Einführung in die Theoretische Physik

Thomas Filk

Skript zur Vorlesung

im Sommersemester 1996

an der Universität Saarbrücken

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Literaturhinweise **7**

1.1 Vorbemerkungen 7

1.2 Literatur 9

2 Grundlagen und Kinematik **13**

2.1 Raum-Zeit, Koordinaten, Bezugssysteme, Intertialsysteme 13

2.1.1 Ereignisse und Raum-Zeit 13

2.1.2 Weltlinien, Gleichzeitigkeit und die Trennung von Raum und Zeit 14

2.1.3 Die Geometrie des Raumes 15

2.1.4 Koordinaten 16

2.1.5 Zeit 16

2.1.6 Bezugssysteme und Inertialsysteme 18

2.2 Vektorräume und Basisvektoren 19

2.2.1 Basistransformationen, ko- und kontravariantes Transformationsverhalten 20

2.2.2 Skalar- und Vektorprodukt 22

2.2.3 Bahnkurven und Trajektorien 24

2.3 Energie, Impuls, Drehimpuls — Observable 25

3 Die Dynamik der klassischen Mechanik **27**

3.1 Das dynamische Grundgesetz der Newtonschen Mechanik 27

3.1.1 Dynamik der kräftefreien Bewegung 27

3.1.2 $F = ma$ 28

3.1.3 Die mathematische Struktur der Newtonschen Bewegungsgleichung 31

3.1.4 Die Bewegungsgleichungen für Mehrteilchensysteme 35

3.1.5 Zwei-Körper-Probleme 38

3.1.6 Erhaltungssätze 38

3.1.7 Das zweite Keplersche Gesetz 41

3.2 Die eindimensionale Bewegungsgleichung 42
3.2.1 Die Methode der Variablentrennung 44
3.3 Die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen 45

4 Das Kepler-Problem 47
4.1 Die Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld 47
4.2 Das effektive Potential 49
4.3 Die Lösung des Kepler-Problems 51
4.4 Das dritte Keplersche Gesetz 53

5 Der harmonische Oszillator 55
5.1 Die Lösung des Anfangswertproblems 55
5.2 Physikalische Bedeutung des harmonischen Oszillators 56
5.3 Zwischenabschnitt: Komplexe Zahlen 58
5.4 Der Exponentialansatz 62
5.5 Zwischenkapitel 68
5.5.1 Darstellungen der Translationsgruppe 68
5.5.2 Lösung der Differentialgleichungen in Matrix-Form 69

6 Distributionen und Greensche Funktionen 73
6.1 Vorbemerkungen 73
6.2 Funktionenräume als Vektorräume 74
6.3 Distributionen 75
6.4 Rechenregeln für Distributionen 78
6.5 Distributionen als Grenzwerte regulärer Funktionen 79
6.6 Lineare Abbildungen auf dem Funktionenraum 80
6.7 Greensche Funktionen 82
6.8 Die Randbedingungen für Greensche Funktionen 84
6.9 Zwischenkapitel: Inverse Operatoren... 86

7 Lineare Systeme mit äußeren Kräften 87
7.1 Differentialgleichung 1. Ordnung 87
7.2 Das freie Teilchen mit einer äußeren Kraft 89
7.3 Die Greensche Funktion des harmonischen Oszillators 90
7.4 Randbedingungen 91
7.5 Resonanz 92
7.5.1 Einfache harmonische äußere Kraft 92
7.5.2 Äußere Kraft mit mehreren harmonischen Anteilen 93
7.5.3 Der gedämpfte Oszillator mit äußerer Kraft 94

8 Die lineare Kette **97**
8.1 Die Bewegungsgleichungen . . . 97
8.2 Zwischenkapitel: Die lineare Kette mit 2 Massepunkten . . . 100
8.3 Diagonalisierung von Γ . . . 103
8.4 Die allgemeine Lösung . . . 107
8.5 Die festen Randbedingungen . . . 109

9 Die schwingende Saite **113**
9.1 Die Bewegungsgleichung . . . 113
9.2 Lösung der Saitengleichung . . . 116
9.2.1 Lösung durch laufende Wellen . . . 116
9.2.2 Lösung durch Exponentialansätze . . . 118

10 Der starre Körper **121**
10.1 Konfigurationsraum des starren Körpers . . . 122
10.1.1 Die Bewegung des Schwerpunktes . . . 122
10.1.2 Der „innere“ Konfigurationsraum des starren Körpers . . . 123
10.2 Die Drehgruppe SO(3) . . . 124
10.2.1 Gruppen und Darstellungen . . . 124
10.2.2 Definition der Drehgruppe . . . 125
10.2.3 Darstellung der Drehgruppe . . . 126
10.3 Skalare, Vektoren, Tensoren etc. . . . 127
10.4 Zerlegung eines Tensors unter Drehungen – Invariante . . . 130
10.4.1 Invariante eines Tensors 2. Stufe . . . 131
10.4.2 Zerlegung einer Matrix nach Darstellungen der Drehgruppe . . . 133
10.5 Observable des starren Körpers . . . 134
10.5.1 Der Drehimpuls . . . 135
10.5.2 Die kinetische Energie . . . 137
10.6 Trägheitstensor und Symmetrien . . . 138
10.6.1 Invarianz unter Spiegelung . . . 139
10.6.2 Invarinaz unter Drehungen . . . 140

11 Nicht-Inertialsysteme **143**
11.1 Bewegungsgleichungen in einem Nicht-Inertialsystem . . . 143
11.2 Das Foucaultsche Pendel . . . 146

12 Elementare Vektoranalysis **149**
12.1 Tensorfelder 149
12.1.1 Skalare Felder 150
12.1.2 Vektor- und Tensorfelder 151
12.2 Linienintegrale – Gradient 151
12.3 Flächenintegrale, Rotation, Stokesscher Satz 152
12.3.1 Beschreibung von Flächen im $\mathbb{R}^3$ und das Flächenintegral 152
12.3.2 Beispiel: Die Kugeloberfläche 153
12.3.3 Rotation und Stokesscher Satz 154
12.4 Volumenintegrale, Divergenz, Satz von Gauß 156
12.4.1 Parametrisierung eines Volumens, Volumenelement 156
12.4.2 Beispiel: Die Kugel vom Radius R 157
12.4.3 Der Satz von Gauß – Divergenz 157
12.5 Die Kontinuitätsgleichung 158

13 Partielle Differentialgleichungen **161**
13.1 Die Diffusionsgleichung 162
13.1.1 Der eindimensionale Zufallsweg 162
13.1.2 Binomische Koeffizienten und der Zufallsweg 165
13.1.3 Die Gauß-Funktion als Ausbreitungskern 166
13.1.4 Die 3-dimensionale Diffusionsgleichung 167
13.1.5 Physikalische Interpretation der Gauß-Lösung 169
13.1.6 Statische Lösungen mit Randbedingungen 171
13.2 Die Wellengleichung 172
13.2.1 Physikalische Anwendungen 172
13.2.2 Ebene Wellen 173
13.2.3 Zeitlicher Exponentialansatz 174
13.2.4 Allgemeiner Exponentialansatz 175

Kapitel 1

Einführung und Literaturhinweise

1.1 Vorbemerkungen

Diese Vorlesung ist für Studierende im 2. Semester gedacht. Es wird angenommen, daß durch die Mathematikvorlesungen im 1. Semester gewisse Grundkenntnisse auf dem Gebiet der linearen Algebra und der Analysis vorhanden sind, die im Rahmen dieser Vorlesung vertieft und auf physikalische Problemstellungen angewandt werden sollen. Gleichzeitig soll diese Vorlesung als Vorbereitung für die TP-Kurse im 3. bis 6. Semester dienen. Daher ist auch nicht an eine umfassende und vollständige Einführung in die theoretische Mechanik, Feldtheorie etc. gedacht, sondern es werden ausgewählte Kapitel aus diesen Gebieten behandelt, die sich einerseits als Einführung in die Denk- und Arbeitsweise der theoretischen Physik eignen, andererseits auch die Anwendung und Vertiefung mathematischer Techniken beispielhaft erläutern.

Als vorläufige Inhaltsangabe sollen folgende Themenkreise genannt sein:

1. Kinematik und Dynamik klassischer Systeme

   Insbesondere sollen in diesem Zusammenhang folgende Konzepte erarbeitet werden:

   - Der Begriff der Raum-Zeit, Koordinaten, Bezugssysteme und Inertialsysteme:

     Dieses erste Kapitel hat eher abstrakten, teilweise sogar wissenschaftsphilosophischen Charakter. Begriffe wie „geradlinig“, „gleichförmig“, „Abstand“, etc. werden im Rahmen der klassischen Mechanik üblicherweise vorausgesetzt. Trotzdem sind sie nicht selbstverständlich, sondern müssen durch konkrete physikalische Vorschriften *definiert* werden. Insbesondere die Allge-

meine Relativitätstheorie hat gezeigt, daß es sich um durchaus nicht-triviale physikalische Grundlagen handelt.

- Kurze Wiederholung der Kinematik klassischer Punktteilchen:
  In diesem Zusammenhang sollen zunächst mathematische Grundbegriffe wie Vektoren, Vektor- und Kreuzprodukt, Trajektorien, Bahnkurven, etc. wiederholt werden. Außerdem sollen die Index-Schreibweise, die Summenkonvention, das Kronecker- und ϵ-Symbol etc. behandelt werden. Physikalisch werden nochmals kurz die Begriffe „Energie“, „Impuls“, „Drehimpuls“ und ihre Zusammenhänge im Rahmen der nicht-relativistischen Punktmechanik wiederholt.
- Die Dynamik klassischer Punktteilchen, das Newtonsche Gesetz $F = ma$:
  Eine kurze allgemeine Diskussion dieser Gleichung wird Sie hoffentlich davon überzeugen, daß keines der vier Symbole in dem Ausdruck $F = ma$ wirklich trivial ist. Es lohnt sich, über jedes Zeichen und seine Bedeutung nachzudenken.
  Die oft auftretende Beziehung $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ führt zunächst zu einem mathematischen Exkurs über Gradienten, Rotation und Divergenz. Verscheidene Formen von Kräften werden besprochen und die allgemeine Struktur der zugehörigen Differentialgleichung behandelt. Außerdem werden die Erhaltungssätze der Energie (für zeitunabhängige Potentiale), des Drehimpuls (für rotationsinvariante Systeme) und der Schwerpunktsbewegung (für Mehrteilchensysteme mit einer Wechselwirkung, die vom relativen Abstand abhängt) hergeleitet.

2. Das Kepler-Problem:

   Dieses physikalisch relevante Problem soll eingehender behandelt werden, da es die Anwendung vieler theoretischer Konzepte erlaubt. Ziel wird unter anderem die Herleitung der drei Keplerschen Gesetze sein. Unter anderem werden wir jedoch auch eine zusätzliche Erhaltungsgröße kennenlernen (den Lenz-Runge-Vektor), sowie das Verfahren der sogenannten „Quadratur“ einer Differentialgleichung erster Ordnung (besser sollte man von einer Separation der Variablen sprechen).

