des Hamilton-Operators. Eine Messung an einem Atom liefert uns also im Allgemeinen nicht die Energie eines Niveaus, sondern Energiedifferenzen zwischen zwei Niveaus. Deren Analyse zeigt dann, dass wir den Niveaus konsistent Energiewerte zuordnen können, die den Eigenwerten des Hamilton-Operators entsprechen.

Ganz ähnlich ist es mit dem Drehimpuls. Wir beobachten bei Atomen nicht den Drehimpuls eines Orbitals selber, sondern wir beobachten Übergänge, bei denen Photonen - also Spin 1 Teilchen - ausgesand werden. Es zeigt sich dann, dass wir den einzelnen Niveaus konsistent Drehimpulswerte zuordnen können, die den Eigenwerten des Drehimpulsoperators entsprechen.

Betrachten wir als letztes Beispiel noch den Stern-Gerlach-Versuch zur Bestimmung einer Spinkomponente. Nachdem das Elektron durch das inhomogene Magnetfeld getreten ist, wird es nach einer von zwei möglichen Richtungen abgelenkt. Irgendwo später wird es auf einer photographischen Platte oder in einem geeigneten Detektor nachgewiesen. Der Ort, an dem das Elektron nachgewiesen wird, hängt dabei empfindlich von dem Gradienten des Magnetfeldes sowie der Entfernung der photographischen Platte hinter dem Magneten ab. Dieser Ort zeigt also nicht unmittelbar, dass der Wert der Spinkomponente in die entsprechende Richtung gleich $\frac{1}{2}\hbar$ ist. Auf diesen „Messwert“ können wir nur im nachhinein schließen, weil wir aus anderen Experimenten - beispielsweise zur Drehimpulserhaltung - wissen, dass die Spinkomponente nur den Wert $\pm\frac{1}{2}\hbar$ haben kann. Die Richtung der Strahlablenkung zeigt an, dass sich das System in einem der beiden möglichen Zustände befindet, aber sie gibt uns nicht den Messwert.

Wenn wir in Axiom 3 fordern, dass λ_n den möglichen Eigenwerten eines Operators A zu einer Observablen $\mathcal{A}$ entspricht, ist das nur bedingt richtig. Die Messgeräte zeigen im allgemeinen nicht diesen Wert an, sondern zeigen uns lediglich, dass sich das System in dem Zustand $|s_n\rangle$ befindet. Dass es sinnvoll ist, diesem Zustand den „Messwert“ λ_n zuzuordnen, folgt im Allgemeinen aus anderen Überlegungen.

11.1.4 Axiom 4: Die Wahrscheinlichkeitsamplituden

Axiom 4 lautet:
Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Observablen zu einem Operator A im Zustand $|\Phi\rangle$ den Messwert λ mit zugehörigem Eigenvektor $|\lambda\rangle$ zu finden, ist gleich $|\langle\lambda|\Phi\rangle|^2$.

In diesem Axiom wird die statistische Interpretation der Quantenmechanik, so wie sie von Bohr und Heisenberg auf der Solvay-Konferenz 1927 propagiert wurde, deutlich. Zusammen

mit Axiom 3 wird hier der Bezug zwischen dem mathematischen Formalismus der Quantenmechanik und physikalisch beobachtbaren Größen hergestellt. Weder dem Zustand $|\Phi\rangle$ noch dem Skalarprodukt $\langle\lambda|\Phi\rangle$ selber wird eine physikalische Bedeutung (im Sinne von experimentell bestimmbar) zugestanden. Nur das Absolutequadrat des Skalarprodukts lässt sich physikalisch beobachten.

Dabei handelt es sich aber nicht um eine physikalische Größe, die zumindest prinzipiell mit einem einzigen Exeriment beliebig genau bestimmt werden kann (wie beispielsweise die Masse eines Teilchens oder seine Ladung), sondern nur um eine Wahrscheinlichkeit. Die Überprüfung der Vorhersage kann nur über den Umweg eines Ensembles gleichartig präparierter Systeme und die Interpretation der Wahrscheinlichkeit als „relative Häufigkeit“ erfolgen. Daher wurde gerade die Gültigkeit dieses Axioms immer wieder in Frage gestellt.

Da wir uns schon mehrfach mit der Problematik dieses Axioms beschäftigt haben, wollen wir es an dieser Stelle bei den obigen Bemerkungen belassen. Auf die Ensembleinterpretation der Quantenmechanik gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

11.1.5 Axiom 5: Die ungestörte Zeitentwicklung eines Quantensystems

Das 5. Axiom lautet:
Die ungestörte Zeitentwicklung eines abgeschlossenen quantenmechanischen Systems wird durch die Schrödinger-Gleichung,

$$-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\Phi\rangle \;=\; H|\Phi\rangle\;,$$

beschrieben, wobei H der Energieoperator des Systems ist.

Grundsätzlich wäre hier zu klären, ob für ein Quantensystem zunächst die Zeitentwicklung bekannt ist und daraus der Hamilton-Operator abgeleitet wird, oder ob umgekehrt - wie es meist in der Quantenmechanik angenommen wird - der Hamilton-Operator bekannt ist und dann die Lösung obiger Gleichung die Zeitentwicklung beschreibt.

Ein häufig vorgebrachter Einwand gegen die Schrödinger-Gleichung ist, sie sei nichtrelativistisch. Dies ist eigentlich nicht richtig. Auch die Dirac-Gleichung - eine relativistische Gleichung - lässt sich mit einem geeigneten Hamilton-Operator in obige Form bringen. Und auch die Gleichungen der relativistischen Quantenfeldtheorie - beispielsweise die Klein-Gordon-Gleichung - lassen sich in die Schrödingersche Form bringen. Allerdings sind die „Wellenfunktionen“ in diesem Fall Funktionale, $\Psi[\{\phi\};t]$, von Feldern ϕ über dem $\mathbf{R}^3$, und der Hamilton-Operator ist ein funktionaler Operator, d.h., er enthält funktionale Ableitungen nach Feldern an bestimmten Raumpunkten. In diesem Fall ist zwar ein bestimmtes Koordinatensystem ausgezeichnet, aber die Wahl eines anderen Systems führt auf eine äquivalente Gleichung.

Die Schrödinger-Gleichung lässt sich auch für nicht-reine Zustände formulieren. Sei ρ die Dichtematrix zu einem Zustand, dann gilt für die Zeitentwicklung dieses Systems:

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\rho \;=\; [H,\rho]\;.$$

Ist H nicht explizit zeitabhängig, lassen sich beide Gleichungen formal integrieren:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right)\Phi(0)\\ \rho(t) &= \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right)\rho(0)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht\right)\ .\end{aligned}$$

Bei explizit zeitabhängigem Hamilton-Operator sind die Exponentialfunktionen durch so genannte zeitgeordnete Produkte zu ersetzen.

11.1.6 Axiom 6: Der Messprozess

Das 6. Axiom lautet:
Nach einer Messung der Observablen A an einem physikalischen System und dem Ergebnis λ als Messwert befindet sich das physikalische System in dem zugehörigen Eigenzustand $|\lambda\rangle$.

Auf die Problematik dieses Axioms sind wir schon im Zusammenhang mit der Diskussion des Messprozesses eingegangen. Wie wir gesehen haben, besteht diese Problematik aus mehreren (möglicherweise eng zusammenhängenden) Aspekten. Zunächst ist da die Aufspaltung der Welt in einen quantenmechanischen und einen klassischen Anteil. Die Bedeutung einer klassischen Welt und einer klassischen Sprechweise zur Beschreibung der Quantenphänomene wurde insbesondere von Bohr immer betont. Ein zweiter Aspekt ist der sogenannte Kollaps der Wellenfunktion im Moment des „Bekanntwerdens“ des Messergebnisses. Und schließlich wurde insbesondere von Bell immer wieder betont, dass der Begriff der Messung für seine Verwendung in einem Axiom nicht gut genug definiert ist.

11.2 Ensemble-Interpretation der QM

Das vierte Axiom bringt den Begriff der Wahrscheinlichkeit in die Axiomatik der Quantenmechanik. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist in seiner Anwendung sehr problematisch. Die Kolmogoroff-Axiome zur Wahrscheinlichkeitstheorie machen nur Aussagen darüber, welche Bedingungen gewisse mathematische Strukturen erfüllen müssen, um als Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet zu werden. Sie sagen aber nicht, was Wahrscheinlichkeit ist.

Wahrscheinlichkeitsaussagen lassen sich nur dadurch falsifizieren, dass man sie an einem großen Ensemble von gleichartigen Systemen nachprüft. Der Begriff der Wahrscheinlichkeit wird dann durch den Begriff der relativen Häufigkeit ersetzt. Da es sich bei den Äußerungen der Quantenmechanik vielfach um Wahrscheinlichkeitsäußerungen handelt bedeutet dies, dass viele observable Größen experimentell überhaupt erst für ein Ensembel von Systemen sinnvoll werden; beispielsweise Größen wie $(\Delta Q)^2$ oder $(\Delta P)^2$, also die Varianzen von Q und P, die in der Unschärferelation auftreten. Hier handelt es sich zwar um Observable, aber der Wert dieser Observablen kann durch kein noch so präzises Messinstrument mit einer einzelnen Messung bestimmt werden. Es erhebt sich also die Frage, ob man eine solche Observable dann überhaupt einem einzelnen System zusprechen soll.

Gerade die Quantenmechanik hat uns gelehrt, dass wir nicht über den Wert von Observablen sprechen sollen, wenn wir nicht gleichzeitig eine Messvorschrift angeben können, die es erlaubt, diesen Wert auch zu bestimmen. Ist es daher überhaupt zulässig, die Observable ΔQ einem Einzelsystem zuzuschreiben, wenn sie doch nur an einem Ensemble von Systemen gemessen werden kann? Genau an dieser Überlegung setzten die Interpretationen der Quantenmechanik an, die die Quantenmechanik gar keinem Einzelsystem zuschreiben wollen. Genau genommen gibt es viele Ensemble Interpretationen, die sich in einzelnen Punkten unterscheiden. Einen umfassenden Überblick liefert der Artikel von Home und Whitaker [49]. Wir wollen hier jedoch nur auf einige grundlegende Ideen eingehen.

Letztendlich scheint die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik auf Einstein zurückzugehen, der sie 1927 auf der Solvay-Konferenz vorgeschlagen hatte (vgl. [5]; S. 30). Einstein schreibt in seinem Buch *Aus meinen späten Jahren* dazu explizit ([28]; S. 97):

> Die ψ-Funktion beschreibt überhaupt nicht einen Zustand, der einem einzelnen System zukommen könnte; sie bezieht sich vielmehr auf so viele Systeme, eine „System-Gesamtheit“ im Sinne der statistischen Mechanik. Wenn die ψ-Funktion abgesehen von besonderen Fällen nur *statistische* Aussagen über messbare Größen liefert, so liegt dies also nicht nur daran, dass *der Vorgang der Messung* unbekannte, nur statistisch erfassbare Elemente einführt, sondern eben daran, dass die ψ-Funktion überhaupt nicht den Zustand *eines* Einzelsystems beschreibt. Die Schrödinger-Gleichung bestimmt die zeitlichen Änderungen, welche die System-Gesamtheit erfährt,...
>
> Dass die Quantenmechanik in so einfacher Weise Aussagen über (scheinbar) diskontinuierliche Übergänge von einem Gesamtzustand in einen andern abzuleiten gestattet, ohne wirklich eine Darstellung des eigentlichen Prozesses zu geben, hängt damit zusammen, dass die Theorie in Wahrheit nicht mit dem Einzelsystem, sondern mit einer System-Gesamtheit operiert.

Damit ist gleichzeitig die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik klar umrissen. Diese Interpretation steht nicht im Gegensatz zu den „Kopenhagener Kochrezepten“ des vorherigen Abschnitts, sondern sie versucht eine Antwort auf die Frage zu finden, auf welches System sich die Wellenfunktion eigentlich bezieht. Die Kopenhagener Schule ist in dieser Frage nicht eindeutig, auch wenn Bohr und Heisenberg oftmals zu einer sehr subjektiven Interpretation (vgl. Abschnitt 11.3) neigen.