   Außerdem wird die Keplesche Bewegungsgleich Anlaß zu einer Diskussion über die „schwere“ und „träge“ Masse sein, d.h. das sogenannte „Äquivalenzprinzip“, das als Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie angesehen werden kann, wird angesprochen.

3. Der harmonische Oszillator:

   Diese Differentialgleichung läßt sich sehr einfach durch die bekannten periodischen Funktionen „Sinus“ und „Kosinus“ lösen. Trotzdem lassen sich gerade wegen der Einfachheit der Differentialgleichung viele allgemeine Methoden und Konzepte

diskutieren. Geplant ist eine kurze Einführung in die Theorie der komplexen Zahlen, die Eulersche Relation für die Exponentialfunktion, der Exponentialansatz für homogene, lineare, gewöhnliche Diffentialgleichung, etc. Der gedämpfte harmonische Oszillator.

4. Der harmonische Oszillator im zeitabhängigen Kraftfeld:

   Auch diese Differentialgleichung ist leicht lösbar. Sie dient als erster Einstieg in die Theorie der sogenannten Distributionen und Greenschen Funktionen. Die Greensche Funktion für das freie Teilchen sowie den harmonischen Oszillator lassen sich exakt berechnen.

5. Der starre Körper:

   Die Theorie des sogenannten „starren Körpers“ wird oft als schwer und kompliziert empfunden, und tatsächlich läßt sich das Problem des allgemeinen starren Körpers im Gravitationsfeld nicht mehr exakt lösen. Wir werden uns daher auch auf den Fall des freien starren Körpers beschränken. Der Trägheitstensors wird zu einer eingehenden Diskussion über die Begriffe „Skalar“, „Vektor“, down Pseudovektor“ und „Tensor“ führen. Das Verhalten dieser Objekte unter Drehungen (aktiv oder passiv) wird untersucht. Rotationsgruppe und Euler-Winkel sind weitere mathematische Stichpunkte.

6. Partielle Differentialgleichungen: Laplace-Gleichung, Wellengleichung, Helmholtz-Gleichung, Diffusionsgleichung.

Dies steckt grob den Rahmen der Vorlesung ab, so wie ich ihn derzeit geplant habe. Trotzdem werde ich Anregungen gerne aufnehmen und sowohl mathematische wie auch physikalische Probleme, die von Interesse sind und in das Konzept der Vorlesunge passen, gerne behandeln.

1.2 Literatur

Literatur, die gezielt auf die Thematik dieser Vorlesung abgestimmt ist, ist mir leider nicht bekannt. Im Allgemeinen handelt es sich einerseits um Lehrbücher der verschiedenen Bereiche der theoretischen Physik — Klassische Mechanik, Feldtheorie, Thermodynamik, Hydrodynamik, Statistische Mechanik etc. — andererseits um Lehrbücher zu den mathematischen Methoden der theoretischen Physik.

Das einzige mir bekannte einbändige Lehrbuch, das sämtliche Bereiche der klassischen theoretischen Physik behandelt, ist das Buch von Honerkamp und Römer [12]. Allerdings geht auch dieses Buch weit über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus; es entspricht einer 2-semestrigen Einführung (3. und 4. Semester) in die klassische theoretische Physik.

Ein Kurzlehrbuch und Repetitorium der theoretischen Physik ist das Buch von Stauffer [15].

Viele der in dieser Vorlesung behandelten Konzepte finden sich beispielsweise in den Berkeley-Kursen [4]. Ein sehr gutes Buch der klassischen Mechanik (ohne Lagrange-Formalismus), Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie ist das Buch von Falk und Ruppel [7]. Newtonsche Mechanik (ohne Lagrange-Formalismus) findet man auch sehr ausführlich behandelt in dem Buch von French [8].

Eine bekannte und sehr gute Serie der Theoretischen Physik sind die Bände von Landau und Liffschitz [11].

Die klassischen Bücher zur klassischen Mechanik sind Goldstein [9], Arnold [2], Budo [5] und für mathematische Puristen Abraham und Marsden [1] sowie Thirring [16].

Der Klassiker zur Elektrodynamik ist der Jackson [10] und etwas abgeschlagen die beiden Bände von Becker [3]. Eine Einführung in die mathematische Formulierung der Feldtheorie ist auch das Buch von Römer [13].

Gute Bücher zu mathematischen Methoden in der theoretischen Physik sind:

- Courant und Hilbert [6]: Ein Klassiker zu Methoden der Mathematischen Physik, insbesondere zur Lösung von Differentialgleichungen.

- Schutz [14]: Bietet eine Einführung in die Differentialgeometrie mit physikalischen Anwendungen.

Literaturverzeichnis

[1] R. Abraham und J. E. Marsden; *Foundations of Mechanics*; Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

[2] V. I. Arnold; *Mathematical Methods of Classical Mechanic*; Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1978.

[3] Becker ??

[4] Berkeley-Kurse Bd. 1-5; ...

[5] A. Budo; *Theoretische Mechanik*; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin, 1974.

[6] R. Courant und D. Hilbert; *Methoden der Mathematischen Physik*, Bd. 1 & 2, Springer-Verlag Heidelberg New York, 1968.

[7] G. Falk und W. Ruppel; *Mechanik, Relativität, Gravitation*; Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.

[8] A. P. French; *Newtonsche Mechanik*; Walter de Gruyter Berlin New York, 1996.

[9] H. Goldstein; *Klassische Mechanik*; Akademische Verlagsgesellschaft Frankfurt, 1972.

[10] ?. Jackson; ...

[11] Landau, ??

[12] J. Honerkamp und H. Römer, *Grundlagen der Klassischen Theoretischen Physik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1986.

[13] H. Römer und M. Forger; *Elementare Feldtheorie*; VCH-Verlag Weinheim, 1993.

[14] B. Schutz; *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, 1980.

[15] D. Stauffer; *Theoretische Physik*; Springer-Verlag Heidelberg, 1993.

[16] W. Thirring; *Lehrbuch der Mathematischen Physik*, Band 1 (Klassische Dynamische Systeme); 2. Auflage, Springer-Verlag Wien New York, 1988.

Kapitel 2

Grundlagen und Kinematik

2.1 Raum-Zeit, Koordinaten, Bezugssysteme, Intertialsysteme

space-time, coordinates, reference systems, inertial systems

2.1.1 Ereignisse und Raum-Zeit

Ich möchte diese Vorlesung mit einigen grundlegenden Überlegungen beginnen, die weniger einen mathematischen Formalismus in den Vordergrund stellen, als die Frage nach der Anwendbarkeit bestimmter mathematischer Formalismen auf bestimmte physikalische Begriffsbildungen stellt.

Überlicherweise wird der *Raum* mit dem $\mathbb{R}^3$ identifiziert und die *Zeit* mit $\mathbb{R}$. Diese Konzepte sind so vertraut, daß wir oft nicht mehr nachfragen, ob, warum und in welchem Rahmen diese Zuordnung eines „Gegenstandes“ der physikalischen Anschauung zu einer mathematischen Struktur überhaupt möglich ist.

Was ist *Raum*, *Zeit* bzw. *Raum-Zeit*? Genauer, was sind die Elemente dieser drei Mengen. Ich möchte mit der Raum-Zeit als dem übergeordneten Begriff beginnen. Die Aufspaltung der Raum-Zeit in Raum und Zeit ist in der klassischen Mechanik und der relativistischen Mechanik unterschiedlich. Die Elemente der Raum-Zeit sind die *Ereignisse* (events). Der Begriff des Ereignisses ist mathematisch nicht mehr genauer definierbar, sondern wirklich ein Teil der physikalischen Realität. Man kann lediglich gewissen Kriterien aufstellen, die ein Elementarereignis erfüllen sollte.

Ereignisse sind prinzipiell für jeden objektiv wahrnehmbar und referierbar. Außerdem sollten sich Elementarereignisse nicht weiter in Teilereignisse zerlegen lassen. Typische Ereignisse der Alltagswelt sind: „Der Zeiger einer bestimmten Uhr zeigt auf 3 Uhr“, „ein Punktteilchen kreuzt eine bestimmte Markierung auf einem bestimmten Meßstab“. Konkretere Ereignisse die dem Kriterium der „Punktförmigkeit“ genügen

sind beispielsweise „ein Elektron trifft auf eine Platte einer Funkenkammer“, „ein Photon trifft auf unsere Netzhaut“ etc. Die Problematik hier ist, daß diese Ereignisse bereits eine quantenmechanische Beschreibung erfordern und in diesem Zusammenhang das Kriterium der „Realität“ (im Gegensatz zu sogenannten virtuellen Ereignissen) zu hinterfragen ist. Man erkennt bereits, daß ein einfaches Nachfragen über die Grundlagen der Raum-Zeit zu tiefen Problemen der Grundlagenphysik führen kann. Ein endgültige Klärung dieser Fragen wird vermutlich erst im Rahmen einer konsistenten Theorie der Quantengravitation (also einer Theorie, welche die Dynamik der Raum-Zeit und die Grundlagen der Quantenmechanik vereint) möglich sein.

Auf der Menge der Ereignisse ist in natürlicher Weise eine Struktur gegeben, nämlich eine kausale Relation, d.h. eine Halb- oder Teilordnung:

$$\text{Raum-Zeit} \;\simeq\; \{\text{(mögliche) Ereignisse}\} \;+\; \text{kausale Relation} \;.$$

In unserer Erfahrung sind zwischen je zwei kausal zusammenhängenden Ereignissen weitere Ereignisse wahrnehmbar, d.h. wir empfinden die Menge der (möglichen) Ereignisse als ein Kontinuum, das wir als *Raum-Zeit* bezeichnen. Die Frage, ob es eine abstrakte, „ereignisfreie“ Raum-Zeit überhaupt gibt, ist philosophischer Natur. Zumindest wird eine solche abstrakte Raum-Zeit nicht Gegenstand physikalischer Beobachtung oder Forschung sein können.

2.1.2 Weltlinien, Gleichzeitigkeit und die Trennung von Raum und Zeit

Manche Folgen von Ereignissen empfinden wir als besonders stark kausal korreliert. Es handelt sich dabei um solche Ereignisse, die wir mit der Beobachtung der Bewegung von Teilchen verbinden. Die Ereignisfolge besteht aus Emissionen von Photonen des betreffenden Teilchens (die eigentliche Wahrnehmung findet natürlich erst mit dem Auftreffen dieser Photonen auf unsere Netzhaut statt). Solche Ereignisfolgen extrapolieren, idealisieren und objektivieren wir zu einer kontinuierlichen Bahnkurve, die man als *Weltlinie* des Teilchens bezeichnet.

Die kausale Teilordnung von Ereignissen erlaubt zu jedem Ereignis eine Aufteilung der verbleibenden Ereignisse in drei Klassen: zukünftige Ereignisse (die von dem betreffenden Ereignis kausal beeinflußt werden können), vergangene Ereignisse (von denen das betreffende Ereignisse kausal beeinflußt sein kann) und Ereignisse ohne kausale Relation. Die letztere Klasse bezeichnet man in der Relativitätstheorie als „raumartige“ Ereignisse.