Die Ensemble-Interpretation wurde insbesondere von einigen russischen Physikern aufgegriffen und propagiert, da die positivistische - d.h. nur auf dem objektiv Erfahrbaren beruhend - und idealistische - d.h. vom erkennenden Subjekt abhängige - Deutung der Quantenmechanik, wie sie von der Kopenhagener Schule um Bohr und Heisenberg vertreten wurde, für den dialektischen Materialismus unakzeptabel war. So schreibt Lenin 1909 in seinem berühmten Werk *Materialismus und Empiriokritizismus* ([5], S. 29): „Die einzige Eigenschaft der Materie, an deren Anerkennung der philosophische Materialismus gebunden ist, ist die Eigenschaft, objektive Realität zu sein, die außerhalb unseres Bewusstseins existiert“. Man vergleiche diese Aussage mit Heisenbergs Feststellung „Die Bahn eines Elektrons entsteht erst, indem wir sie beobachten“.

Einer der bekanntesten Vertreter der Ensemble-Interpretation und Verfechter „materialisistischer Methodologie“ in der Quantenmechanik ist D.I. Blochinzew. So gibt es in der dritten Auflage seines Lehrbuchs *Grundlagen der Quantenmechanik* [11] einen Anhang mit allgemeinen

Betrachtungen. § 139 widmet sich dabei erkenntnistheoretischen Fragen. Die folgenden Zitate dienen als Beispiel für die ideologische Prägung seiner Deutung der Quantenmechanik:

> Die idealistischen Philosophen bemühen sich, diesen Umbruch [der physikalischen Grundvorstellungen] als Krisis des Materialismus darzustellen.
>
> Bekanntlich haben die philosophierenden Reaktionäre in den Zeiten des Erscheinens von Lenins Werk „Materialismus und Empiriokritizismus“ ebenfalls versucht, den Materialismus mit Hilfe der „allerneuesten“ Ergebnisse der damaligen Physik zu widerlegen. Lenin hat in seiner tiefschürfenden und scharfen Analyse die Haltlosigkeit dieser Versuche aufgezeigt,... Lenin hat aufgedeckt, in welches Gestrüpp philosophischen Wirrwarrs ein Forscher geraten kann, der nicht zwischen dem Umbruch der konkreten physikalischen Vorstellungen von der Materie und der von der Reaktion gepredigten Krise des Materialismus unterscheidet. ...
>
> Das bürgerliche philosophische Denken versucht auch heute die Entwicklung der Naturwissenschaften zu reaktionären, obskuren Zwecken zu missbrauchen. Diese Tendenzen zeugen vom Bestehen einer ununterbrochenen Krise des bürgerlichen philosophischen Denkens, die von ihm nicht überwunden werden kann, weil sie aus seiner ganzen sozialen Natur hervorgeht.
>
> Die Krise des ausländischen philosophischen Denkens spiegelt sich auch in den Aussagen über das Wesen und über die Bedeutung der Quantenmechanik wider. ...

Für Blochinzew ist die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik eine Möglichkeit, seine materialistische Philosophie zu retten. Hier wird der Einfluss ideologischer Vorstellungen auf die Physik besonders deutlich.

Die Ensemble-Interpretation umgeht allerdings eine ganze Reihe von interpretatorischen Problemen der Kopenhagener Deutung. Dazu zählt beispielsweise das Problem des Kollaps der Wellenfunktion. In einem ausreichend großen Ensemble werden sämtliche möglichen Messergebnisse mit der korrekten relativen Häufigkeit auch auftreten. Es findet also gar kein Kollaps statt. Am Ende der Messung liegt eine Dichtematrix der Form $\hat{\rho}$ vor (vgl. Abschnitt 10.4). Ein „Kollaps“ entstünde nur durch den Eingriff des Experimentators. Entscheidet er, für die folgenden Experimente nur die Systeme zuzulassen, bei denen die Messung ein bestimmtes Ergebnis erbracht hat, so wählt er aus dem Ensemble ein Unterensemble aus. Diese Auswahl - die „neuen Anfangsbedingungen“ bei Dawydow (siehe Kapitel 10.7.1) - entspricht dem Kollaps.

Auch die Probleme im Zusammenhang mit dem EPR-Paradoxon werden durch die Ensemble-Interpretation umgangen. Einstein selber schreibt dazu ([28], S. 98):

> Die Quantenmechanik erlaubt dann [durch Messung an einem Teilsystem A eines Gesamtsystems A+B], aus dem Messungsresultat und der ψ-Funktion des Gesamtsystems die ψ-Funktion des Teilsystems B zu bestimmen. Diese Bestimmung liefert aber ein Ergebnis, das davon abhängt, *welche* Zustandsgrößen von A gemessen werden (z.B. Koordinaten *oder* Momente). Da es nur *einen* physikalischen Zustand von B nach der Wechselwirkung geben kann, welcher vernünftigerweise nicht davon abhängig gedacht werden kann, was für Messungen ich an dem von B getrennten System A vornehme, zeigt dies, dass die ψ-Funktion dem physikalischen Zustande *nicht* eindeutig zugeordnet ist. Diese Zuordnung mehrerer ψ-Funktionen zu demselben physikalischen Zustand des Systems B zeigt wieder, dass die ψ-Funktion nicht als (vollständige) Beschreibung eines physikalischen Zustands (eines Einzelsystems) gedeutet werden kann. Die Zuordnung der ψ-Funktion zu einer System-Gesamtheit beseitigt

auch hier jede Schwierigkeit. (Fussnote: Vornahme einer Messung von A bedeutet nämlich dann Übergang zu einer engeren System-Gesamtheit. Letztere (also auch deren ψ-Funktion) hängt davon ab, nach welchem Gesichtspunkt diese Verengung der System-Gesamtheit vorgenommen wird.)

Man erkennt somit, dass die Ensemble-Interpretation hinsichtlich vieler offener Fragen der Kopenhagener Deutung eine Lösung darstellt. Auch die Anhänger von Theorien mit verborgenen Variablen würden die Ensemble-Interpretation bevorzugen. Die Beschreibung durch eine Wellenfunktion ψ erhält man ja dadurch, dass über die verborgenen Variablen gemittelt wird. Somit entspricht diese Beschreibung unmittelbar einem statistischen Ensemble.

Die Ensemble-Interpretation entspricht auch einer positivistischen Einstellung zur Quantenmechanik. Da die Quantenmechanik Wahrscheinlichkeitsaussagen macht und solche Aussagen nur an Ensembles überprüft werden können, sollte für einen strengen Positivisten (sofern er sich überhaupt Gedanken über die begriffliche Bedeutung des an sich nicht beobachtbaren Zustandes macht) die Quantenmechanik auch nur auf Ensembles anwendbar sein. Ein bekannter Vertreter dieser Richtung ist Günther Ludwig.

Doch was sind die Nachteile der Ensemble-Interpretation, dass sie von vielen Physikern abgelehnt wird? Der Hauptgrund dürfte darin liegen, dass eine Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik ihr den Charakter einer wirklich fundamentalen Theorie zu nehmen scheint. Für die Anhänger von Theorien mit verborgenen Variablen ist dies ohnehin der Fall, sodass diese mit der Ensemble-Interpretation gut leben können. Auch Physiker wie Einstein waren wohl der Meinung, dass die Quantenmechanik eher als effektive Theorie einer fundamentaleren Theorie zu verstehen ist. Für strenge Positivisten steht eine statistische Theorie nicht im Widerspruch zu einer fundamentalen Theorie. Tatsächlich sind wir durch die Physik der letzten drei Jahrhunderte in dieser Hinsicht sehr verwöhnt worden.

Doch wer die Quantenmechanik als fundamentale Theorie versteht, möchte sie auch auf Systeme anwenden, von denen sich kein Ensemble präparieren lässt. Insbesondere Anhänger einer Quantenkosmologie müssen die Ensemble-Interpretation natürlich ablehnen.

Nimmt man die Ensemble-Interpretation jedoch Ernst, so muss man natürlich fragen, ab welcher Anzahl von präparierten Systemen man von einem Ensembel sprechen darf, d.h., ab wann die Wellenfunktion zur Beschreibung dieses Ensembels benutzt werden darf. Sind zehn gleichartig präparierte Atome ein Ensembel? Letztendlich hängt das natürlich von der statistischen Genauigkeit ab, die man aus einer relativen Häufigkeit ablesen möchte. Diese wiederum hängt von der Art der Observablen ab, die man messen möchte. Die Anzahl der Systeme, die ein Ensembel bilden, und auf die dann die Wellenfunktion angewandt werden darf, ist somit von der Art der Observablen abhängig, die ich messen möchte, und von der statistischen Genauigkeit, die ich anstrebe. Damit wird aber die Frage, auf welches Ensembel die Wellenfunktion angewandt werden darf, sehr subjektiv. Streng genommen besteht ein Ensembel aus einer unbegrenzten Anzahl von gleichartig präparierten Systemen. Ein solches Ensembel ist aber nie praktisch realisierbar, auch nicht für Mikrosysteme. Das würde aber im Prinzip bedeuten, dass die Wellenfunktion strenggenommen auf überhaupt kein System (oder Ensembel von Systemen) in unserem Universum angewandt werden darf. Wenn wir es trotzdem tun, machen wir eine Näherung. Quantenmechanik wäre damit immer eine Näherung zur Beschreibung der Welt, und zwar nur der Welt, in der gleichartige Präparierungen möglich sind, also beispielsweise nicht

der Makrowelt.

11.3 Die Wellenfunktion als Ausdruck unseres Wissens

Bohr und Heisenberg haben sich immer gegen die Ensemble-Interpretation der Quantenmechanik gewandt, ohne dass sie jedoch klar Stellung bezogen haben, was der Wellenfunktion ψ wirklich für eine Bedeutung zukommen soll. Deutlich wird in ihren Schriften aber eine eher subjektive bzw. idealistische Einstellung zur Quantenmechanik.

Eine extreme Form dieser Deutung sieht die Wellenfunktion nicht als etwas, das einem System selber zukommt, sondern als etwas, das unser Wissen über ein System zum Ausdruck bringt. Ansätze für eine solche Einstellung finden wir teilweise bei Bohr, beispielsweise in seiner Antwort auf das EPR-Paradoxon, wo er zu der Beeinflussung des Systems B durch die Messung an System A schreibt:

> Natürlich ist ... nicht die Rede von einer mechanischen Störung des zu untersuchenden Systems ... Aber [es handelt] sich wesentlich um *einen Einfluss auf die tatsächlichen Bedingungen, welche die möglichen Arten von Voraussagen über das zukünftige Verhalten des Systems definieren.*

Heisenberg wird an anderer Stelle deutlicher, obwohl sich seine Meinung im Laufe der Zeit auch leicht gewandelt hat (aus [19], Fussnote 6):

> The laws of nature which we formulate mathematically in quantum theory deal no longer with the particles themselves but with *our knowledge* of the elementary particles. ... The conception of objective reality ... evaporated into the ... mathematics that represents no longer the behavior of elementary particles but rather *our knowledge* of this behavior.

Diese subjektive Deutung der Wellenfunktion als unser Wissen über ein System umgeht in eleganter Form das Problem des Kollaps der Wellenfunktion. So schreibt Heisenberg in einem Brief an Renninger [70]:

> Der Akt der Registrierung andererseits, der zur Zustandsreduktion führt, ist ja nicht ein physikalischer, sondern sozusagen mathematischer Vorgang. Mit der unstetigen Änderung unserer Kenntnis ändert sich natürlich auch die mathematische Darstellung unserer Kenntnis unstetig.

Insbesondere die Ungereimtheiten im Zusammenhang mit dem Kollaps im de Broglieschen Gedankenexperiment und die scheinbaren Widersprüche zur speziellen Relativitätstheorie werden durch diese Interpretation geschickt umgangen.

Es wurde oft darüber diskutiert, *wie* subjektiv diese Interpretation der Quantenmechanik wirklich zu bewerten ist. Hat jeder Beobachter seine eigene Wellenfunktion, die seinem Wissensstand über ein System entspricht? Generell würde das sicherlich auf Widersprüche führen. So kann Information über ein Quantensystem durch die Messung einer nichtkommensurablen Größe verloren gehen. Ist einem Beobachter diese erneute Messung nicht bekannt, geht er von

Information aus, die nicht mehr gültig ist. Beispielsweise vermutet er das Quantensystem in einem Eigenzustand zum Ortsoperator, wohingegen eine ihm unbekannte Messung das System in einen Eigenzustand zum Impulsoperator gebracht hat. In diesem Fall würde er aufgrund seiner Kenntnisse von falschen Voraussetzungen und somit einer falschen Wellenfunktion ausgehen.

Ebenso verhält es sich, wenn ein Beobachter eine fehlerhafte Information von einem anderen Beobachter erhält. Sei beispielsweise das System in einem wohldefinierten Eigenzustand zur 3-Komponente des Spins, aber die fehlerhafte Information lautet, es befände sich in einem bestimmten Eigenzustand zur 2-Komponente. Auch in diesem Fall werden Vorhersagen aus der fehlerhaften Information nicht mit experimentellen Ergebnissen übereinstimmen.

Andererseits kann es sein, dass einem Beobachter nicht die gesamte Information bekannt ist, die andere Beobachter vielleicht haben. Er benutzt dann zur Beschreibung eine Dichtematrix, die seinem Wissensstand entspricht, obwohl andere Beobachter von einem reinen Zustand ausgehen. Eine einzelne Messung kann in diesem Fall keinen Widerspruch aufdecken, da die Vorhersagen aus der Dichtematrix die Vorhersagen aus dem reinen Zustand enthalten. Lediglich Messungen an einem Ensemble gleicher Systeme wird zeigen, dass sich dieses Ensemble eigentlich in einem reinen Zustand befindet.

Die meisten Physiker tendieren eher zu einer erweiterten Interpretation, die nicht vom einzelnen Subjekt ausgeht. Danach enthält die Wellenfunktion zu einem System die Information, die uns *im Prinzip* zugänglich ist, d.h., die wir unter Kenntnis aller Umstände, die in unserer klassischen Welt von dem System „aufgezeichnet“ wurden, haben können.

In einer erweiterten Form könnte man sagen, die Wellenfunktion enthält die Information darüber, die bei einer Aufspaltung der Welt in ein Quantensystem A und den Rest (einschließlich dem Beobachter) B, bei Kenntnis des Systems B über das System A ausgesagt werden kann. So ordnen manche Physiker die Wellenfunktion der Grenzfläche zwischen System A und System B zu. Ändert man den Schnitt und damit die Grenzfläche, ändert sich auch die Wellenfunktion. Eine konkrete Form, dieser Interpretation einen Sinn zu geben, ist die „relative state“-Interpretation.

Kapitel 12

„Relative States“ und „Consistent Histories“

Den folgenden beiden Interpretationen der Quantenmechanik ist gemein, dass sie versuchen, vom „Beobachter“ und dem klassischen Konzept der „Messung“ loszukommen. Beide versuchen Quantenmechanik in abgeschlossenen Systemen zu formulieren und beide haben sich daher zu den Interpretationen entwickelt, die insbesondere im Rahmen einer Quantenkosmologie von Bedeutung sind.

12.1 “Relative States” und die Many Worlds-Interpretation

Im Jahre 1957 erschien in *Reviews of Modern Physics* eine Arbeit von Hugh Everett mit dem Titel *“Relative State” Formulation of Quantum Mechanics* [33]. Diese Arbeit war eine Zusammenfassung der Ergebnisse seiner Doktorarbeit unter der Leitung von John A. Wheeler, und sie enthielt so viele neuartige und gleichzeitig provokative Elemente, dass Wheeler direkt im Anschluss an die Veröffentlichung von Everett eine „Einschätzung“ dieser Arbeit gab [83], in der er die Grundzüge dieser Interpretation verteidigte. Trotzdem fand die Arbeit von Everett damals kaum Beachtung. Erst über zehn Jahre später, 1970, wird sie von Bryce S. deWitt wieder ausgegraben und populär gemacht [24]. Heute ist diese Interpretation der Quantenmechanik unter der Bezeichnung „Many-World-Interpretation“ bzw. „Vielwelteninterpretation“ bekannt.

Everett betont in der Einleitung:

> The aim is not to deny or contradict the conventional formulation of quantum theory, which has demonstrated its usefulness in an overwhelming variety of problems, but rather to supply a new, more general and complete formulation, from which the conventional interpretation can be *deduced*.

The relationship of this new formulation to the older formulation is therefore that of a metatheory to a theory, that is, it is an underlying theory in which the nature and consistency, as well as the realm of applicability, of the older theory can be investigated and clarified.

Everett möchte insbesondere von den Axiomem 4 und 6 (in unsere Zählung) des Kopenhagener Kochrezeptes wegkommen, d.h., er möchte den Kollaps der Wellenfunktion wie auch die Wahrscheinlichkeitsinterpretation des Absolutsquadrats der Amplituden auf die Entwicklung eines abgeschlossenen Systems nach der Schrödinger-Gleichung zurückführen. Genauer sind für ihn der Kollaps wie auch die Wahrscheinlichkeitsinterpretation nur Dinge, die wir *wahrzunehmen glauben*, weil wir nur einen beschränkten Teil eines Gesamtsystems wahrnehmen können.

Insbesondere drei Fälle möchte Everett mit seiner Formulierung behandeln, welche die herkömmtliche Formulierung der Quantenmechanik nicht behandeln kann:

- Ein isoliertes System, das sowohl aus dem Beobachter bzw. Messapparat wie auch einem Objektsystem besteht.
- Prozesse, bei denen es nur näherungsweise zu einer Messung kommt, d.h., bei denen der Messapparat oder der Beobachter nur schwach und für eine begrenzte Zeit mit dem Objektsystem wechselwirkt.
- Anwendung der Quantenmechanik auf ein geschlossenes Universum, bei dem es keinen außen stehenden Beobachter gibt.

Diese drei Prozesse haben gemeinsam, dass es um die *interne* Anwendung der Quantenmechanik auf *isolierte Systeme* geht.

12.1.1 Relative states

Der wesentliche Begriff, den Everett für seine Metatheorie benutzt, ist der Begriff des „relativen Zustands“ (relative state). Darunter versteht er folgendes:
Gegeben sei ein Gesamtsystem S, das aus zwei Teilsytemen S_1 und S_2 zusammengesetzt sein soll. Die Hilbert-Räume zu den beiden Teilsystemen seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ und somit der Hilbert-Raum zu dem Gesamtsystem $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Das Gesamtsystem sei in dem reinen Zustand Ψ. Dann gibt es zu jedem Zustand $|A\rangle$ des Teilsystems 1 einen „relativen Zustand“ $|B\rangle$ des Teilsystem 2, der folgendermaßen konstruiert wird: Sei $|A_i\rangle$ eine Basis von Teilsystem 1 mit $|A\rangle = |A_k\rangle$ und $|B_i\rangle$ irgendeine Basis von Teilsystem 2. Dann lässt sich $|\Psi\rangle$ schreiben als

$$|\Psi\rangle \;=\; \sum_{ij} \alpha_{ij} |A_i\rangle |B_j\rangle \; .$$

Der zu $|A_k\rangle$ relative Zustand (in Bezug auf $|\Psi\rangle$) ist

$$|\Psi; A_k \mathrm{rel}\rangle \;=\; N \sum_{j} \alpha_{kj} |B_j\rangle \; . \tag{12.1}$$

N ist hierbei eine Normierungskonstante, sodass dieser relative Zustand wieder auf Norm 1 normiert ist. Dieser Zustand ist unabhängig von der gewählten Basis im Teilsystem 2 und auch unabhängig von den zu $|A_k\rangle$ orthogonalen Basisvektoren in Teilsystem 1. Außerdem gilt (bis auf die Normierungen)

$$|\Psi\rangle \;=\; \sum_k |A_k\rangle|\Psi; A_k\mathrm{rel}\rangle \;=\; \sum_k \sum_j \alpha_{kj}|A_k\rangle|B_j\rangle \;. \tag{12.2}$$

Abgesehen von dem seltenen Fall, wenn Ψ separierbar ist, d.h. $\Psi = \varphi \otimes \psi$, ist es somit sinnlos, den Teilsystemen bestimmte Zustände zuzuordnen. Nur wenn für eines der Teilsysteme ein bestimmter Zustand vorliegt (bzw. bekannt ist), so kann man *relativ dazu* dem anderen Teilsystem einen Zustand zuordnen. Everett selber betont dies in einer Art Zusammenfassung:

> Summarizing: There does not, in general, exist anything like a single state for one subsystem of a composite system. Subsystems do not possess states that are independent of the states of the remainder of the system, so that the subsystem states are generally *correlated* with one another. One can arbitrarily choose a state for one subsystem, and be led to the relative state for the remainder. Thus, we are faced with a fundamental *relativity of states*, which is implied in the formalism of composite systems. It is meaningless to ask the absolute state of a subsystem - one can only ask the state relative to a given state of the remainder of the subsystem.

Ein einfaches Bespiel dafür haben wir beim EPR-Paradoxon in der Formulierung von Bohm gesehen. Das Gesamtsystem war im Zustand $\Psi = |S = 0\rangle$. Dieser Zustand lässt sich auf verschiedene Weisen zerlegen, beispielsweise:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle \;=\; |S=0\rangle \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|s_x^1 = +1\rangle|s_x^2 = -1\rangle - |s_x^1 = -1\rangle|s_x^2 = +1\rangle\right) \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|s_y^1 = +1\rangle|s_y^2 = -1\rangle - |s_y^1 = -1\rangle|s_y^2 = +1\rangle\right) \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|s_z^1 = +1\rangle|s_z^2 = -1\rangle - |s_z^1 = -1\rangle|s_z^2 = +1\rangle\right) \;.
\end{aligned}$$

Jede Spinkomponente kommt somit als Basis für die Zerlegung in Frage. Erst wenn wir einen Zustand für System 2 gemessen haben, können wir etwas über den Zustand von System 1 aussagen. Angenommen, wir haben für System 2 den Zustand $|s_z^2\rangle = -1$ gemessen, *dann* wissen wir, dass sich System 1 in dem Zustand $|s_z^1\rangle = +1$ befindet. Es ist also nicht sinnvoll, von einer absoluten Zerlegung des Zustands $|\Psi\rangle$ nach Zuständen von System 1 und 2 zu sprechen, sondern nur von einer *relativen* Zerlegung: *wenn* sich System 2 in einem bestimmten Zustand befindet, *dann* befindet sich System 1 *relativ dazu* in einem bestimmten anderen Zustand.

Relative Zustände treten schon bei von Neumann ([62], Abschnitt VI.2) auf, auch wenn er diese Bezeichnung nicht verwendet. In Abschnitt 10.1 haben wir in Anlehnung an von Neumann gezeigt, dass ein Zustand $|\Psi\rangle$ im Gesamt-Hilbert-Raum zu zwei Teilsystemen zwei Abbildungen F und F^+ von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ (bzw. umgekehrt) definiert. Diese beiden Abbildungen ordnen einem Zustand aus $\mathcal{H}_1$ (bzw. $\mathcal{H}_2$) gerade den (in Bezug auf $|\Psi\rangle$) relativen Zustand in dem anderen Teilsystem zu (vgl. Gleichung 10.1). Bei gegebenem Gesamtzustand $|\Psi\rangle$ ist $F|A_k\rangle \in \mathcal{H}_2$ gerade der relative Zustand zu $|A_k\rangle \in \mathcal{H}_1$.