Aus der speziellen Relativitätstheorie ist bekannt, daß die Aufteilung der Raum-Zeit in „Raum“ und „Zeit“, also insbesondere der Begriff der *Gleichzeitigkeit*, vom Bewegungszustand des Beobachters abhängt. Die damit verbundenen Probleme werden im Rahmen der Relativitätstheorie behandelt. Hier nehmen wir den klassischen Standpunkt ein, nach dem „Gleichzeitigkeit“ eine objektive, für jeden Beobachter gleiche

Bedeutung hat. Zu jedem Ereignis gibt es damit die Menge der gleichzeitigen Ereignisse. Die Menge der (möglichen) gleichzeitigen Ereignisse empfinden wir ebenfalls als ein Kontinuum, und zwar als ein Kontinuum, dessen Struktur von der Wahl des ursprünglichen Ereignisses unabhängig scheint. Dieses Kontinuum bezeichnen wir als *Raum*.

Da die Weltlinie von Teilchen die Menge der gleichzeitigen Ereignisse zu einem vorgegebenen Ereignis irgendwo schneidet, und (zumindest im Prinzip) dies in jedem der gleichzeitigen Ereignisse geschehen kann, läßt sich *Raum* auch als die Menge der möglichen Positionen eines Punktteilchens definieren.

2.1.3 Die Geometrie des Raumes

Um nicht zu tief in naturphilosophische Betrachtungen abzusinken setzen wir im folgenden voraus, daß wir wissen, was Raum ist, und daß wir den Raum auch ausmessen können. Damit ist insbesondere gemeint, daß wir die Länge eines Weges im Raum bzw. einer Strecke im Raum bestimmen können (ausgedrückt in frei wählbaren Längeneinheiten). Diese Möglichkeit erlaubt es uns, die Geometrie des Raums zu bestimmen. Da wir die Länge von Wegen im Raum ausmessen können, können wir auch *Geodäten* als die kürzesten Verbindungswege zwischen zwei Punkten definieren. Noch sollten wir in diesem Zusammenhang nicht von *Geraden* sprechen, denn Geraden setzen das Konzept eines (euklidischen) Vektorraums voraus.

Was ist die Dimension des Raumes ? Drei natürlich ! Warum ? Wir können die Menge aller Raumpunkte konstruieren, die einen konstanten Abstand von einem gegebenen Punkt haben (und erhalten eine Sphäre). Nun bestimmen wir auf dieser Menge wiederum die Menge aller Punkte mit einem konstanten Abstand von einem ausgezeichneten Punkt (und erhalten einen Kreis). Auf dieser Menge konstruieren wir wiederum die Menge aller Punkt in konstantem Abstand von einem Referenzpunkt und erhalten zwei Punkte. Wir mußten dieses Verfahren dreimal anwenden, um bei zwei (nichtzusammenhängenden) Punkten zu enden. Daraus können wir schließen, daß der Raum dreidimensional ist.

Als nächstes können Dreiecke konstruieren (drei Punkte sowie die verbindenden Geodäten zwischen ihnen) und überprüfen, daß die Summe der Winkel zwischen den Geodäten an den Eckpunkten der Dreiecke 180° beträgt. Dieses Experiment wurde von Gauß tatsächlich durchgeführt. Er hat die Winkel ausgemessen, unter denen jeweils zwei von drei Bergspitzen von der dritten aus gesehen werden können (voraussetzend, daß sich Licht entlang von Geodäten ausbreitet). Im Rahmen seiner experimentellen Genauigkeit fand er tatsächlich 180° und schloß daraus, daß unser Raum *flach* ist. In einem gekrümmten Raum wäre die Winkelsumme nämlich größer (positive Krümmung) oder kleiner (negative Krümmung) als 180°. Wir haben somit experimentell überprüft, daß der beobachtbare Raum (zumindest auf Längenskalen, die uns durch direkte Beobachtung zugänglich sind) ein flacher, dreidimensionaler Raum ist. Nun sagt uns die

Mathematik, daß ein solcher Raum lokal mit einer offenen Umgebung des $\mathbb{R}^3$ übereinstimmt.

2.1.4 Koordinaten

Unser Raum erscheint uns isotrop (es gibt keine ausgezeichnete Richtung) und homogen (es gibt keinen ausgezeichneten Raumpunkt). Es gibt somit kein ausgezeichnetes Koordinatensystem, also weder einen ausgezeichneten Koordinatenursprung, noch ausgezeichnete Richtungen für Koordinatenachsen. Weiterhin gibt es in einem Kontinuum keine ausgezeichnete Längenskala, d.h. die Wahl einer Einheitslänge ist uns ebenfalls freigestellt. Durch die Möglichkeit, Abstände miteinander vergleichen zu können, sind wir jedoch in der Lage, zwei Geraden als zueinander „senkrecht“ zu klassifizieren, d.h., wir können karthesische Koordinatensysteme bilden. Zwei Koordinatensysteme im Raum sind daher äquivalent, wenn sie durch eine Verschiebung, eine Drehung und/oder eine Streckung ineinander überführt werden können.

Bei vorgegebener Wahl eines Koordinatensystems (was sowohl die Wahl einer Längenskala als auch die Wahl „positiver“ Richtungen einschließt) können wir jeden Raumpunkt durch die Angabe seines Abstands relativ zu den drei Koordinatenachsen charakterisieren. In einem nicht-karthesischen affinen Koordinatensystem (bei dem die Achsen nicht senkrecht aufeinander stehen) projiziert man im allgemeinen den Punkt entlang der drei Koordinatenachsen auf die Fläche, die von den jeweils anderen beiden Achsen aufgespannt wird. Die Länge dieser Projektionsgeraden ist dann die entsprechende Koordinate des Punktes.

Oft ist es günstiger, Punkte oder Positionen nicht durch ihre karthesischen Koordinaten auszudrücken, sondern durch andere Koordinaten (z.B. Polarkoordinaten, d.h. den Abstand des Punktes von einem Referenzpunkt, den Winkel, unter dem er relativ zu einer ausgezeichneten Achse gesehen wird, und einen zweiten Winkel zwischen der Ebene, die von dem Punkt und der Achse aufgespannt wird, und einer zweiten ausgezeichneten Richtung). Immer müssen jedoch ein Koordinatenursprung, eine Längenskala und zwei Richtungen ausgezeichnet sein. Durch welche Parameter man die Lage des Punktes dann letztendlich angibt, hängt oft von den Symmetrien des Systems ab, das man beschreiben möchte.

Damit können wir auch äquivalent sagen: Durch die Angabe von drei Punkten im Raum (einen Ursprungspunkt und zwei weiteren, die sowohl zwei Richtungen wie auch eine Längenskala definieren) ist ein (räumliches) Bezugssystem ausgezeichnet.

2.1.5 Zeit

„Zeit ist, was die Uhr anzeigt.“ Diese Antwort Einsteins auf die insistierende Frage eines Reporters erscheint zunächst trivial. Bei genauerer Reflexion wird sie jedoch zu

einer tiefgründigen Aussage. So verschwindet beispielsweise das sogenannte Zwillings-Paradoxon der speziellen Relativitätstheorie — zwei Zwillinge bewegen sich entlang verschiedener Weltlinien und sind beim Wiedersehen unterschiedlich alt — ganz von selbst: Jeder Zwilling trägt seine eigene Uhr bei sich (dabei kann „Uhr“ auch die physiologische Uhr bedeuten, gegeben z.B. durch den Herzschlag oder den Alterungsprozeß), und wenn die Uhren entlang verschiedener Weltlinien verschieden schnell laufen, dann heißt dies nach der Aussage Einsteins, daß entlang verschiedener Weltlinien auch die Zeit verschieden schnell vergeht.

Wir beschränken uns im folgenden wieder auf die klassische Newtonsche Mechanik, in der die Zeit als universell aufgefaßt wird. Zeit erscheint uns als eindimensionales Kontinuum. Aber ein Kontinuum besitzt keine ausgezeichnete Skala. Dies bedeutet nicht nur, daß wir eine Zeitskala festlegen müssen, sondern wir müssen auch eine Vorschrift angeben, die es uns ermöglicht von „Gleichförmigkeit“ zu sprechen. Ein eindimensionales Kontinuum erlaubt es zunächst nicht, die Skala an einem gegebenen Punkt mit der Skala an einem anderen Punkt zu vergleichen. (Das gleiche Problem tritt auch bei der Wahl einer Längenskala auf. Wir haben implizit vorausgesetzt, daß sich unsere Maßstäbe nicht verbiegen, wenn wir sie von einem Raumpunkt zu einem anderen Raumpunkt verschieben.)

Wir benutzen ausgezeichnete physikalische Systeme (Uhren) zur Messung von Zeit. Diesen Systemen ist gemein, daß sie periodische Bewegungen ausführen (Pendel, Erdrotation, Quarzschwingungen etc.). Vergleichen wir verschiedene solcher einfacher Systeme mit periodischen Bewegungen miteinander, so stellen wir fest, daß ihre Taktzeit (die Zeitspanne zwischen dem Durchlaufen gleicher Zustände) relativ zueinander gleichbleibt. (Es gibt komplizierte, nicht-lineare Systeme, für die das nicht gilt. Die einfachsten Systeme zeigen jedoch näherungsweise diese Eigenschaft.) Wir können daher sowohl die Zeitskala wie auch „Gleichförmigkeit“ durch die Taktzeit solcher Systeme mit periodischen Bewegungsabläufen definieren.

Wie problematisch eine solche Zeitdefinition ist, zeigen die Schwierigkeiten bei astronomischen Zeitangaben: Die Rotation der Erde wird durch die Gezeitenkräfte abgebremst, dadurch wird der Tag im Laufe der Zeit länger. (Die Zeitangaben der Griechen von Sonnenfinsternissen stimmen nicht mit den Werten überein, die wir durch Rückrechnung der Mondlaufbahn erhalten. Es zeigt sich eine Differenz in der Größenordnung von einer Stunde, die sich auf diesen Effekt zurückführen läßt.) Auch die Bahn der Erde um die Sonne definiert keine gute Zeitskala, da sich aufgrund der Periheldrehung die Ellipsenbahn der Erde verschiebt. Der sogenannte Frühjahrspunkt verschiebt sich. Die „relative Konstanz der Taktzeiten“ ist daher bei sehr genauen Beobachtungen in der Astronomie nicht mehr gegeben.

2.1.6 Bezugssysteme und Inertialsysteme

Wir denken uns nun zu jedem Zeitpunkt ein Koordinatensystem gegeben. Die Weltlinien des Koordinatenursprungs sowie der Koordinatenachsen sollen sich dabei im Verlauf der Zeit stetig verändern. Eine solches sich zeitlich entwickelndes Koordinatensystem bezeichnen wir als *Bezugssystem.*

Manchmal unterscheidet man zwischen einem sich zeitlich entwickelnden Koordinatensystem und einem Bezugssystem: Unter einem Bezugssystem versteht man dann nur die Vorgabe eines Koordinatenursprungs, der einen *Bezugspunkt* O definiert. In einem flachen Raum sind dann die Verbindungsstrecken $\vec{OP}$ von dem Bezugspunkt zu einem anderen Punkt P die sogenannten Ortsvektoren (s.u.). In einem gekrümmten Raum, wie er beispielsweise in der allgemeinen Relativitätstheorie betrachtet wird, bilden die Verbindungsstrecken (die Geodäten von O zu P) jedoch keinen Vektorraum mehr, so daß man nur noch lokal Koordinatenumgebungen definieren kann. Daß der Newtonsche Raum der klassischen Mechanik bei Vorgabe eines Bezugspunktes zu einem Vektorraum wird, ist daher eine besondere Eigenschaft.