12.1.2 Beobachtung

Everett konzentriert sich nun auf eine Analyse des Beobachtungsprozesses. Zur Vermeidung einer Diskussion der Prozesse in einem menschlichen Gehirn und des Phänomens Bewusstsein definiert Everett einen „Beobachter“ durch folgende Eigenschaften:

- Der Beobachter soll die Fähigkeit der Erinnerung haben, d.h., der Zustand des Beobachters ändert sich, wenn er das Ergebnis einer Messung registriert hat. Diese Aufgabe können auch Tonbandträger, Filmaufnahmen, Photographien etc. übernehmen.
- Ein Beobachter soll in der Lage sein, seine zukünfigen Entscheidungen über Experimente bzw. zukünftige Beobachtungen nicht nur von den momentaten „Empfindungsdaten“ abhängig zu machen, sondern auch von den vergangenen „Erfahrungen“, d.h. von den registrierten Messdaten.

Für Everett kann somit der Beobachter auch durch eine Maschine mit den oben genannten Eigenschaften ersetzt werden. Nur die genannten Eigenschaften sind für die folgende Diskussion von Relevanz.

Beobachter werden ebenfalls durch Zustandsvektoren Ψ^B beschrieben. Die registrierten Daten vergangener Messungen werden als Index an diesen Zustand geschrieben. Beispielsweise ist $\Psi^B_{[a,b,...,c]}$ der Zustand des Beobachters, der die Ereignisse a, b,..., c registriert hat.

Nun untersucht Everett mehrere Fälle von Beobachtungen. Dabei ist System 1 immer das zu untersuchende Quantensystem, das sich beispielsweise in dem Zustand $\sum_n a_n|s_n\rangle$ befinden soll. System 2 enthält (unter anderem) die Beobachter, also die Maschinen zur Registrierung der Messdaten. Everett nimmt im Folgenden an, dass die Zustände der Maschinen zu verschiedenen Messdaten klassisch unterscheidbar sind, es gibt also keinen Überlapp und auch keine Kohärenzen zwischen diesen Zuständen. Er macht ausgiebig von der dynamischen Entwicklung (nach der Schrödinger-Gleichung) beim Messprozess Gebrauch:

$$\left(\sum_n a_n|s_n\rangle\right) \otimes \Psi^B[...] \;\longrightarrow\; \sum_n \left(a_n|s_n\rangle \otimes \Psi^B_{[...,s_n]}\right) .$$

Zunächst zeigt Everett, dass eine Wiederholung des Experiments am selben System (im selben Zustand) für einen Beobachter auch zum selben Messergebnis führt:

$$\left(\sum_n a_n|s_n\rangle\right) \otimes \Psi^B_{[...]} \;\longrightarrow\; \sum_n a_n \left(|s_n\rangle \otimes \Psi^B_{[...,s_n]}\right) \;\longrightarrow\; \sum_n a_n \left(|s_n\rangle \otimes \Psi^B_{[...,s_n,s_n]}\right) .$$

Hat ein Beobachter also einmals das Ergebnis s_n registriert, so wird für ihn eine Messung an demselben System auch immer wieder dasselbe Ergebnis s_n ergeben.

Führt ein Beobachter dieselbe Messung an *verschiedenen*, identisch präparierten Systemen durch, so wird er i.A. verschiedene Messergebnisse registrieren:

$$\left[\left(\sum_{n_1} a_{n_1}|s_{n_1}\rangle\right)\left(\sum_{n_2} a_{n_2}|s_{n_2}\rangle\right)...\left(\sum_{n_N} a_{n_N}|s_{n_N}\rangle\right)\right] \Psi^B_{[...]} \;\longrightarrow$$

$$\left[\left(\sum_{n_1} a_{n_1}|s_{n_1}\rangle\right)\left(\sum_{n_2} a_{n_2}|s_{n_2}\rangle\right)...\right]\left(\sum_{n_N} a_{n_N}|s_{n_N}\rangle\Psi^B_{[...,s^N_{n_N}]}\right) \longrightarrow$$
$$\left[\sum_{n_1,n_2,...,n_N} a_{n_1}a_{n_2}...a_{n_N}\left(|s_{n_1}\rangle|s_{n_2}\rangle...|s_{n_N}\rangle\right)\Psi^B_{[s^1_{n_1},s^2_{n_2},...,s^N_{n_N}]}\right] \quad .$$

Everett möchte nun jeder solchen Messsequenz $[s^1_{n_1}, s^2_{n_2}, ..., s^N_{n_N}]$ ein Maß zuordnen, das für einen intrinsischen Beobachter als die Wahrscheinlichkeit interpretiert wird, mit der er diese Sequenz beobachtet. Er leitet dieses Maß aus einer Konsistenzforderung her. Angenommen, wir haben eine Superposition normierter, orthogonaler Zustände ϕ_i von der Form

$$\alpha\phi' \;=\; \sum_i a_i\phi_i \;,$$

wobei ϕ' wiederum ein normierter Zustand sein soll. Daraus folgt schon $\alpha^2 = \sum_i a_i^* a_i$. Er fordert nun, dass das Maß für den Zustand ϕ' (das nur von α abhängen kann) gleich der Summe der Maße der Zustände ϕ_i ist, also

$$m(\alpha) \;\equiv\; m\left((\sum_i a_i^* a_i)^{1/2}\right) \;=\; \sum_i m(a_i) \;.$$

Dies ist eine algebraische Gleichung mit der einzigen Lösung: $m(a) = a^*a$ (bis auf eine Konstante, die durch die Gesamtnormierung des Maßes festgelegt ist). Jede Ereigniskette der obigen Form hat somit das Maß

$$m[s^1_{n_1}, s^2_{n_2}, ..., s^N_{n_N}] \;=\; \prod_i (a_i^* a_i) \;.$$

Dieses Maß faktorisiert, so dass $a_i^* a_i$ als die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses s_i interpretiert werden kann.

Everett untersucht noch weitere Fälle, beispielsweise wenn mehrere Beobachter an demselben System Messungen vornehmen. In diesem Fall gilt:

$$\left(\sum_n a_n|s_n\rangle\right)\otimes\Psi^{B_1}_{[...]}\Psi^{B_2}_{[...]} \;\longrightarrow\; \left(\sum_n a_n|s_n\rangle\otimes\Psi^{B_1}_{[...,s_n]}\right)\Psi^{B_2}_{[...]}$$
$$\longrightarrow\; \sum_n a_n\left(|s_n\rangle\otimes\Psi^{B_1}_{[...,s_n]}\Psi^{B_2}_{[...,s_n]}\right) \;.$$

Zwei Beobachter messen an einem System somit immer dasselbe. Es gibt keinen Widerspruch zwischen ihren Messergebnissen und sie können ihre Erfahrungen widerspruchsfrei austauchen und miteinander kommunizieren. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieses korrelierten Ereignisses ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Einzelereignisses der Messung des ersten Beobachters.

12.1.3 Interpretation

In Everetts Formulierung tritt niemals eine Reduktion der Wellenfunktion auf. Die Wellenfunktionen „verzweigen" sich lediglich in verschiedene Zweige, die keine Kohärenzen mehr haben

und die voneinander „nichts mehr wissen“. Wodurch solche dekohärenten Zweige ausgezeichnet sind - also die Frage nach der Auszeichnung der klassischen Zeigenbasis - klärt Everett nicht weiter. Dies folgt letztendlich aus den Überlegungen zur Dekohärenz von Quantensystemen mit vielen Freiheitsgraden. Jedem solchen Zweig kann er ein Maß zuordnen, das durch eine einfache Konsistenzbedingung auf das bekannte Wahrscheinlichkeitsmaß der Quantenmechanik festgelegt ist.

Everett kann somit in seiner Formulierung die Axiome 4 und 6 durch das Axiom 5 (Entwicklung eines Systems nach der Schrödinger-Gleichung) „erklären“. Im Prinzip ist auch Axiom 3 damit auf Axiom 5 zurückgeführt. Wenn wir an eine Reduktion der Wellenfunktion glauben, so nur deshalb, weil wir die anderen Zweige nicht mehr wahrnehmen können und sich somit (ganz im Sinne Dawydows, vgl. Abschnitt 10.7.1) die Anfangsbedingungen ändern.

Zu dem Problem, dass in der Quantenmechanik letztendlich nur ein Zweig von den „Möglichkeiten“ zur „Realität“ wird, schreibt Everett in einer Fussnote:

> In reply to a preprint of this article some correspondents have raised the question of the “transition from possible to real”, arguing that in “reality” there is - as our experience testifies - no such splitting of observer states, so that only one branch can ever actually exist. Since this point may occur to other readers the following is offered in explanation.
>
> The whole issue of the transition from “possible” to “actual” is taken care of in the theory in a very simple way - there is no such transition, nor is such a transition necessary for the theory to be in accord with our experience. From the viewpoint of the theory *all* elements of a superposition (all “branches”) are “actual,” none any more “real” than the rest. It is unnecessary to suppose that all but one are somehow destroyed, since all the separate elements of a superposition individually obey the wave equation with complete indifference to the presence or absence (“actuality” or not) of any other elements. This total lack of effect of one branch on another also implies that no observer will ever be aware of any “splitting” process.
>
> Arguments that the world picture presented by this theory is contradicted by experience, because we are unaware of any branching process, are like the criticism of the Copernican theory that the mobility of the earth as a real physical fact is incompatible with the common sense interpretation of nature because we feel no such motion. In both cases the argument fails when it is shown that the theory itself predicts that our experience will be what it in fact is. (In the Copernican case the addition of Newtonian physics was required to be able to show that the earth’s inhabitants would be unaware of any motion of the earth.)

12.1.4 Reaktionen

12.2 Consistent Histories

Im Jahre 1984 erschien eine Arbeit von Robert B. Griffiths mit dem Titel „Consistent Histories and the Interpretation of Quantum Mechanics“. In dieser Arbeit wurde der Grundstein für einen neuen Zugang zur Interpretation der Quantenmechanik, insbesondere unter dem Gesichtspunkt, wie sich in einem abgeschlossenen quantenmechanischen System ein klassischer Grenzfall ein-

stellt, gelegt. In der Folge haben insbesondere Omnes [63, 64] und Gell-Mann und Hartle [35] diesen Zugang aufgegriffen, erweitert und verfeinert. Eine ausführliche Analyse von Dowker und Kent [25] aus dem Jahre 1996 hat allerdings vielen Hoffnungen, in diesem Zugang die Lösung so mancher klassischer Probleme im Zusammenhang mit der Interpretation der Quantenmechanik zu sehen, einen Dämpfer gesetzt.

12.2.1 Histories

12.2.2 Beispiele von Histories

Wir betrachten einige Beispiele von Histories, die insbesondere unter dem noch zu definierenden Kriterium der „Konsistenz“ von Interesse sind.

Das Doppelspaltexperiment

Wir betrachten ein Teilchen mit wohldefiniertem Impuls, das durch einen Doppelspalt hindurch auf eine photographische Platte trifft. Der Anfangszustand sei $|\phi\rangle$, der Endzustand $\psi\rangle$.

Schließen wir Spalt 2, so können wir als Geschichte angeben: Das Teilchen startet in Zustand ϕ, tritt durch Spalt 1 hindurch (Projektionsoperator auf Spaltbreite P_1) und endet in Zustand ψ. Diese Geschichte hat die Wahrscheinlichkeit:

$$w_1 \;=\; \mathrm{Tr}\,(P_\psi P_1 P_\phi P_1)\;.$$

Schließen wir statt dessen Spalt 1 und lassen Spalt 2 geöffnet, so gilt

$$w_2 \;=\; \mathrm{Tr}\,(P_\psi P_2 P_\phi P_2)\;.$$

Haben wir jedoch beide Spalte geöffnet, so ist

$$w_{\mathrm{ges}} \;=\; \mathrm{Tr}\,(P_\psi P_\phi) \;=\; |\langle\phi|\phi\rangle|^2\;.$$

Offensichtlich gilt *nicht*:

$$w_{\mathrm{ges}} \;=\; w_1 + w_2\;. \tag{12.3}$$

In der klassischen Physik würde man eine solche Relation erwarten. w_1 ist eine Art bedingte Wahrscheinlichkeit: Es ist die Wahrscheinlichkeit des Teilchens von Zustand ϕ zu Zustand ψ zu gelangen, unter der Bedingung, dass es Zustand (Spalt) 1 durchläuft. Entsprechend ist w_2 die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Teilche von ϕ zu ψ gelangt, unter der Bedingung, dass es Spalt 2 durchläuft. Sind beide Spalte geöffnet, gilt in der klassischen Physik ein „entweder - oder“ und somit gälte Gl. 12.3. In der Quantenmechanik addieren sich aber die *Amplituden*, und das impliziert im Allgemeinen nicht die Addition der Wahrscheinlichkeiten.

12.2.3 Consistent Histories

Kapitel 13

Quanteninformation

Seit Mitte der 80er Jahre (des 20. Jahrhunderts) hat sich die Quanteninformation zu einem eigenständigen Gebiet entwickelt. Begriffe wie „Quantenrechnung“, „Quanten-Teleportation“, „Quantenkryptographie“ etc. gehören heute zum Alltag in der Informationstechnologie. Die folgenden Abschnitte können nur einen kleinen Einblick in dieses weitreichende Gebiet geben. Viele der Überlegungen stammen aus dem 16. Kapitel des Buchs „Optics“ von H. Römer [71]. Interessante Informationen findet man aber auch in [79, 10, 69].

13.1 Klassische Information

Die elementare Einheit der Informationstheorie ist das *Bit*, ein Element der Menge $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$. Die Objekte der Informationstheorie sind Folgen von Bits, also Elemente von $\mathbf{Z}_2^N$. Die Operationen in der Informationstheorie bestehen aus Umformungen solcher Bit-Ketten. Die einfachste dieser Operation (neben der Identität) ist die Negation:

$$\neg : \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z_2} \quad \text{mit} \quad 0 \to 1 \quad \text{und} \quad 1 \to 0\,.$$

Wir können die Negation auch als einfache Permutationsmatrix ausdrücken:

$$\text{NOT} \;\sim\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13.1}$$

Außerdem gibt es verschiedene Abbildungen von $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \to \mathbf{Z}_2$, von denen die wichtigsten in nebenstehender Tabelle zusammengefasst sind. Es lässt sich zeigen, dass sich sämtliche 16 Möglichkeiten für solche binären Bool'schen Funktionen auf zwei Funktionen reduzieren lassen: die NAND-Funktion und und Negation.

Bezeichnung \ Bit-Paar	x_1	0	0	1	1
	x_2	0	1	0	1
Konjunktion (AND)		0	0	0	1
Disjunktion (OR)		0	1	1	1
Nicht und (NAND)		1	1	1	0
Nicht oder (NOR)		1	0	0	0
Äquivalenz		1	0	0	1
Antivalenz (XOR)		0	1	1	0
Implikation		1	0	1	1

Besonders interessant ist die XOR-Transformation. Wenn wir den Wert von x_1 als einen Kontrollparameter auffassen, und der Wert für x_2 durch das Ergebnis von XOR ersetzt wird, so erhalten wir folgende Vorschrift: Wenn $x_1 = 0$ ist wird x_2 nicht verändert. Ist $x_1 = 1$ wird x_2 negiert. Insbesondere gilt:

$$\text{XOR}: \quad (0,0) \to (0,0) \qquad \text{und} \qquad (1,0) \to (1,1)\,.$$

Allgemein ausgedrückt:

$$(x,0) \to (x,x)\,.$$

Diese Vorschrift kann also eine Kopie des Zustands x herstellen. In der klassischen Informationstheorie lassen sich Zustände beliebig vervielfältigen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von „klonen".

Auf eine Folge von N bits können im Prinzip 2^N verschiedene Operationen wirden. Es lässt sich allerdings zeigen, dass man sämtliche Operationen auf Operationen an zwei Bits sowie eine Shift-Operation (die zyklisch alle Bits um eine Stelle verschiebt) zurückführen lassen.

13.2 Qubits

Wenn wir in einem tatsächlich existierenden Computer einzelne Bits speichern wollen, so benötigen wir dafür physikalische Systeme, die zwei Zustände einnehmen können. Das können beispielsweise planar polarisierte Photonen sein, die „horizontal" $|\leftrightarrow\rangle$ oder „vertikal" $|\updownarrow\rangle$ polarisiert sind, oder zirkular polarisierte Photonen die „rechts" $|r\rangle$ bzw. „links" $|l\rangle$ polarisiert sind. Es kann sich aber auch um Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen handeln, die sich bezüglich einer ausgezeichneten Achse im „up" $|\uparrow\rangle$ bzw. „down" $|\downarrow\rangle$ Zustand befinden. Auch Atome kommen in Frage, die im Grundzustand $|g\rangle$ oder auch in einem angeregten $|e\rangle$ Zustand sein können. Ganz allgemein schreiben wir im Folgenden immer $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$.

Da es sich in allen Fällen um Quantensysteme handelt, kommen an dieser Stelle neue Möglichkeiten ins Spiel: Der Zustand des Systems kann sich in einer beliebigen Superposition der beiden ausgezeichneten Zustände befinden:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\,,$$

mit

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,. \tag{13.2}$$

Schreiben wir $\alpha = a_1 + \mathrm{i}a_2$ und $\beta = b_1 + \mathrm{i}b_2$ (mit $a_i, b_i \in \mathbf{R}$), so beschreibt Bedingung 13.2 eine 3-Sphäre in einem 4-dimensionalen Raum. Da sich der Zustand durch eine Phasentransformation nicht ändert, lässt sich die Menge aller Zustände als $S^3/S^1 \simeq S^2$, also eine 2-Sphäre, beschreiben.

Oft wird folgendes Bild zur Veranschaulichung der (reinen) Zustände verwendet: Der Nord- bzw. der Südpol der 2-Sphäre entsprechen den klassischen Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Der Breitengrad kennzeichnet das Mischungsverhältnis (Breitengrad 0° entspricht gleichen Anteilen von $|0\rangle$ und $|1\rangle$) und der Längengrad kennzeichnet den relativen Phasenwinkel zwischen beiden Zuständen.

Neben den beiden klassischen Operationen auf ein einzelnes Bit - der Identität und der Negation (Gl. 13.1) - kann nun die gesamte $SU(2)$ als Transformationsgruppe auf die Zustände wirken. Die meisten dieser Transformationen überführen die klassischen Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ in Superpositionen.

Eine Folge von N Qubits entspricht nun einem Vektor im $\mathcal{H}_2^N$. Ein allgemeiner Zustand hat nun die Form:

$$|\psi\rangle = \sum_{x_i=0,1} c_{x_1,x_2,\ldots} |x_1, x_2, ..., x_N\rangle \,.$$

Eine allgemeine Operation auf diesem Zustand ist ein Element der $SU(2^N)$. Auch hier lässt sich jedoch zeigen, dass alle Operationen auf spezielle Operationen an zwei Bits sowie eine Shift-Operation zurückgeführt werden können.

Ist N beispielsweise 10, so entspricht einer klassischen Folge aus 10 Bits eine bestimmte Zahl zwischen 0 und $2^{10} - 1 = 1023$. In einem einzelnen Quantenzustand können wir jedoch eine Superposition aus *sämtlichen* Zahlen zwischen 0 und 1023 abspeichern. In gewisser Hinsicht können wir nun an sämtlichen Zahlen gleichzeitig eine Operation vornehmen. Diese Möglichkeit - die gleiche Rechenoperation an allen möglichen Folgen gleichzeitig durchführen zu können - bezeichnet man manchmal auch als *massiven Parallelismus*.

Betrachten wir speziell zwei Qubits. Eine mögliche Basis des zugehörigen Hilbertraums ist:

$$\begin{aligned} |0,0\rangle &= |0\rangle \otimes |0\rangle \\ |0,1\rangle &= |0\rangle \otimes |1\rangle \\ |1,0\rangle &= |1\rangle \otimes |0\rangle \\ |1,1\rangle &= |1\rangle \otimes |1\rangle \,. \end{aligned}$$

Diese Basis ist dadurch ausgezeichnet, dass sämtliche Basisvektoren faktorisieren, also separierbar sind. Für viele der folgenden Überlegungen benötigen wir jedoch eine Basis, in der die Zustände maximal verschränkt sind. Eine solche Basis bezeichnet man auch als *Bell-Zustände*. Wir werden meist die folgende Basis von Bell-Zuständen verwenden:

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle) \,, \\ |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) \,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\Phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle)\,, \\
|\Phi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle),
\end{aligned}
$$

In $|\Phi_1\rangle$ erkennen wir den EPR-Zustand wieder. $|\Phi_1\rangle$ und $|\Phi_2\rangle$ beschreiben jeweils eine totale Antikorrelation in der Verschränkung, während $|\Phi_3\rangle$ und $|\Phi_4\rangle$ einer absoluten Korrelation entsprechen. Da diese vier Zustände jeweils orthogonal sind gibt es auch einen selbstadjungierten Operator, mit dem sich diese Zustände ausmessen lassen, beispielsweise:

$$
B = \sum_{i=1}^{4} a_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i|\,.
$$

Ein Messwert a_i zeigt an, dass sich das System nun im Zustand $|\Phi_i\rangle$ befindet. Einen solchen Operator zum Ausmessen der Bell-Zustände bezeichnen wir als *Bell-Operator* und die zugehörige Messvorschrift als *Bell-Messung*. Es sollte allerdings an dieser Stelle erwähnt werden, dass eine solche Bell-Messung nicht leicht zu realisieren ist.

Wir werden später auch die Umkehrtransformation benötigen, d.h. die Zerlegung der separierbaren Basiszustände nach Bell-Zuständen:

$$
\begin{aligned}
|0,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_3\rangle + |\Phi_4\rangle) \\
|0,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_1\rangle + |\Phi_2\rangle) \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_2\rangle - |\Phi_1\rangle) \\
|1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi_4\rangle - |\Phi_3\rangle)\,.
\end{aligned}
\tag{13.3}
$$

Interessant ist, dass wir jeden beliebigen dieser Bell-Zustände durch eine unitäre Transformation *an einem der beiden Teilsysteme* in jeden anderen dieser Bell-Zustände überführen können. Betrachten wir als Beispiel $|\Phi_1\rangle$. Durch die Transformation

$$
U_1 = \mathbf{1} \otimes \sigma_3 \tag{13.4}
$$

wird daraus $|\Phi_2\rangle$:

$$
|\Phi_2\rangle = U_1 |\Phi_1\rangle\,. \tag{13.5}
$$

Entsprechend gilt:

$$
|\Phi_3\rangle = U_2 |\Phi_1\rangle \quad \text{mit} \quad U_2 = \mathbf{1} \otimes \sigma_1\,. \tag{13.6}
$$

Und schließlich erhält man $|\Phi_4\rangle$ durch eine Kombination dieser beiden Operationen:

$$
|\Phi_4\rangle = U_3 |\Phi_1\rangle \quad \text{mit} \quad U_3 = \mathbf{1} \otimes \sigma_3\sigma_1\,. \tag{13.7}
$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch ein wichtiges Theorem bewiesen werden: das No-cloning-Theorem. Hierbei handelt es sich um die Aussage, dass man von einem beliebigen, unbekannten Quantenzustand keine Kopie herstellen kann. Etwas präziser ausgedrückt: Es

gibt keine universelle „Zustands-Verdopplungsmaschine“ oder „Kloning-Maschine“, die einen beliebigen Zustand $|\varphi\rangle$ in einen Zustand $|\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ überführt.