Da wir Raumpunkte zu verschiedenen Zeiten nicht direkt miteinander vergleichen können, wissen wir auch nicht, wann eine Weltlinie relativ zum Raum ruht. Wir müssen gewisse Weltlinien als „ruhend“ auszeichnen.

Auch diese Eigenschaft der Raum-Zeit ist nicht selbstverständlich. Um die Jahrhundertwende glaube man an die Existenz eines „Äthers“. Ein solcher Äther würde bestimmte Bezugssystem als ruhend auszeichnen, ohne daß dadurch die Isotropie und Homogenität des Raumes eingeschränkt wäre.

Auch in diesem Fall treffen wir die Wahl nach dem Prinzip der „Einfachheit“. Manche Körper bewegen sich relativ zu einander in einer einfachen Weise, nämlich *geradlinig.* Damit diese Aussage sinnvoll ist, müssen wir die Weltlinien von drei punktförmigen Teilchen als geradlinig *definieren*, und können dann von einer vierten Weltlinie sagen, daß sie relativ zu den anderen Weltlinien geradlinig verläuft. Bei diesen Körpern lassen sich im allgemeinen keine offensichtlichen äußeren Einflüsse (Kräfte) ausmachen, die die Weltlinien dieser Körper beeinflussen. Wir erhalten also als experimentellen Befund: Es ist konsistent, die relative Bewegung von kräftefreien Punktteilchen als geradlinig zu bezeichnen.

Damit finden wir ein bestimmte Klasse von ausgezeichneten Bezugssystemen, die sogenannten *Inertialsysteme*: In einem Inertialsystem bewegen sich alle Punktteilchen, auf die keine Kräfte einwirken, geradlinig und gleichförmig.

Eine detaillierte mathematische Analyse zeigt, daß jedes Bezugssystem, welches sich durch eine (zeitunabhängige) Rotation, eine konstante Verschiebung des Zeitursprungs und einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung der Koordinatenursprünge aus einem Inertialsystem erhalten läßt, ebenfalls ein Inertialsystem ist. Die Menge dieser Transformationen zwischen zwei Inertialsystemen (der klassischen Newtonschen Mechanik) bezeichnet man als *Galilei-Transformation.*

Abschließend sei noch angemerkt, daß auch in der speziellen Relativitätstheorie die Inertialsysteme dadurch ausgezeichnet sind, daß die kräftefreie Bewegung in ihnen geradlinig und gleichförmig ist. In diesem Fall sind die Transformationen, die zwei Inertialsysteme ineinander überführen, die *Poincaré-Transformationen*.

2.2 Vektorräume und Basisvektoren

Ein *Vektorraum* über einem Körper K (für uns ausschließlich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) ist eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $(\cdot) : K \times V \to V$ derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- V ist bezüglich der Verknüpfung $+$ eine Abelsche Gruppe, d.h. es gilt für alle $\vec{v}_i \in V$
  1. Assoziativität: $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$
  2. Kommutativität: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$
  3. Existenz eines neutralen Elements: Es gibt ein ausgezeichnetes Element $\vec{0}$ mit $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
  4. Zu jedem $\vec{v} \in V$ gibt es ein Inverses $-\vec{v}$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
- Es gilt für alle $\lambda \in K$ und $\vec{v} \in V$:
  $\lambda\vec{v} = \vec{v}\lambda$ und $0\vec{v} = \vec{0}$
- Es gelten folgende Distributivgesetze für alle $\lambda, \nu \in K$ und $\vec{v}_i \in V$:
  1. $\lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_2$
  2. $(\lambda + \nu)\vec{v} \;=\; \lambda\vec{v} + \nu\vec{v}$
  3. $\lambda(\nu\vec{v}) = (\lambda\nu)\vec{v}$

Beispiele für (reelle) Vektorräume sind:

1. Der $\mathbb{R}^n$, d.h. n-Tupel von reellen Zahlen.
2. Die Äquivalenzklasse von geordneten Punktepaaren („Pfeilen“) im $\mathbb{R}^n$ (genauer, in einem affinen n-dimensionalen Raum): Zwei Punktepaare heißen dabei äquivalent, wenn sie durch Verschiebungen ineinander überführt werden können.

Man beachte, daß im $\mathbb{R}^n$ ein Ursprung ausgezeichnet ist, nämlich das $\vec{0}$-Element $(0, 0, \ldots, 0)$. Die Punkte in unserem dreidimensionalen Raum bilden jedoch zunächst keinen Vektorraum, da kein $\vec{0}$-Element ausgezeichnet ist. Wenn wir jedoch einen Ursprungspunkt O *definieren*, dann bilden die sogenannten *Ortsvektoren* $\vec{r} = \vec{OP}$ einen

Vektorraum. Im folgenden denken wir uns immer einen Ursprung gegeben, ohne daß es explizit erwähnt wird.

Ein Satz von Vektoren $\{\vec{e}_i\}$ ($\neq \vec{0}$) eines Vektorraums V heißt *linear unabhängig*, wenn aus

$$\sum_i \alpha_i \vec{e}_i \;=\; 0$$

folgt

$$\alpha_i \;=\; 0 \;\; \forall\, i \; .$$

Ein Satz von linear unabhängigen Vektoren $\{\vec{e}_i\}$ aus V heißt eine *Basis* von V, wenn es keinen (größeren) Satz linear unabhängiger Vektoren gibt, der $\{\vec{e}_i\}$ enthählt. Die Anzahl der Elemente in einer Basis ist unabhängig von der speziellen Wahl der Basis und wird als *Dimension* von V bezeichnet.

Sei $\{\vec{e}_i\}$ eine Basis von V, dann läßt sich jedes Element $\vec{v} \in V$ eindeutig nach dieser Basis entwickeln:

$$\vec{v} \;=\; v_i \vec{e}_i \; .$$

Hierbei wurde die sogenannte *Einsteinsche Summenkonvention* benutzt: Über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren.

Bei der Summenkonvention ist noch zu beachten, daß die Bezeichnung der Summationsindizes natürlich beliebig ist, d.h. $v_i\vec{e}_i$ und $v_k\vec{e}_k$ bezeichnen beide dasselbe: $v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots$. Man sollte darauf achten, in einer Formel nicht mehrmals denselben Buchstaben für verschiedene Summationsindizes zu benutzen, da sonst leicht Verwirrung auftreten kann, welche zwei Indizes zusammengehören.

2.2.1 Basistransformationen, ko- und kontravariantes Transformationsverhalten

Seien $\{\vec{e}_i\}$ und $\{\vec{f}_i\}$ zwei mögliche Sätze von Basisvektoren eines Vektorraumes V. Zunächst können wir natürlich jedes Element der „alten“ Basis $\{\vec{e}_i\}$ als Linearkombination der „neuen“ Basis $\{\vec{f}_i\}$ ausdrücken:

$$\vec{e}_i \;=\; D_{ik}\vec{f}_k \;\; \text{(Summenkonvention!)} \; .$$

Die (quadratische $n \times n$-) Matrix D mit Matrixelementen D_{ik} definiert die *Basistransformation* von der neuen Basis (f) zur alten Basis (e).

Ein Element des Vektorraumes $\vec{v}$ verändert sich unter einem solchen Basiswechsel natürlich nicht, wohl aber seine Komponenten. Es gelte:

$$\vec{v} \;=\; v_i\vec{e}_i \quad \text{und} \quad \vec{v} \;=\; v'_i\vec{f}_i \; .$$

Wir wollen uns nun überlegen, wie die neuen Komponenten v'_i mit den alten Komponenten v_i zusammenhängen. Offensichtlich ist:

$$\vec{v} \;=\; v_i\vec{e}_i \;=\; v_i D_{ik}\vec{f}_k \;=\; v'_k\vec{f}_k \; .$$

Hier wird die Einsteinsche Summenkonvention gleich zweimal in einem Ausdruck benutzt.

Da die Zerlegung eines Vektors in einer gegebenen Basis (hier $\{\vec{f}_k\}$) eindeutig ist, muß gelten:

$$v^i D_{ik} \;=\; v'_k \quad \text{bzw.} \quad v'_k \;=\; D_{ik} v_i \;. \tag{2.1}$$

Dies ist die gesuchte Relation zwischen den Komponenten eines Vektors in verschiedenen Basen. Hier sollte zwischen dem Summationsindex i auf derselben Seite der Gleichung, und dem offenen Index k unterschieden werden. Die Gleichung 2.1 ist eine Kurzform für drei verschiedene Gleichungen:

$$\begin{aligned} v'_1 &= D_{11}v_1 + D_{12}v_2 + D_{13}v_3 \\ v'_2 &= D_{21}v_1 + D_{22}v_2 + D_{23}v_3 \\ v'_3 &= D_{31}v_1 + D_{32}v_2 + D_{33}v_3 \;. \end{aligned}$$

Man beachte das entgegengesetzte Transformationsverhalten der Basisvektoren einerseits und der Komponenten eines gegebenen Vektors andererseits: Die Komponenten D_{ik} definierten die Transformation von den neuen Basisvektoren (f) zu den alten Basisvektoren (e). Dieselben Komponenten D_{ik} bestimmen dann auch das Transformationsverhalten von den alten Komponenten eines Vektors (v) zu seinen neuen Komponenten (v').

Bezeichnen wir mit D^{-1} die *inverse* Abbildung von D, dann gilt

$$\vec{e}_i \;=\; D_{ik}\vec{f}_k \qquad \Rightarrow \qquad \vec{f}_i \;=\; (D^{-1})_{ik}\vec{e}_k \;.$$

Anders ausgedrückt ist die Abbildung von den alten zu den neuen Basisvektoren gerade das inverse der Abbildung von den alten zu den neuen Komponenten.

Objekte, die sich wie die Basisvektoren transformieren, bezeichnet man als *kovariant* — Objekte, die sich wie die Komponenten transformieren als *kontra-variant*.

Als Beispiel für ein solches „Objekt“ sei der zu V duale Vektorraum V^* angegeben, dessen Elemente aus allen linearen Abbildungen von V in den Körper K bestehen:

$$V^* \;=\; \{\, \vec{\omega} \mid \vec{\omega} : V \to K \;\text{ und }\; \vec{\omega}(\lambda\vec{v}_1 + \nu\vec{v}_2) = \lambda\vec{\omega}(\vec{v}_1) + \nu\vec{\omega}(\vec{v}_2) \,\}$$

V^* ist wieder ein Vektorraum und hat (für endlich dimensionale Vektorräume) dieselbe Dimension wie V. Eine Basis $\{\vec{e}_i\}$ in V definiert eine ausgezeichnete Basis $\{\vec{\epsilon}_i\}$ in V^* über die Vorschrift:

$$\vec{\epsilon}_i(\vec{e}_j) \;=\; \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.2}$$

Jedes Element aus V^* läßt sich wieder nach dieser Basis entwickeln:

$$\vec{\omega} \;=\; \omega_i \vec{\epsilon}_i \quad \text{Summenkonvention!}$$

Damit die Relation (2.2) erhalten bleibt, hat ein Basiswechsel in V einen Basiswechsel in V^* zur Folge. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß sich die Basis in V^* gerade entgegengesetzt transformiert, wie die Basis in V, d.h. die Basis in dem dualen Vektorraum transformiert sich kontravariant. Die Komponenten der dualen Vektoren hingegen, $(\{\omega_i\})$, transformieren sich kovariant.