Beweis: Eine Kloning-Maschine entspräche einem linearen Operator V, der folgende Eigenschaft hat:

$$V(|\Phi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = |\Phi'\rangle \otimes |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle \qquad \text{für alle } \ |\varphi\rangle \in \mathcal{H}\,. \tag{13.8}$$

Für diesen Operator müsste einerseits gelten:

$$\begin{aligned} V\big(|\Phi\rangle \otimes (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)\big) &= V(|\Phi\rangle \otimes |\varphi_1\rangle) + V(|\Phi\rangle \otimes |\varphi_2\rangle) \\ &= |\Phi'\rangle \otimes |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle + |\Phi''\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_2\rangle\,, \end{aligned} \tag{13.9}$$

und andererseits:

$$V\big(|\Phi\rangle \otimes (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)\big) = |\Phi'''\rangle \otimes (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) \otimes (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)\,. \tag{13.10}$$

Offensichtlich können die Gleichungen (13.9) und (13.10) nicht für beliebige $|\varphi_1\rangle$ und $|\varphi_2\rangle$ erfüllt sein.

Das No-Kloning-Theorem besagt natürlich nicht, dass man einen Quantenzustand überhaupt nicht kopieren kann. Ein bekannter Zustand lässt sich beispielsweise beliebig oft präparieren. Auch wenn der Zustand nicht bekannt ist, wenn wir aber wissen, dass es sich um einen reinen Zustand bezüglich einer bestimmten Observablen handelt, können wir beliebig viele Kopien dieses Zustands herstellen. Etwas anders ausgedrückt besagt das No-Kloning-Theorem, dass sich ein unbekannter Zustand durch eine Messung nicht vollständig bestimmen lässt.

13.3 Quanten-Teleportation

Auch wenn sich ein unbekannter Zustand nicht verdoppeln lässt, so kann man doch von einem unbekannten Zustand eine Kopie an einem anderen Ort erzeugen. Der Preis ist allerdings, dass der Ausgangszustand dadurch zerstört wird.

Statt im Folgenden immer von Person A und Person B zu sprechen, übernehmen wir den allgemeinen Brauch der Informationstechnologie und sprechen von zwei hypothetischen Personen *Alice* und *Bob*. Kommt noch eine dritte Person ins Spiel (beispielsweise in der Quantenkryptographie der unerwünschte Lauscher - englisch *eavesdropper*) so heißt diese Person meist *Eve*.

Angenommen, Alice möchte einen unbekannten Photonenzustand

$$|\varphi\rangle_1 = c_0|0\rangle_1 + c_1|1\rangle_1$$

zu Bob teleportieren. Dieses Photon bezeichnen wir als Photon 1. Bob muss zuvor ein verschränktes Photonenpaar (Photonen 2 und 3) erzeugen (beispielsweise im Zustand $|\Phi_4\rangle$). Eines der beiden Photonen (beispielsweise Photon 2) schickt er Alice, wobei der verschränkte Zustand natürlich erhalten bleiben muss. Das Gesamtsystem aus drei Photonen befindet sich nun

im Zustand:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= |\varphi\rangle_1 \otimes |\Phi_4\rangle_{2,3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(c_0|0\rangle_1 + c_1|1\rangle_1\big) \otimes \big(|0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 + |1\rangle_2 \otimes |1\rangle_3\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(c_0|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 + c_0|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes |1\rangle_3 \\
&\quad + c_1|1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_3 + c_1|1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes |1\rangle_3\big)\,.
\end{aligned}$$

Diesen Zustand können wir bezüglich der Photonen 1 und 2 nach Bell-Zuständen zerlegen (vgl. Gl. 13.3):

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{1}{2}\big(c_0|\Phi_3\rangle_{1,2} + c_0|\Phi_4\rangle_{1,2} + c_1|\Phi_2\rangle_{1,2} - c_1|\Phi_1\rangle_{1,2}\big) \otimes |0\rangle_3 \\
&\quad + \big(c_0|\Phi_1\rangle_{1,2} + c_0|\Phi_2\rangle_{1,2} + c_1|\Phi_4\rangle_{1,2} - c_1|\Phi_3\rangle_{1,2}\big) \otimes |1\rangle_3 \\
&= \frac{1}{2}\Big(|\Phi_1\rangle_{1,2} \otimes (-c_1|0\rangle_3 + c_0|1\rangle_3) + |\Phi_2\rangle_{1,2} \otimes (c_1|0\rangle_3 + c_0|1\rangle_3) \\
&\quad + |\Phi_3\rangle_{1,2} \otimes (c_0|0\rangle_3 - c_1|1\rangle_3) + |\Phi_4\rangle_{1,2} \otimes (c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass es sich immer noch um denselben Zustand $|\Psi\rangle$ handelt, der bezüglich der Photonen 2 und 3 verschränkt ist, wohingegen Photon 1 noch separabel ist. Bisher haben wir lediglich eine Basistransformation vorgenommen.

Alice macht nun eine Bell-Messung an ihrem Photonenpaar 1 und 2. Dabei zerstört sie den unbekannten Photonenzustand $|\varphi\rangle_1$. Aus dem Messergebnis a_i kann sie ablesen, dass nun einer von vier möglichen Bell-Zuständen bei Ihr vorliegt. Das bedeutet, dass sich das verbliebene Photon 3 bei Bob in einem der folgenden Zustände befindet:

$$\begin{aligned}
a_1 &\qquad |\psi_1\rangle_3 = -c_1|0\rangle_3 + c_0|1\rangle_3 \\
a_2 &\qquad |\psi_2\rangle_3 = c_1|0\rangle_3 + c_0|1\rangle_3 \\
a_3 &\qquad |\psi_3\rangle_3 = c_0|0\rangle_3 - c_1|1\rangle_3 \\
a_4 &\qquad |\psi_4\rangle_3 = c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3\,.
\end{aligned}$$

Alice schickt nun eine Nachricht an Bob (durch einen klassischen Informationskanal, beispielsweise einem gewöhnlichen Telefon) und teilt ihm das Ergebnis ihrer Messung mit. Da es vier mögliche Ergebnisse gibt, handelt es sich um eine klassische 2-Bit-Nachricht. Je nachdem, welches Messergebnis a_i Alice erhalten hat, führt Bob eine von vier unitären Transformationen an seinem Photon aus:

$$\begin{aligned}
a_1 &\qquad (\sigma_3\sigma_1)|\psi_1\rangle_3 = c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3 \\
a_2 &\qquad \sigma_1|\psi_2\rangle_3 = c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3 \\
a_3 &\qquad \sigma_3|\psi_3\rangle_3 = c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3 \\
a_4 &\qquad \mathbf{1}\,|\psi_1\rangle_3 = c_0|0\rangle_3 + c_1|1\rangle_3\,.
\end{aligned}$$

In allen vier Fällen erhält Bob für sein Photon den Zustand $|\varphi\rangle_3$, also eine identische Kopie des ursprünglichen Zustands $|\varphi\rangle_1$, der bei diesem Prozess zerstört wurde.

Man beachte, dass die Zustände $|\psi_i\rangle_3$ nicht orthogonal sind. Ansonsten könnte Bob durch eine Messung an seinem Photon feststellen, welches Messergebnis Alice erhalten hat und der klassische Informationskanal wäre überflüssig.

13.4 „Quantum dense coding“ oder „Superdense coding“

Unter dem Begriff *quantum dense coding* bzw. *superdense conding* versteht man ein Verfahren, klassische Information mithilfe von Quanteninformation dichter zu kodieren. Konkret bedeutet das: Bob kann beispielsweise an Alice eine klassische 2-Bit-Nachricht mit nur einem einzigen Photon übermitteln. Dieses Verfahren wurde 1992 von Charles Bennett und Stephen Wiesner entdeckt.

Die Idee ist vergleichsweise einfach: Alice hat beispielsweise den Zwei-Photonen Bell-Zustand $|\Phi_4\rangle$ präpariert und schickt Bob eines der beiden Photonen. Bob möchte nun an Alice eine klassische 2-Bit-Nachricht übermitteln. Sie haben sich vorher auf folgende Konvention geeinigt: $(0,0) \simeq U_1$, $(0,1) \simeq U_2$, $(1,0) \simeq U_3$ und $(1,1) \simeq U_4 = \mathbf{1}$. Hierbei sind U_i die unitären Transformationen aus den Gleichungen 13.4–13.7. Nachdem Bob auf diese Weise sein Photon transformiert hat, schickte er dieses Photon an Alice zurück. (Man beachte, dass bei diesen Transformationen die Verschränkung der beiden Photonen nicht zerstört wird.) Alice macht nun an ihren beiden Photonen eine Bell-Messung und stellt fest, dass sich das System in einem von vier möglichen Bell-Zuständen befindet. Je nachdem um welchen Bell-Zustand es sich dabei handelt, kann sie die Transformation U_i ablesen, die Bob an seinem Photon vorgenommen hat. Damit kennt sie auch die klassische 2-Bit-Nachricht.

13.5 RSA-Kryptographie

Bis in die Mitte der 70er Jahre des 20. Jahrhunderts galt in der Kryptographie ein unbewiesenes Gesetz als nahezu gesichert: Wer auch immer den Schlüssel zur Verschlüsselung einer Nachricht hat, hat gleichzeitig auch den Schlüssel zur Entschlüsselung dieser Nachricht. Dieses Gesetz wurde 1976 zum ersten Mal öffentlich in dem Artikel *New directions in cryptography* von Whit Diffie und Martin Hellman in Frage gestellt. (Es gibt Vermutungen, dass ähnliche Ideen in Geheimdienstkreisen schon früher kursierten, aber als „Top Secret“ unter Verschluss kamen.) Aufgegriffen wurden die Ideen von Diffie und Hellman von dem MIT-Trio Ron Rivest, Adi Shamir und Leonard Adleman (kurz RSA). Eine schöne Darstellung der Geschichte von RSA findet man in [73].

Die Idee von RSA war, ein mathematisches Problem zu finden, bei dem die eine Richtung sehr einfach auszuführen ist, das Umkehrproblem aber ohne zusätzliche Informationen sehr schwierig bzw. zeitaufwendig ist. Die Lösung fand man in einem Problem aus der Zahlentheorie. Fermat hatte 1640 folgende Formel gefunden:

$$x^p \equiv x \ (\text{modulo } p)\,,$$

wobei p eine Primzahl und x eine beliebige Zahl kleiner als p ist. (Beispiel: $3^5 = 243 = 3$ modulo 5 oder $4^5 = 1024 = 4$ modulo 5.) Im Jahre 1736 fand Leonard Euler eine Verallgemeinerung dieses Satzes:

$$x^{(p-1)\cdot(q-1)+1} = x \text{ (modulo } p \cdot q) \,,$$

wobei p und q Primzahlen sind. (Beispiel: $4^9 = 262144 = 4$ modulo 15; hier sind $p = 3$ und $q = 5$.)

Stellen wir uns nun Folgendes vor: Alice möchte an Bob eine geheime Nachricht x (als Zahl geschrieben) schicken. Dazu schickt Bob zunächst an Alice (öffentlich) eine sehr große Zahl N, die sich als Produkt zweiter Primzahlen $N = p \cdot q$ schreiben lässt. Die beiden Primzahlen p und q behält Bob allerdings für sich. Außerdem schickt Bob noch eine weitere Zahl E an Alice (kleiner als N und ein Teiler von $(p-1)\cdot(q-1)+1$), ebenfalls öffentlich. Alice berechnet nun $y = x^E$ modulo N und schickt diese Zahl y zurück an Bob. Bob berechnet nun $y^{((p-1)\cdot(q-1)+1)/E} = x^{(p-1)\cdot(q-1)+1} = x$ modulo N und erhält die Nachricht x zurück. Dieses Problem kann Bob aber nur lösen, weil er die Primfaktoren p und q der Zahl $N = p \cdot q$ kennt und somit weiß, zu welcher Potenz er y erheben muss. Diese Faktoren sind aber geheim.

Die Sicherheit dieses Verfahrens beruht auf der Schwierigkeit, eine sehr große Zahl N in ihre Primfaktoren zu zerlegen. Typischerweise nimmt man heute Primzahlen p und q mit rund 100 Stellen (es gibt gute Verfahren, solche Primzahlen zu bestimmen). Das Produkt N ist dann eine Zahl mit rund 200 Stellen. Solche Zahlen lassen sich auch heute noch nicht in überschaubarer Zeit in ihre Faktoren zerlegen. Umgekehrt ist das Problem der Verschlüsselung aber sehr einfach. Jeder Heimcomputer kann die Zahl $y = x^E$ modulo N in kurzer Zeit berechnen, selbst wenn x und N 200-stellige Zahlen sind (und auch E eine Zahl mit einigen Dutzend Stellen). Da der Schlüssel zur Verschlüsselung einer Nachricht (die Zahlen N und E) öffentlich ist, spricht man auch von *public-key cryptography*. Der Schlüssel zur Entschlüsselung der Nachricht, die beiden Primzahlen p und q, bleibt natürlich geheim.

Quantencomputer könnten die Sicherheit von RSA gefährden. Shor entwickelte einen Algorithmus für einen Quantencomputer, mit dem sich Primzahlen vergleichsweise schnell faktorisieren lassen (Details findet man beispielsweise in [29]).

13.6 Quantenkryptographie

Ein absolut sicheres Verfahren der klassischen Nachrichtenübermittlung besteht darin, dass Alice und Bob eine Zufallsfolge aus 0 und 1 als Schlüssel verwenden. Die zu übermittelnde Nachricht wird zunächst in eine Folge von 0 und 1 kodiert und anschließend bitweise mit der (gleichlangen) Zufallsfolge eine XOR Operation durchgeführt:

Zufallsfolge	0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1
Nachricht	1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1
XOR-Kodierung	1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0

Die kodierte Nachricht ist nun ebenfalls eine Zufallsfolge, unabhängig davon, wie regulär die zu übermittelnde Nachricht ist. Der Empfänger kann nun aus der ihm ebenfalls bekannten

Zufallsfolge und der kodierten Nachricht durch eine XOR-Operation die ursprüngliche Nachricht wiedererhalten:

Zufallsfolge	0 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1
kodierte Nachricht	1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0
XOR-Dekodierung	1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1

Die Sicherheit dieses Verfahrens hängt jedoch entscheidend davon ab, dass nur Alice und Bob die Schlüsselfolge kennen. Aber wie kann beispielsweise Bob an Alice eine Zufallsfolge übermitteln, sodass sich beide sicher sind, dass kein „Eavesdropper“ die Nachricht abgeschnappt hat und nun die Zufallsfolge ebenfalls kennt?

Hier kann die Quantenmechanik helfen. Die Idee beruht darauf, dass jede Messung, die ein potenzieller Eavesdropper an einem unbekannten Quantenzustand vornimmt, diesen Zustand in der Regel verändert. Diese Veränderung lässt sich aber feststellen und somit der Eingriff des Lauschers nachweisen.

Konkret könnte die Übermittlung der Schlüssels folgendermaßen erfolgen. Bob erzeugt eine sehr große Anzahl von EPR-Zuständen

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle\big)\,.$$

Er schickt Alice jeweils eines der Elektronen (bzw. Photon) aus diesen Paaren und bittet Alice, an diesen Elektronen willkürlich Spin-Messungen in x- und y-Richtungen vorzunehmen. Alice teilt Bob nun mit, an welchem Elektron welche Messung durchgeführt wurde (1. Elektron x-Messung, 2. Elektron y-Messung, ...), allerdings übermittel Alice Bob nicht die Ergebnisse ihrer Messungen.

Bob nimmt nun an seinen Elektronen die gleichen Messungen vor und erhält beispielsweise die Folge

$$+, +, -, -, +, -, -, +, +, +, -, +, +, -, -, -, \ldots\,.$$

Bob weiß nun, dass Alics die Folge

$$-, -, +, +, -, +, +, -, -, -, +, -, -, +, +, +, \ldots$$

erhalten haben muss. Theoretisch könnten sie nun eine dieser beiden Folgen als Zufallsfolge zur Verschlüsselung ihrer Nachricht verwenden. Doch woher wissen sie, dass niemand die Nachricht abgehört hat und nun die Zufallsfolge ebenfalls kennt?

Abhören würde bedeuten, dass Eve („jemand“) die Elektronen, die Bob an Alice geschickt hat, abgefangen hat und selber Messungen an diesen Elektronen vorgenommen hat. Anschließend hat sie die Elektronen an Alice weitergeleitet. In rund der Hälfte der Fälle hat Eve vermutlich dieselben Richtungen ausgemessen, die auch Alice ausgemessen hat, und würde somit zumindest teilweise die Zufallsfolge kennen, die Bob nun rekonstruiert und die zur Ver- bzw. Entschlüsselung verwendet wird.

Alice und Bob können zwar nicht verhindern, dass Eve die Elektronen abfängt und an ihnen Messungen vornimmt, aber sie können feststellen, ob solche Messungen vorgenommen

wurden. Jede solche Messung hat nämlich den EPR-Zustand zerstört. Die Elektronen, die Alice schließlich erhalten hat, sind also nicht mehr mit Bobs Elektronen verschränkt. Daher gibt es auch keinen Grund, weshalb die Daten von Alice und Bob durchweg antikorreliert sein müssen.

Dies können Alice und Bob jedoch testen. Dazu schickt Alice an Bob von beispielsweise der Hälfte der Messungen (zufällig ausgewählt) nicht nur die Art der Messung (ob x- oder y-Richtung), sondern auch die Ergebnisse. Diese Ergebnisse müssen mit den Resultaten von Bob vollständig antikorreliert sein. Ist dies nicht der Fall, besteht die Gefahr, dass die Elektronen abgefangen wurden und Messungen an ihnen vorgenommen wurden. Findet Bob aber tatsächlich vollständige Antikorrelation, wurden (mit sehr großer Wahrscheinlichkeit) an den Elektronen keine Messungen vorgenommen. Und da Alics diese Elektronen zufällig ausgesucht hat, besteht auch kein Anlass zu der Vermutung, dass die verbliebenen Elektronen ausgemessen wurden. Bob schickt Alice eine entsprechende Nachricht und Alice kann nun die verbliebenen Messdaten (deren Ergebnisse sie Bob nicht explizit übermittelt hat) zur Verschlüsselung der Nachricht verwenden.

Literaturverzeichnis

[1] Gernot Alber & Matthias Freyberger; *Quantenkorrelationen und die Bellschen Ungleichungen*; Physikalische Blätter 55 (1999) Nr. 10, S. 23.

[2] H. Araki & M.M. Yanase; *Measurement of Quantum Mechanical Operators*; Phys. Rev. 120 (1960) 622.

[3] Alain Aspect, Philippe Grangier & Gérard Roger; *Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities*; Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 91.

[4] Alain Aspect, Jean Dalibard & Gérard Roger; *Experimental Test of Bell's inequalities Using Time-Varying Analyzers*; Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1804.

[5] Kurt Baumann & Roman U. Sexl; *Die Deutungen der Quantentheorie*; Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1987.

[6] John S. Bell; *Against "Measurement"*; CERN-Preprint CERN-TH-5611/89; erschienen in *62 years of uncertainty*; Konferenzberichte Erice, 5–14 August 1989.

[7] John S. Bell; *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*; Cambridge University Press, 1987.

[8] John S. Bell; *On the problem of hidden variables in quantum theory*; Rev. Mod. Phys. 38 (1966) 447. Abgedruck in [7] sowie in deutscher Übersetzung in [5].

[9] John S. Bell; *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox*; Physics 1 (1964) 195. Abgedruckt in [7].

[10] Charles H. Bennett; *Quantum Information and Computation*; Physics Today, October 1995.

[11] D.I. Blochinzew; *Grundlagen der Quantenmechanik*; Verlag Harri Deutsch, 1972.

[12] David J. Bohm; *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables I & II*; Phys. Rev. 85 (1952) S. 166 & 180. Teil I auch in deutscher Sprache in [5].

[13] David J. Bohm; *Quantum Theory*; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1951.

[14] David J. Bohm & Y. Aharonov; *Discussion of the Experimental Proof of the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*; Phys. Rev. 108 (1957) 1070.

[15] Niels Bohr; *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*; Phys. Rev. 48 (1935) 696. Deutsche Übersetzung in [5].

[16] Max Born; *The Born-Einstein Letters*; Macmillan, London, 1971.

[17] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter, A. Zeilinger; *Observation of Three-Photon Greenberger-Horne-Zeilinger Entanglement*; Phys. Rev. Lett. 82 (1999) 1345.

[18] John F. Clauser & Abner Shimony; *Bell's Theorem: experimental tests and implications*; Rep. Prog. Phys. 41 (1978) 1881.

[19] John G. Cramer; *The transactional interpretation of quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. 58 (1986) 647.

[20] A.S. Dawydow; *Quantenmechanik*; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974.

[21] Louis de Broglie, *??*; Journ. Phys. Rad. 20 (1959) 963.

[22] Louis de Broglie; *An Introduction to the Study of Wave Mechanics*; (E.P. Dutton and Company, Inc., New York, 1930); sowie Compt. rend. 183 (1926) 447; 184 (1927) 273; 185 (1927) 380.

[23] Louis de Broglie; *The Current Interpretation of Wave Mechanics - A Critical Study*; Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1964.

[24] Bryce S. deWitt; *Quantum Mechanics and reality*; Phys. Today; Sept. 1970, 30–35. Deutsche Übersetzung in [5].

[25] Fay Dowker und Adrian Kent; *On the Consistent Histories Approach to Quantum Mechanics*; Journal of Statistical Physics, Vol. 82 (1996) 1575.

[26] *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*; Second Edition, MIT Press, 1987.

[27] Albert Einstein, Nathan Rosen & Boris Podolsky, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*; Phys. Rev. 47 (1935) 777. In deutscher Übersetzung wiedergegeben in [5].

[28] Albert Einstein; *Aus meinen späten Jahren*; Ullstein Sachbuch, 1993.

[29] A. Ekert und R. Jozsa; *Quantum Computation and Shor's factoring algorithm*; Rev. Mod. Phys. 68 (1996) 733.

[30] Avshalom C. Elitzur, L. Vaidman; *Quantum mechanical interaction-free measurements*, Found. of Phys. **23** (1993), 987.

[31] Avshalom C. Elitzur, Shahar Dolev und Anton Zeilinger; *Time-Reversed EPR and the Choice of Histories in Quantum Mechanics*; Quantum Computers and Computing 4 (2003) 118.

[32] Bernard D'Espagnat; *Quantentheorie und Realität*; Spektrum der Wissenschaft, 1980, Heft 1, S. 69.

[33] H. Everett; *"Relative State" Formulation of Quantum Mechanics*; Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 454.

[34] Richard Feynman; *The Character of Physical Law*; The MIT Press, 1987.

[35] Murray Gell-Mann & James B. Hartle; *Quantum Mechanics in the Light of Quantum Cosmology*; in *Complexity, Entropy and the Physics of Information*; Wojciech H. Zurek, Hrsg., Addison Wesley, 1990.

[36] Murray Gell-Mann & James B. Hartle; *Alternative Decohering Histories in Quantum Mechanics*; preprint: CALT-68-1694 (1990).

[37] Daniel M. Greenberger, Michael Horne & Anton Zeilinger; *??*; in *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*; M. Kafatos (Hrsg.), Kluwer, Dordrecht, The Netherlands (1989), S. 69.

[38] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, Abner Shimony & Anton Zeilinger; *Bell's theorem without inequalities*; Am. J. Phys. 58 (1990) 1131.

[39] Roberto Giuntini; *Quantum Logic and Hidden Variables*; BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1991.

[40] Andrew M. Gleason; *Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space*; J. Math. & Mech. 6 (1957) 885.

[41] Kurt Gottfried; *Quantum Mechanics - Vol. I: Fundamentals*; Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1989.

[42] Kurt Gottfried; *Does quantum mechanics carry the seeds of its own destruction*; CLNS-91/1098 Preprint, presented at the Symposium on Quantum Physics in memory of John Stuart Bell, CERN, May 2–3, 1991.

[43] Robert B. Griffiths; *Consistent Histories and the Interpretation of Quantum Mechanis*; Journal of Statistical Physics, Vol. 36 (1984) 219.