Später werden wir weitere „Objekte“definieren, beispielsweise den Gradienten von Skalarfeldern, Tensoren, etc. Diese Größ en sind alle durch ihr Transformationsverhalten under einer Basistransformation in V charakterisiert, und die Unterteilung in kovariantes und kontravariantes Transformationsverhalten spielt eine wichtige Rolle.

Außerdem sei darauf hingewiesen, daß sich bei der Indexschreibweise in der Relativitätstheorie wie auch der Differentialgeometrie, wo die Unterscheidung zwischen ko- und kontravarianten Objekten wichtig wird, eine Notation durchgesetzt hat, die an der Stellung der Indizes zwischen ko- und kontravariant unterscheidet: Objekte mit einem Index, die sich bezüglich dieses Index wie Basisvektoren — also kovariant — transformieren, tragen den Index unten. Objekte mit einem Index, die sich wie die Komponenten eines Vektors transformieren — d.h. kontravariant — tragen den Index oben:

$$\vec{v} \;=\; v^i \vec{e}_i \qquad \vec{\omega} \;=\; \omega_j \vec{\epsilon}_j \;.$$

Die Einsteinsche Summenkonvention wird dann dahingehend spezifiziert, daß über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist, von den einer oben und einer unten steht.

2.2.2 Skalar- und Vektorprodukt

Ein *Skalarprodukt* auf einem (reellen) Vektorraum ist eine Abbildung $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, die für alle $\vec{v}_i \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt:

- Kommutativität: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \;=\; \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$
- $\vec{v}_1 \cdot (\lambda \vec{v}_2) = \lambda (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$.
- Bilinearität: $\vec{v}_1 \cdot (\alpha \vec{v}_2 + \beta \vec{v}_3) \;=\; \alpha \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \beta \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3$

Gilt außerdem

- Positivität: $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ und $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{v} = \vec{0}$,

so heißt das Skalarprodukt *positiv-definit*. Statt Skalarprodukt spricht man auch von einer (positiv-definiten) Bilinearform auf V.

Durch ein positiv-definites Skalarprodukt wird ein Vektorraum zu einem sogenannten euklidischen Vektorraum. Im folgenden bezeichnet Skalarprodukt immer ein

positiv-definites Skalarprodukt. In der Relativitätstheorie hat man jedoch eine (Poincaré-Invariante) Bilinearform auf der Raum-Zeit, die nicht positiv-definit ist. Der 4-dimensionale Vektorraum der Raum-Zeit wird dadurch zum sogenannten Minkowski-Raum.

Ein Skalarprodukt ordnet jedem Vektor eine Länge $|\vec{v}| = (\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2}$ zu. Wir können also Abstände zwischen Punkten angeben. Außerdem kann man mit Hilfe des Skalarprodukts Winkel zwischen Vektoren angeben:

$$\cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \;=\; \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} \;.$$

Wir können das Skalarprodukt auch zur Definition einer sogenannten *Orthonormalbasis* nutzen. Für die Basisvektoren einer Orthonormalbasis gilt:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \;=\; \delta_{ij} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Symbol δ_{ij} bezeichnet man auch als *Kronecker-Delta*. Es sind die Komponenten der Identitätsmatrix.

In einer Orthonormalbasis gilt für das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \;=\; (x_i \vec{e}_i) \cdot (y_j \vec{e}_j) \;=\; x_i y_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \;=\; x_i y_j \delta_{ij} \;=\; x_i y_i \quad \text{(Summenkonvention !)}$$

Wir werden in Zukunft nahezu ausschließlich Orthonormalbasen verwenden. Obige Relation für den Winkel zwischen zwei Vektoren erlaubt auch eine anschauliche Definition des Skalarprodukts. Da

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \;=\; \cos \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) \; |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \;,$$

ist das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren gleich dem Produkt der Länge der Projektion des einen Vektors mit der Länge des anderen. Insbesondere verschwindet das Skalarprodukt für Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen.

Während das obige Skalarprodukt für jeden $\mathbb{R}^n$ definiert ist, läßt sich für den $\mathbb{R}^3$ noch ein weiteres Produkt definieren, das sogenannte *vektorielle Produkt* oder auch *Kreuzprodukt*: $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Es ist durch folgende Bedingungen eindeutig charakterisiert:

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= -\vec{y} \times \vec{x} \quad \text{(Antisymmetrie)} \\ \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) &= (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z}) \quad \text{(Bilinearität)} \\ \vec{x} \times (\lambda \vec{y}) &= \lambda (\vec{x} \times \vec{y}) \\ \vec{e}_i \times \vec{e}_j &= \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \;. \end{aligned}$$

Hierbei wurde das sogenannte *Levi-Civita-Epsilon-Symbol* eingeführt. Es ist folgendermaßen definiert:

$$\epsilon_{ijk} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von (1,2,3) ist} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von (1,2,3) ist} \\ 0 & \text{sonst, d.h. falls zwei der Indizes gleich sind} \end{cases}$$

Obige Bedingung für das Kreuzprodukt der Basisvektoren in einer Orthonormalbasis lautet damit explizit:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \ . \end{aligned}$$

Auch das Kreuzprodukt zweier Vektoren hat eine anschauliche Bedeutung: Der resultierende Vektor steht senkrecht auf den beiden anderen Vektoren (so daß die sogenannte „Rechte-Hand-Regel“ gilt), und seine Länge ist proportional zur Fläche des aufgespannten Parallelogramms. Insbesondere verschwindet (wegen der Antisymmetrie) das Kreuzprodukt zwischen parallelen Vektoren.

2.2.3 Bahnkurven und Trajektorien

Im Verlauf der Zeit beschreibt ein Punktteilchen eine sogenannte Bahnkurve, d.h. eine Abbildung: Zeitintervall $\to$ Raum. Bei fester Wahl eines Koordinatensystems können wir eine Bahnkurve durch eine Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $t \to \vec{r}(t)$ beschreiben. Wir fordern im allgemeinen, daß die Komponenten dieser Bahnkurve (mindestens) zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind und definieren:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) = \vec{v}(t) \qquad \text{Geschwindigkeit(skurve)} \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t) = \vec{a}(t) \qquad \text{Beschleunigung(skurve)} \ . \end{aligned}$$

Wie man sich leicht überlegen kann, werden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen experimentell durch Verfahren gemessen, die genau der mathematischen Operation des Limes eines Differentenquotienten, d.h. des Differentialquotienten entsprechen. Da der Differentialquotient durch die Differenz zweier Vektoren definiert ist, fällt die (willkürliche) Wahl des Koordinatenursprungs heraus. Geschwindigkeit und Beschleunigung sind also von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig.

Die Beschleunigung ist außerdem unabhängig vom Inertialsystem und hat damit eine (system-) unabhängige physikalische Bedeutung. Die Geschwindigkeit hängt allerdings von der Wahl des Inertialsystems ab.

Wie oben angegeben, bezeichnet die Bahnkurve die genaue Zeitabhängigkeit, mit der ein Teilchen den Raum durchläuft. Daher haben die Ableitungen nach der Zeit (Geschwindigkeit und Beschleunigung) auch physikalische Bedeutung. Interessiert man sich jedoch nur für die räumliche Gestalt der Bahnkurve und nicht für die explizite Zeitabhängigkeit, so kann man auch eine andere Parametrisierung wählen. Man spricht dann von der *Trajektorie*. Beispielsweise sind die Trajektorien von Teilchen in einem Kepler-Potential Ellipsen, ebenso wie die Trajektorien von Teilchen eines zweidimensionalen harmonischen Oszillators. Die Bahnkurven unterscheiden sich jedoch wesentlich: Für das Kepler-Problem ist das Rotationszentrum des Potentials in einem Brennpunkt der Ellipse und die Geschwindigkeit wegen der Drehimpulserhaltung beim Perihel am größten. Bei zweidimensionalen harmonischen Oszillator ist das Rotationszentrum des Potentials im Zentrum der Ellipse und daher die Geschwindigkeit bei den kleinen Halbachsen am größten. Kennt man die Bahnkurve, so läßt sich auch das Potential berechnen. Für die Trajektorie gilt das nicht.

2.3 Energie, Impuls, Drehimpuls — Observable

energy, momentum, angular momentum — observable

Energie, Impuls und Drehimpuls sind — unabhängig ob in einer Newtonschen oder einer relativistischen Mechanik — die wesentlichen kinematischen Größen, durch die beispielsweise Streuprozesse (scattering process) beschrieben werden. Der tiefere Grund, daß gerade diese Größen eine so herausragende Bedeutung haben, liegt an der Tatsache, daß sie für freie Teilchen Erhaltungsgrößen (conserved quantities) sind, d.h. der Zustand eines freien Teilchens (wie er gerade bei Streuprozessen asymptotisch auftritt) durch diese Größen angegeben werden kann.

Ein weiterer Grund für die besondere Bedeutung obiger Größen ist, daß sie in direktem Zusammenhang mit den Invarianzen des physikalischen Raumes in der Newtonschen Mechanik stehen. So hängt die Energie eng mit der Invarianz unter einer Zeitverschiebung zusammen, der Impuls mit der Translationsinvarianz des freien Raumes und der Drehimpuls mit der Rotationsinvarianz des freien Raumes.

In der Newtonschen Mechanik lassen sich Impuls, Energie und Drehimpuls folgendermaßen durch die kinematischen Größen $\vec{x}(t)$ und $\dot{\vec{x}}(t)$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\dot{\vec{x}} \\ E &= \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 + V(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 + V(\vec{x}) \\ \vec{L} &= m(\vec{x}\times\dot{\vec{x}}) \;=\; \vec{x}\times\vec{p}\,. \end{aligned}$$

Energie, Impuls und Drehimpuls sind sogenannte *Observable*. Observable sind in der Newtonschen Mechanik gerade die Funktionen auf dem *Phasenraum*, d.h. die Funktionen von $\vec{x}$ und $\vec{p}$. Durch die Angabe von Ort und Impuls ist der Zustand eines

(spinfreien Punkt-) Teilchens eindeutig festgelegt, d.h. jede beobachtbare Größe muß sich als Funktion dieser beiden Größen schreiben lassen. (Noch eine Definition: Unter dem *Konfigurationsraum* versteht man die Menge der möglichen Konfigurationen, d.h. die Menge der möglichen Positionen eines Teilchens.)

Ganz allgemein bezeichnet in der Mathematik der Differentialgleichungen der Phasenraum den „Raum aller möglichen Anfangsbedingungen“. So ist der Phasenraum zu einer Differentialgleichung der Form $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$ gleich dem Raum der möglichen Positionen $\vec{x}$. Bei einer Differentialgleichung der Form $\vec{x}^{(n)} = f(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ldots, \vec{x}^{(n-1)})$ kann man neben $\vec{x}$ selber auch die ersten $n-1$ Ableitungen von $\vec{x}(t)$ vorgeben. Der Phasenraum ist also nd-dimensional (falls d die Dimension des Raumes der Positionen ist).

In der Physik bezeichnet man jedoch mit dem Phasenraum nicht den Raum der Positionen und Geschwindigkeiten $\{\vec{x}, \dot{\vec{x}}\}$, sondern den Raum der Positionen und Impulse $\{\vec{x}, \vec{p}\}$. Der Grund liegt darin, daß die Dynamik eines Systems (näheres s.u.) oft im Rahmen des sogenannten Hamiltonschen Formalismus behandelt wird. In diesem Fall ersetzt man die Newtonsche Bewegungsgleichung zweiter Ordnung, $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$, durch die sogenannte Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erster Ordnung: $\dot{\vec{x}} = \vec{p}/m$ und $\dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{x})$. Der zugehörige Phasenraum ist der Raum der Positionen und Impulse.

Der Drehimpuls hängt vom Ortsvektor $\vec{x}$ ab und verlangt daher die Angabe eines Bezugspunktes. Energie und Impuls sind zwar unabhängig vom Bezugspunkt, hängen jedoch von der Wahl des Inertialsystems ab. Energie, Impuls, Drehimpuls (und generell Observable) sind damit keine Größen, die der Teilchenbewegung an sich zukommen, sondern vom relativen Bewegungszustand des Beobachters abhängen. Statt zu sagen, „ein Teilchen hat die Energie E“, sollte man besser sagen, „für ein Teilchen beobachtet man die Energie E“.

Kapitel 3

Die Dynamik der klassischen Mechanik

3.1 Das dynamische Grundgesetz der Newtonschen Mechanik

3.1.1 Dynamik der kräftefreien Bewegung

Bisher haben wir uns mit Größen beschäftigt, mit deren Hilfe man die Bewegung oder Bahnkurve eines Teilchens *beschreiben* kann. Solche Größen bezeichnet man auch als *kinematische* Größen. Die *Kinematik* beschäftigt sich also mit der Beschreibung bzw. Charakterisierung von Bewegungsabläufen.

Wir wollen uns nun mit den Gleichungen beschäftigen, aus denen sich eine Bahnkurve *berechnen* läßt, den sogenannten *dynamischen* Gleichungen. Die *Dynamik* beschäftigt sich also mit den Gesetzen, die (bei Vorgabe geeigneter Anfangsbedingungen) Aussagen über die zeitliche Entwicklung der Bahnkurve machen.

Die dyamischen Gesetze der Newtonschen Mechanik sind *deterministische* Gesetze, d.h. die Vorgabe der Anfangsbedingungen legt die weitere Entwicklung der Bahnkurve *eindeutig* fest. Das gleiche gilt für die Gesetze der relativistischen Mechanik (und sogar in gewissem Umfang für die Allgemeine Relativitätstheorie). In der Quantenmechanik scheinen die Gesetze, die sich auf die Beobachtung bzw. Messung von (Mikro-) Systemen beziehen, nicht-deterministisch. Dort lassen sich teilweise nur Wahrscheinlichkeitsaussagen machen. Solche Gesetze bezeichnet man als *probabilistisch*. Probabilistische Gesetze benutzt man ebenfalls zur Beschreibung sogenannter chaotischer Systeme.

Ein dynamisches Gesetz der Mechanik hatten wir schon kennengelernt: „Die kräftefreie Bewegung eines Punktteilchens verläuft (in einem Inertialsystem) geradlinig und gleichförmig“. Dieses Gesetz bezeichnet man manchmal auch als das *erste Newtonsche Axiom*. Wir hatten schon auf die Problematik hingewiesen, inwieweit die Begriffe

„geradlinig und gleichförmig“ erst durch die kräftefreie Bewegung definiert werden, und daß das nicht-triviale der Aussage darin besteht, daß mehrere kräftefreie Bewegungen „relativ zueinander“ geradlinig und gleichförmig sind.

Die Geschwindigkeit ändert sich bei der kräftefreien Bewegung also nicht, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) \;=\; \vec{a}(t) \;=\; 0 \;,$$

oder

$$\vec{v}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t) \;=\; \vec{v}_0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}(t) \;=\; \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t \;.$$

$\vec{x}_0$ und $\vec{v}_0$ sind dabei sogenannte *Anfangsbedingungen*. Sie hängen von der Wahl des Bezugspunktes bzw. des Inertialsystems ab, sind also nicht der Bewegung selber sondern nur ihrer Beobachtung in einem bestimmten Inertialsystem zuzuschreiben (im Gegensatz beispielsweise zur Beschleunigung).

So selbstverständlich dieses Gesetz erscheint, so weitreichend sind doch seine physikalischen Konsequenzen. So glaube beispielsweise Aristoteles, daß ein Gegenstand, auf den keine äußeren Kräfte einwirken, zur Ruhe kommt. Die offensichtliche Weiterbewegung eines Pfeils, der von einem Bogen abgeschossen wird, interpretierte er als komplizierte Wechselwirkung mit der umgebenden Luft, die dem Pfeil ständig neue Bewegung überträgt. Galilei glaubte ursprünglich, daß die ausgezeichnete kräftefreie Bewegung die Kreisbahn sei: Einmal in Bewegung gebrachte Gegenstände bewegen sich entlang der Erdoberfläche, also entlang einer Kreisbahn. Um die Jahrhundertwende glaubten die Physiker an die Existenz eines Äthers. Durch die Wechselwirkung mit dem Äther würden Teilchen jedoch auf Dauer ihren Impuls verlieren und (relativ zum Äther) zur Ruhe kommen, ähnlich wie Teilchen in einer Flüssigkeit. Die Impulserhaltung bzw. das Gesetz von der konstanten, gleichförmigen kräftefreien Bewegung waren in diesem Fall ernsthafte Einwände gegen die Äthertheorie, die nur schwierig zu entkräften waren.

3.1.2 $F = ma$

Das *zweite Newtonsche Axiom* der Mechanik wird oft in der Form ausgedrückt [7]:
„Die Beschleunigung $\vec{a}$, die ein Körper erfährt, erfolgt in Richtung der angreifenden Kraft $\vec{F}$ und ist proportional zu ihr, in Zeichen $\vec{F} = m\vec{a}$. Der Verbindungsfaktor m ist die Masse des Körpers.“

Diese Aussage ist die Grundlage der Dynamik der Newtonschen Mechanik. Hier wird die (Inertialsystem unabhängige) Eigenschaft einer Bahnkurve — ihre Beschleunigung $\vec{a} = \mathrm{d}^2\vec{x}/\mathrm{d}t^2$ — mit einer Ursache — der Kraft $\vec{F}$ — in Verbindung gebracht, wobei man die Kenntnis der Kraft $\vec{F}$ voraussetzt. Wir wollen zunächst einige grundlegende Bemerkungen zum physikalischen Aussagegehalt dieser Gleichung machen, bevor wir uns ihrer mathematischen Struktur zuwenden.

Die Relation $\vec{F} = m\vec{a}$ enthält vier Zeichen, deren Bedeutung jeweils kurz diskutiert werden soll. Wir gehen dabei von rechts nach links vor:

– Das „unproblematischste“ Symbol ist vermutlich $\vec{a}$, zumindest, wenn man die affine Vektorraumstruktur des Raumes und die Universalität der Zeit akzeptiert. Dann ist

$$\vec{a} \;:=\; \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} \;.$$

In der speziellen Relativitätstheorie wird $\vec{x}$ (und damit auch $\vec{F}$) zu einem Vierer-Vektor. Die vierdimensionale Raum-Zeit ist in der speziellen Relativitätstheorie ebenfalls ein affiner Vektorraum (wobei „Drehung“ durch „Lorentz-Transformation“ zu ersetzen ist). Als systemunabhängige Zeit tritt die Eigenzeit entlang der Bahnkurve auf.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie, wo die Raum-Zeit durch eine (Pseudo-) Riemannsche Mannigfaltigkeit beschrieben wird, muß die Ableitung des Geschwindigkeitsvektors zunächst definiert werden: Während bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten die Geschwindigkeit im Tangentialraum der Mannigfaltigkeit liegt und damit ein Vektor ist, muß man für die Bestimmung der Beschleunigung über den Grenzprozeß eines Differenzenquotienten angeben, wie Geschwindigkeiten in infinitesimal benachbarten Punkten zu addieren sind. Dazu muß zunächst ein sogenannter *kovarianter Zusammenhang* vorgegeben sein.

– Das zweite Zeichen m ist schon etwas problematischer. m bedeutet die Masse des Teilchens, genauer sollte man von der *trägen Masse*, m_{t}, sprechen. Es handelt sich um eine (zeitunabhängige) Eigenschaft des Teilchens, die ihm unabhängig von seinem Bewegungszustand und unabhängig vom beobachtenden System zugesprochen wird. Diese Eigenschaft äußert sich nach dem obigen Gesetz dadurch, daß das betreffende Teilchen einer äußeren Kraft einen bestimmten „Widerstand“ entgegen setzt, d.h. sie ist ein Maß für die Tendenz eines Teilchens, in seinem bisherigen Zustand (der gleichförmig geradlinigen Bewegung) zu verharren. Daher der Ausdruck „träge Masse“, im Gegensatz zur sogenannten „schweren Masse“, die wir später noch behandeln werden.

Faßt man die Gleichung $\vec{F} = m_{\mathrm{t}}\vec{a}$ als ein physikalisches Gesetz auf, so wird implizit vorausgesetzt, daß alle drei Größen unabhängig von dieser Gleichung definiert werden können, ihnen also unabhängig von dieser Gleichung ein physikalischer Sinn gegeben werden kann. Die träge Masse eines Körpers ist aber gerade durch diese Gleichung definiert:

$$m_{\mathrm{t}} \;:=\; \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} \;.$$

Wieder stehen wir vor dem Problem, daß dieselbe physikalische Aussage einmal als Definition der in ihr auftretenden Begriffe dient, andererseits als physikalisches Gesetz interpretiert werden kann. Auch hier ist die Lösung ähnlich, wie schon früher beim Begriff der „geradlinig, gleichförmigen Bewegung“: Für verschiedene Kräfte $\vec{F}$ beobachtet man, daß der Quotient $|\vec{F}|/|\vec{a}|$ unabhängig von allen externen Parametern (Raumpunkt, Art der Kraft, etc.) ist, und nur von einer einzigen intrinsischen Eigenschaft des jeweiligen Gegenstands abhängt (also

nicht beispielsweise von der Form des Gegenstands). Diese Aussage ist ein physikalisches Gesetz. Der gemessene Quotient wird dann als träge Masse definiert und kann in weiteren Untersuchungen bzw. Experimenten als bekannt vorausgesetzt werden.