[44] Lucien Hardy; *Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz-invariant realistic theories*; Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 2981.

[45] Werner Heisenberg; *Physikalische Prinzipien der Quantentheorie*; BI-Hochschultaschenbücher, 1986.

[46] T. Hellmut, H. Walther, A.G. Zajonc and W. Schleich; *Delayed-choice experiments in quantum interference*; Phys. Rev. A 35 (1987), 2532.

[47] Grete Hermann; *Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechani*; in „Abhandlungen der Fries'schen Schule", Bd. VI, S. 75–152, 1935.

[48] *Meyers Handbuch über die Mathematik*; Herbert Meschkowski (Hrsg.); Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

[49] D. Home & M.A.B. Whitaker; *Ensemble Interpretations of Quantum Mechanics. A Modern Perspective*; Physics Reports 210 (1992) 223–317.

[50] Nathan Jacobson; *Basic Algebra*; W.H. Freeman and Company, New York, 1989.

[51] M. Jammer; *The philosophy of quantum mechanics*; New York, Wiley, 1974.

[52] J.M. Jauch & C. Piron; *Can Hidden Variables be Excluded in Quantum Mechanics?*; Helv. Phys. Acta 36 (1963) 827.

[53] N.G. van Kampen; *Ten Theorems about Quantum Mechanical Measurements*; Physica A 153 (1988) 97.

[54] Paul Kwiat, Harald Weinfurther und Anton Zeilinger; *Quantum Seeing in the Dark*; Scientific American, Nov. 1996.

[55] Paul Kwiat, Harald Weinfurther, Thomas Herzog, Anton Zelinger, Mark A. Kasevich; *Interaction-free measurement*; Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 4763.

[56] L.D. Landau & E.M. Lifschitz; *Lehrbuch der Theoretischen Physik - Band III: Quantenmechanik*; Akademie-Verlag, Berlin, 1988.

[57] E. Madelung; *Quantentheorie in hydrodynamischer Form*; Z. Physik 40 (1926) 322.

[58] N. David Mermin; *What's wrong with these elements of reality?*; Physics Today, June 1990, S. 9; und *Quantum mysteries revisited*; Am. J. Phys. 58 (1990) 731.

[59] Letters to Physics Today; *Can Demolition of the 'Elements of Reality' proceed on schedule?*, Physics Today; December 1990, S. 11.

[60] B. Misra and E.C.G. Sudarshan (1977): The Zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics* **18**, 756–763.
Siehe auch: K. Gustafson (2003): A Zeno story. *Quantum Computers and Computing*, in press.

[61] Peter Mittelstaedt; *Philosophische Probleme der modernen Physik*; BI-Wissenschaftsverlag, 1989.

[62] Johann von Neumann; *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*; Springer-Verlag, Berlin, 1932.

[63] Roland Omnés; *From Hilbert Space to Common Sense: A Synthesis of Recent Progress in the Interpretation of Quantum Mechanics*; Annals of Physics 201 (1990) 354.

[64] Roland Omnés; *Some Progress in Measurement Theory: The Logical Interpretation of Quantum Mechanics*; in *Complexity, Entropy and the Physics of Information*; Wojciech H. Zurek, Hrsg., Addison Wesley, 1990.

[65] Wolfgang Pauli; *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*; neu herausgegeben bei Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1990.

[66] Wolfgang Pauli; in *Reports on the Solvay Congress*; Gauthiers-Villars et Cie.; Paris, 1928 (S. 280).

[67] Roger Penrose; *The Emperor's New Mind*; Oxford University Press, 1989.

[68] A. Peres; *Zeno paradox in Quantum Theory*, American Journal of Physics 48 (1980), 931-932.

[69] Special Issue in Physics World **11**, 33–57 (1998).

[70] M. Renninger; *Messung ohne Störung des Meßobjekts*; Z. Physik 158 (1960) 417.

[71] H. Römer; *Optics*, Wiley-VCH-Verlag, Weinheim, Berlin, 2004.

[72] L. Rosenfeld, in *Quantum Theory and Measurement*, J.A. Wheeler und W.H. Zurek (Hrsg.), Princeton University Press, Princeton, 1983.

[73] Marcus du Sautoy; *The Music of the Primes*; Harper Collins Publishers, New York, 2003.

[74] Erwin Schrödinger; *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*; Die Naturwissenschaften 23 (1935) 807–812, 823-828, 844–849. Abgedruckt in [5].

[75] Franco Selleri; *Die Debatte um die Quantentheorie*; Verlag Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1984.

[76] J. Sohns; *GHZ-Argumente und Experimente*; Vortrag im Fach Wirtschaftsphysik an der Uni Ulm im Hauptseminar *Theoretische und experimentelle Grundlagen der Quanteninformationsverarbeitung*; Sem. Prof. Hüttner, 2002.

[77] Henry Pierce Stapp; *S-Matrix Interpretation of Quantum Theory*; Phys. Rev. D 3 (1971) 1303.

[78] Henry Pierce Stapp; *EPR and Bell's Theorem: A Critical Review*; Found. Phys. 21 (1991) 1.

[79] Andrew Steane; *Quantum computing*; Rep. Prog. Phys. **61**, 117–173 (1998).

[80] H. Stein & A. Shimony; *Limitations on measurement*; in Proceedings of the International School of Physics „Enrico Fermi"; *Foundations of Quantum Mechanics*; B. D'Espagnat (Hrsg.), 1971; Academic Press, New York and London.

[81] Carl Friedrich von Weizsäcker; *Ortsbestimmung eines Elektrons durch ein Mikroskop*; Zeitschrift für Physik, 70 (1931), 1. und 2. Heft.

[82] Carl Friedrich von Weizsäcker; *Aufbau der Physik*; dtv-Verlag, München, 1988.

[83] John A. Wheeler; *Assessment of Everett's "Relative State" Formulation of Quantum Theory*; Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 463.

[84] Eugene P. Wigner; *Remarks on the mind-body question*, in *The scientist speculates*; Hrsg. I.J. Good; Heinemann London, 1961.

[85] Eugene P. Wigner; *Die Messung quantenmechanischer Operatoren*; Z. Physik 133 (1952) 101.

[86] M.M. Yanase; *Optimal Measuring Apparatus*; in Proceedings of the International School of Physics „Enrico Fermi"; *Foundations of Quantum Mechanics*; B. D'Espagnat (Hrsg.), 1971; Academic Press, New York and London.

[87] Wojciech H. Zurek; *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collaps?*; Phys. Rev. D 24 (1981), 1516–1525.

[88] Wojciech H. Zurek; *Environment-induced superselection rules*; Phys. Rev. D 26 (1982), 1862–1880.

Weitere interessante Literatur:

- Stapp; *Bell's Theorem and the foundations of quantum physics*; Am. J. Phys. 53 (1985) 306–317.
  Kommentare dazu:
  Am. J. Phys. 56 (1988) 565-569.

- Proceedings of the International School of Physics „Enrico Fermi"; *Foundations of Quantum Mechanics*; B. D'Espagnat (Hrsg.), 1971; Academic Press, New York and London.

- Proceedings of the International School of Physics „Enrico Fermi"; *Problems in the Foundations of Physics*; G. Toraldo di Francia (Hrsg.), 1979; Academic Press, New York and London.

Index

Absorptionsgesetz, 37
Adjungierter Operator, 16
Algebra, 28
    C^*, 29
    Banach, 29
    normierte, 29
*-Algebra, 29
Algebra, komplexe, 28
Aspect-Experimente, 109
Assoziativität eines Verbandes, 36
Aussagenlogik, 36
Auswahlregeln, 22

Banach-*-Algebra, 29
Bell'sche Ungleichung, 103, 107
Bell, John, 101
Beschränktheit in einer Halbordnung, 42
Bohr, Niels, 11, 77
Boole'sche Algebra, 45
Bra-ket-Notation, 15

C^*-Algebra, 29
C^*-Bedingung, 29
Contrafactual Definiteness, 108

de Broglie, Louis, 62
Delayed choice Experimente, 57, 95
Dichtematrix, 17
Dispersionsfreier Zustand, 99
Distributivgesetze, 37
Doppelspaltexperiment, 47

Eigenvektor, 16
Eigenwert, 16
Einstein, Albert, 69
Elitzur, Avshalom C., 89
EPR-Paradoxon, 69
Erwartungswertfunktional, 30

Faraday-Effekt, 84

Gemischter Zustand, 31
GHZ-Experiment, 109
Greenberger, 109
Groenewald-van Hove, Theorem von, 20

Halbordnung, 41
Hardy, Lucien, 93
Hardys Experiment, 93
Heisenberg, Werner, 11, 75
Hellmut-Walther-Zajonc-Schleich Experiment, 95
Hermann, Grete, 30, 58
Horne, 109

Induktionsgesetz, 107
Infimum, 42
Interaction-free measurement, 85
Interferenzterme, 53
Interpretation der QM
    Many Worlds, 64
    statistische, 21
Intervall, 42

Kanonische Vertauschungsrelationen, 19
Kasevich, M.A., 92
Kollaps, 64
Kommensurable Eigenschaften, 39
Kommutativität eines Verbandes, 36
Komplement einer Aussage, 35
Komplementarität, 11
Konversionskristall, 88
Kopenhagener Deutung, 17

Ladungsdichtewelle, 51
Lokalität, 107

Mach-Zehnder-Interferometer, 86

Many Worlds, 64
Maximum, 42
Mengenverband, 45
Messung ohne Wechselwirkung, 85
Messvorschrift, 27
Messwert, 27
Minimum, 42

Nachfolger (in einer Halbordnung), 42
Negation einer Aussage, 35
Neumann, Johann von, 100

Objektiver Realismus, 107
Observable, 19, 27
ODER, 35
Operator
    adjungierter, 16
    regulärer, 16
    spurklasse, 17
    unitärer, 16
Optische Aktivität, 84

Parmenides, 81
Pauli, Wolfgang, 75
Peres, Asher, 84
Physikalische Realität, EPR-Definition, 70
Physikalische Wirklichkeit, 77
Podolsky, Boris, 69
Polarisationsdreher, 84
Polarisationsstrahlteiler, 92
Präparierung, 28
Prinzip vom hinreichenden Grund, 10
Projektionsoperator, 16
Propositionen, 35

Quanten-Zeno-Effekt, 82
Quantenlogik, 40

Redundanzsymmetrie, 23
Regulärer Operator, 16
Reiner Zustand, 31
Relation, 41
Renninger, M., 61
Resolvente, 16
Riesz, Theorem von, 16
Rosen, Nathan, 69
Rosenfeld, Leon, 77

Schranke, obere und untere, 42
Schrödinger, Erwin, 50, 66
Schrödinger-Gleichung, 18
Schrödingers Katze, 66
Solvay-Konferenz, 11
Spektrum, 16
Spurklasse Operatoren, 17
Sten-Gerlach-Effekt, 54
Strahlteiler, 86
Summe über Möglichkeiten, 53, 60, 64
Superauswahlregeln, 23
Supremum, 42
Symmetrie, 23

Totale Ordnung, 42

Unabhängigkeit, Definition von Pauli, 76
UND, 35
Unitärer Operator, 16

Vaidman, Lev, 89
Vektorraum, 28
Verband, 42
    Boole'scher, 45
    distributiver, 45
    komplementärer, 45
    vollständiger, 45
Verborgene Variable, 99
Verfügbarkeit, 40
Verschränkung ohne Wechselwirkung, 93
Vollständigkeit, EPR-Definition, 70
Vorgänger (in einer Halbordnung), 42

Wechselwirkung, Definitin von Pauli, 76
Weizsäcker, Carl Friedrich von, 58
Wellenfunktion, 50
Wellenmechanik, 50
Wheeler, John Archibald, 95
Wigners Freund, 67

Zeilinger, 109
Zenon von Elea, 81
Zustand, 19, 27, 30
    gemischt, 31
    rein, 31
Zustand, allgemeiner, 17
Zustand, dispersionsfreier, 99
Zustand, reiner, 15