– Das dritte Zeichen „=“ erscheint zunächst trivial. Allerings haben wir im vorigen Punkt schon gesehen, daß die Newtonsche Gleichung auch als Definition für die träge Masse dienen kann, und wir werden im nächsten Punkt sehen, daß sie ebenso auch als Definition für die Kraft aufgefaßt werden kann. In diesem Fall ist das Gleichheitszeichen „=“ durch ein Definitionszeichen „:=“ zu ersetzen. Die Newtonsche Gleichung ist dann kein physikalisches Gesetz mehr, und man kann die einzelnen Größen in dieser Gleichung nicht beliebig auf die andere Seite bringen.

– Abschließend soll das Symbol $\vec{F}$, die Kraft, diskutiert werden. Auch hier läßt sich die Newtonsche Gleichung als Definitionsgleichung verstehen:

$$\vec{F} \;:=\; m\vec{a}\;.$$

Streng genommen handelt es sich sogar in zweifacher Hinsicht um eine Definitionsgleichung: Einerseits wird die Stärke und Richtung einer unbekannten Kraft oft über diese Relation gemessen, d.h., man beobachtet die Beschleunigung eines Testteilchens bekannter Masse und bestimmt daraus die Kraft. Andererseits gibt es aber auch den Begriff der sogenannten „Trägheitskraft“, die gerade über obige Beziehung definiert ist. Es handelt sich dabei nicht um die externe, an einem Teilchen angreifende Kraft, sondern um diejenige Kraft, die das Teilchen entgegensetzt. Am deutlichsten wird die Bedeutung der Trägheitskraft bei rotierenden Gegenständen, beispielsweise einem rotierenden Pendel: Die Trägheitskraft drückt das Pendel nach außen und damit — der Schwerkraft entgegen — nach oben.

Der Begriff der „Trägheitskraft“ ist nicht unumstritten. Glücklicherweise spielt er in der Anwendung eine untergeordnete Rolle, und ist eher von philosophischem Interesse. Während sich letztendlich alle Kräfte auf eine Wechselwirkung (gravitativ, stark, schwach, elektromagnetisch) — und damit im Rahmen einer quantenfeldtheoretischen Behandlung auf die Existenz von Austauschteilchen — zurückführen lassen, gibt es zur „Trägheitskraft“ kein Austauschteilchen. Diese fehlende Wechselwirkung hat Einstein unter anderem dazu angeregt, die Trägheit auf eine Wechselwirkung „mit dem Fixsternhimmel“ zurückzuführen (vgl. das sogenannte Machsche Prinzip), und er war teilweise enttäuscht, daß die Allgemeine Relativitätstheorie keine zufriedenstellende Antwort auf diese Frage geben konnte.

Abschließend können wir auch hier sagen, daß die Newtonsche Gleichung erst dann zu einem physikalischen Gesetz wird, wenn auch die Kraft $\vec{F}$ zunächst durch

andere Experimente gemessen wurde. Die physikalisch nicht-triviale Aussage lautet hier, daß es für eine bestimmte Klasse von Materie bzw. Testteilchen sinnvoll ist, an einem Ort im Raum eine von diesen Testteilchen unabhängige Kraft anzugeben, für die dann in weiteren Experimenten die Newtonsche Relation erfüllt ist.

3.1.3 Die mathematische Struktur der Newtonschen Bewegungsgleichung

Die mathematische Struktur der Bewegungsgleichung hängt offensichtlich davon ab, von welcher Art die Kraft $\vec{F}(t)$ ist, die zu einem gegebenen Zeitpunkt t auf den Körper am Punkte $\vec{x}(t)$ wirkt:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; \vec{F}(t)\ .$$

Diese Kraft kann beliebig kompliziert sein und beispielsweise von der Vergangenheit der Bewegung des Massepunktes abhängen. Dieser Fall tritt z.B. auf, wenn die Bewegung des Massepunktes seine Umgebung beeinflußt, und die Kraft auf den Massepunkt wiederum von dem Zustand der Umgebung abhängt. Obwohl dieser Fall durchaus auftritt, soll er hier nicht weiter betrachtet werden. (Ohnehin ist es in diesem Fall günstiger, die Bewegung der Umgebung mit in die dynamische Beschreibung aufzunehmen und ein Mehrteilchensystem mit gegenseitiger Wechselwirkung zu betrachten. Dieser Fall wird später untersucht.)

Oft hängt die Kraft jedoch nur von wenigen Größen ab, die das Teilchen charakterisieren, beispielsweise von seiner momentanen Position, seiner Geschwindigkeit und explizit von der Zeit:

$$\vec{F}(t) \;\simeq\; \vec{F}(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),t)\ .$$

(Wir haben uns hier einer gerade in der Physik sehr verbreiteten Unsitte angeschlossen, verschiedene Funktionen, die physikalisch dasselbe beschreiben, auch gleich zu benennen: Auf der linken Seite steht eine Funktion von einem einzelnen Argument, t, auf der rechten Seite steht eine Funktion von 7 Argumenten — $\vec{x},\dot{\vec{x}},t$. Die übliche Ausrede, daß solche Identifikationen keine Schwierigkeiten bereiten sollten, stimmt leider oft nicht.)

In diesem Fall wird die Newtonsche Bewegungsgleichung des Massepunktes

$$m\ddot{\vec{x}}(t) \;=\; \vec{F}(\vec{x}(t),\dot{\vec{x}}(t),t)$$

zu einer *gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung*. „Gewöhnlich“, weil es sich um die Differentialgleichung für die Funktion von einem Argument (t) handelt, und „2. Ordnung“, weil der Differentialquotient von $\vec{x}$ in zweiter Ordnung autritt. Die Lösung einer solchen Differentialgleichung ist im Allgemeinen eindeutig gegeben, wenn man zu einem Zeitpunkt t_0 die Position $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ und die Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}(t_0)=\vec{v}_0$ vorgibt. Ein solches Problem — eine Differentialgleichung plus die Vorgabe von ausreichend vielen

Anfangsdaten zu einem Zeitpunkt t_0 — bezeichnet man auch als *Anfangswertproblem* (bzw. manchmal auch als *Cauchy-Problem*). Inwieweit jedoch immer eine Lösung existiert (zumindest für ein beschränktes Zeitintervall $[t_0, t]$) hängt von der genauen Form von $\vec{F}$ ab und ist oft schwierig zu entscheiden.

Manchmal ist es physikalisch sinnvoll, die Lösung der Differentialgleichung durch andere Daten als Anfangswerte festzulegen, beispielsweise durch die Vorgabe der Positionen zum Zeitpunkt t_0 und zum Zeitpunkt t_1, durch die Vorgabe der Geschwindigkeiten zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, oder auch gemischte Vorgaben (Position und Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten). Die Existenz von Lösungen zu solchen *Randwertproblemen* ist meist noch schwieriger zu entscheiden und schon für einfachste Fälle kann beispielsweise zur Vorgabe zweier Position zu verschiedenen Zeitpunkten überhaupt keine Lösung existieren (z.B. beim harmonischen Oszillator, wenn die Zeitdifferenz gerade der Periode entspricht, die Positionen aber verschieden sind).

Besonders häufig ist der Fall, daß die Kraft nur von der momentanen Position des Massepunktes abhängt:

$$\vec{F}(t) \;\simeq\; \vec{F}(\vec{x}(t)) \;.$$

In diesem Fall spricht man von einem (zeitunabhängigen) *Kraftfeld*.

Ein *Feld* ist ganz allgemein eine Abbildung vom Raum (oder — bei zeitabhängigen Feldern — von der Raum-Zeit) in eine Menge, die die lokalen Freiheitsgrade des Feldes charakterisiert. Diese lokalen Freiheitsgrade können beispielsweise durch eine reelle Zahl gegeben sein (Temperaturfeld oder Dichtefeld — sofern die betrachteten Raumvolumina nicht zu klein werden —, allgemein ein Skalarfeld), oder auch durch einen Vektor, wie das Kraftfeld, das elektrische und magnetische Feld etc.

Eine besonders wichtige Klasse von (möglicherweise zeitabhängigen) Kraftfeldern bilden die sogenannten *konservativen* Kraftfelder. Bei ihnen verschwindet das Wegintegral entlang eines geschlossenen Weges:

$$\oint \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \;=\; \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{F}(\vec{x}(\tau)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\, \mathrm{d}\tau \;=\; 0 \;.$$

Hierbei beschreibt $\vec{x}(\tau)$ einen geschlossenen Weg (d.h. eine Abbildung $[\tau_0, \tau_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x}(\tau_0) = \vec{x}(\tau_1)$). Ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ läßt sich immer als Gradient eines skalaren Feldes $U(\vec{x})$, dem sogenannten *Potential*, scheiben:

$$\vec{F}(\vec{x}) \;=\; -\,\vec{\nabla} U(\vec{x}) \;.$$

(Das Minus-Zeichen ist Konvention.) Der Gradient eines skalaren Feldes ist dabei gegeben durch:

$$\vec{\nabla} U(\vec{x}) \;\simeq\; \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right)$$

bzw.

$$[\vec{\nabla} U(\vec{x})]_i \;=\; \partial_i U(\vec{x}) \;.$$

Für eine skalare Funktion $U(\vec{x})$ können wir den Gradient koordinatenunabhängig durch die Taylorentwicklung,

$$U(\vec{x}+t\vec{h}) \;=\; U(\vec{x}) + t\langle DU(\vec{x}), \vec{h}\rangle + \mathcal{O}(t^2)\ ,$$

definieren, wobei $\langle\cdot,\vec{h}\rangle$ eine lineare Abbildung auf den Vektoren $\vec{h}$ bedeutet. Diese Definition kennzeichnet $DU(\vec{x})$ als Element des Dualraumes. Oft bezeichnet man $DU(\vec{x})$ als den Gradienten von U an der Stelle $\vec{x}$, d.h. es handelt sich um ein Vektorfeld im dualen Tangentialraum. Ist ein Skalarprodukt definiert, so bezeichnet man auch oft das Vektorfeld $DU(\vec{x})^*$ als das Gradientenfeld zu U. In Koordinaten wird aus obiger Gleichung:

$$U(x_1+th_1, x_2+th_2, x_3+th_3) \;=\; U(x_1,x_2,x_3) + t\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}h_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3}h_3\right) \;+\; \mathcal{O}(t^2)\ ,$$

was den Gradienten in Koordinatenschreibweise als

$$\vec{\nabla}U(\vec{x}) \;=\; \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}\right)$$

identifiziert.

Beweis:

Falls $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ verschwindet das Integral über jeden geschlossenen Weg, bzw. äquivalent, hängt das Integral entlang jeden Weges nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, ist ansonsten also wegunabhängig:

$$\begin{aligned}\int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{\nabla}U(\vec{x}(\tau))\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{x}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\mathrm{d}U(\vec{x}(\tau))}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= U(\vec{x}(\tau_1)) - U(\vec{x}(\tau_0))\ .\end{aligned}$$

Umgekehrt können wir zu einem konservativen Kraftfeld $\vec{F}$ immer eine Funktion U durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}U(\vec{x}) &= \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}(\vec{x}')\cdot\mathrm{d}\vec{x}' \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1}\vec{F}(\vec{x}(\tau))\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{x}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

definieren, wobei nun $\vec{x}(\tau)$ einen Weg von $\vec{x}_0 = \vec{x}(\tau_0)$ zum Punkt $\vec{x} = \vec{x}(\tau_1)$ beschreibt. Da das Integral wegunabhängig ist, hängt es nur vom Anfangspunkt (d.h. einer Konstanten) und $\vec{x}$ ab, ist also eine wohldefinierte Funktion von $\vec{x}$. Die Funktion $U(\vec{x})$ ist durch die Eigenschaft $\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(\vec{x})$ ohnehin nur bis auf eine Konstante definiert.

Wir erhalten somit für konservative (zeitunabhängige) Kraftfelder die folgende Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) \;=\; -\,\vec{\nabla}U(\vec{x}(t))\ . \tag{3.1}$$

Wir werden später sehr oft Gleichungen dieses Typs untersuchen, obwohl nicht alle Kräfte in der klassischen Mechanik konservative Kräfte sind. Auch für nichtkonservative Kräfte werden wir Beispiele angeben.

Es ist hilfreich, ein rasches Entscheidungsverfahren zu haben, ob es sich bei einer vorgegebenen Kraft um eine konservative Kraft handelt. Da die Wegunabhängigkeit meist schwieriger zu überprüfen ist, und bei komplizierteren Kräften die Existenz einer „Stammfunktion“ $U(\vec{x})$ auch nicht immer offensichtlich ist, wollen wir ein weiteres Kriterium für eine konservative Kraft beschreiben:

Satz: Für eine konservative Kraft gilt: $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = 0$.

Hierbei ist die Rotation eines Vektorfeldes definiert als:

$$[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})]_i \;=\; \epsilon_{ijk} \partial_j F_k(\vec{x})$$

bzw. ausführlich:

$$\begin{aligned}
[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})]_1 &= \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\
[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})]_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\
[\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x})]_3 &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \; .
\end{aligned}$$

Der Beweis obiger Behauptung ist sehr einfach, und soll als Beispiel für die Vorteile der Indexschreibweise dienen. Da sich eine konservative Kraft immer als Gradient eines skalaren Potentialfeldes schreiben läßt, müssen wir nur zeigen, daß die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet:

$$[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U(\vec{x})]_i \;=\; \epsilon_{ijk} \partial_j [\vec{\nabla} U(\vec{x})]_k \;=\; \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U(\vec{x}) \; . \tag{3.2}$$

Wenn $U(\vec{x})$ ein Potential ist, das zweimal stetig differenzierbar ist, läßt sich die Reihenfolge der Ableitungen vertauschen:

$$\partial_j \partial_k U(\vec{x}) \;=\; \partial_k \partial_j U(\vec{x}) \; .$$

Das nun folgende Argument tritt oft bei Beweisen dieser Art auf soll daher allgemeiner analysiert werden:

Auf der rechten Seite von (3.2) ist nach der Summenkonvention über die Indizes j und k zu summieren (die Gleichung gilt für jeden Index i). ϵ_{ijk} ist aber bei Vertauschen der Indizes j und k (unabhängig von i) antisymmetrisch: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$, während der Ausdruck $\partial_j \partial_k$ symmetrisch ist. Allgemein hat man also einen Ausdruck der folgenden Form: $A_{jk} S_{jk}$, wobei $A_{jk} = -A_{kj}$ und $S_{jk} = S_{kj}$ ist. Für einen solchen Ausdruck gilt immer:

$$A_{jk} S_{jk} \;=\; 0 \quad \text{falls } A_{jk} = -A_{kj} \text{ und } S_{jk} = S_{kj} \; .$$

Der Grund ist, daß zu jedem Term, bei dem j und k mit einem bestimmten Wert belegt sich, in der Summe auch der Term auftritt, bei dem j und k mit dem umgekehrten Wert belegt sich. Wegen der Antisymmetrie heben sich die beiden Terme jedoch weg.

Wir haben also die Aussage bewiesen: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Die Umkehrung gilt nicht immer und soll hier nur als Satz angegeben werden. Den Beweis werden wir später führen.

Satz: Verschwindet die Rotation eines Vektorfeldes innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietes, so läß t sich das Vektorfeld in diesem Gebiet als Gradientenfeld schreiben.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang, daß das Definitionsgebiet *einfach zusammenhängend* ist, d.h. das jeder geschlossene Weg stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann. Äquivalent kann man auch sagen, daß in einem einfach zusammenhängenden Gebiet jeder geschlossene Weg Rand einer Fläche ist. Eine bekannte Ausnahme bilden beispielsweise Probleme in der Magnetostatik, bei dem entlang geschlossener Schleifen Ströme fließen. Das Gebiet, in dem die Bewegung von Ladungsträgern erfolgen kann, ist nun der $\mathbb{R}^3/\mathcal{S}$, d.h. der dreidimensionale Raum ohne eine geschlossene Schleife $\mathcal{S}$. Jeder geschlossene Weg um diese Schleife läßt sich nicht stetig zu einem Punkt zusammenziehen, bzw. ist kein Rand einer Fläche.

In einem einfach zusammenhängenden Gebiet sind die beiden Aussagen „$\vec{F}$ ist konservativ“ und $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ also äquivalent.

Für das folgende Vektorfeld verschwindet die Rotation, das Wegintegral um geschlossene Wege ist jedoch nicht immer Null:

$$\vec{F} \;=\; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(x_2, -x_1, 0) \;.$$

Als Wegintegral wählen wir einen Kreis um die z-Achse:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= (R\sin 2\pi t, R\cos 2\pi t, 0) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) \;=\; 2\pi R(\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t, 0) \\ \int_0^1 \mathrm{d}t \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} &= \frac{2\pi R R}{R^2} \int_0^1 \mathrm{d}t (\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t, 0) \cdot (\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t, 0) \\ &= 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}t \;=\; 2\pi \;. \end{aligned}$$

Das Integral verschwindet somit nicht, hängt aber nicht vom Radius des Kreises ab. Ganz allgemein läßt sich zeigen, daß das Integral nur von der *Windungszahl* des Weges um die z-Achse abhängt.

3.1.4 Die Bewegungsgleichungen für Mehrteilchensysteme

Wir hatten schon erwähnt, daß die Bewegung eines Masseteilchens von der Umgebung abhängen kann, und daß andererseits das Teilchen umgekehrt einen Einfluß auf seine Umgebung ausüben kann. Alle Wechselwirkungen der Natur haben eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Würde die Sonne „plötzlich verschwinden“, so bliebe die Erde noch ungefähr für 8 Minuten auf ihrer Ellipsenbahn, bevor ihr Schwerpunkt in

den Zustand der gleichförmigen gradlinigen Bewegung überginge. Die Bewegung eines (beispielsweise massiven und geladenen) Teilchens wirkt sich also erst mit einer gewissen Verzögerung (einer sogenannten *Retardierung*) auf seine Umgebung aus, und umgekehrt macht sich eine Veränderung der Umgebung erst mit einer Verzögerung für das Teilchen bemerkbar. Die bekannten Wechselwirkungskräfte (elektromagnetisch, gravitativ) breiten sich (im Vakuum) mit Lichtgeschwindigkeit aus, d.h. der Einfluß der Verzögerung macht sich bei Systemen innerhalb des Laboratoriums kaum bemerkbar. Wir werden daher im folgenden die Wechselwirkungen als *instantan* ansehen. Solche sogenannten *Fernwirkungsprinzipien* waren schon Newton außerordentlich suspekt, so daß er seine Theorie der Gravitation auch nur als etas vorläufiges, phänomenologisches ansah.

Unter der Annahme einer Fernwirkung nehmen die Bewegungsgleichungen der Newtonschen Mechanik für ein System aus N Teilchen meist die folgende Form an:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{x}}_1(t) &= \vec{F}_1(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_N,t) \\ m_2\ddot{\vec{x}}_2(t) &= \vec{F}_2(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_N,t) \\ \vdots &\quad \vdots \\ m_N\ddot{\vec{x}}_N(t) &= \vec{F}_N(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_N,t)\ , \end{aligned}$$

bzw. in Kurzschreibweise:

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N,\dot{\vec{x}}_1,\ldots,\dot{\vec{x}}_N,t)\ .$$

(Man beachte hier, daß sich der Index i nicht auf die Koordinaten eines Vektors bezieht, sondern das i-te von N Teilchen bezeichnet. Dementsprechend ist auf der linken Seite auch nicht über i zu summieren.)

Unter Berücksichtigung der Dreidimensionalität des Raumes ist dies ein System von $3N$ gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Eine Lösung $(\vec{x}_1(t),\ldots,\vec{x}_N(t))$ wird durch die Vorgabe von N Anfangspositionen und N Anfangsgeschwindigkeiten zu einem Zeitpunkt t_0 festgelegt. Der Phasenraum ist somit $6N$-dimensional.

Eine erste Vereinfachung ergibt sich, wenn wir die Kraft wiederum nur von der Position der Teilchen abhängen lassen:

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i(t) = \vec{F}_i(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_N)\ .$$

Eine weitere Vereinfachung geht davon aus, daß die Kräfte durch paarweise Wechselwirkungen zwischen den Teilchen herrühren, die nur von der relativen Lage der jeweiligen Massepunkte abhängen:

$$m_i\ddot{\vec{x}}_i(t) = \sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij}(\vec{x}_i-\vec{x}_j)\ . \tag{3.3}$$

(Die Summe läuft dabei über alle $j = 1, \ldots, N$ außer $j = i$, was sogenannte *Selbstwechselwirkungen* ausschließt.) Das *3. Newtonsche Axiom* der klassischen Mechanik, „actio=reactio“, besagt für diesen Fall

$$\vec{F}_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)) \;=\; -\vec{F}_{ji}(\vec{x}_j - \vec{x}_i) \; . \tag{3.4}$$

Die letzte Vereinfachung schließlich nimmt an, daß sich die Wechselwirkungskräfte als Potentialkräfte schreiben lassen,

$$\vec{F}_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)) \;=\; -\vec{\nabla}_i U_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \; ,$$

also

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) \;=\; -\sum_{j \neq i} \vec{\nabla}_i U_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \; , \tag{3.5}$$

mit

$$U_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)) \;=\; U_{ji}(\vec{x}_j - \vec{x}_i) \; .$$

Das Gleichungssystem (3.3) bzw. (3.5) ist nur für sehr spezielle Fälle lösbar. Allerdings läß t sich aufgrund des 3. Newtonschen Axioms sofort eine einfache Aussage herleiten:

Bildet man die Summe der N Gleichungen in (3.3), so erhält man

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{x}}_i(t) \;=\; \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \;=\; 0 \; ,$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \sum_i m_i \vec{x}_i(t) \;=\; 0 \; .$$

Bezeichnen wir mit

$$\vec{R}(t) \;=\; \frac{m_1 \vec{x}_1(t) \,+\, \ldots \,+\, m_N \vec{x}_N(t)}{m_1 \,+\, \ldots \,+\, m_N} \;=\; \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{x}_i$$

den Schwerpunkt des N-Teilchensystems, so erhalten wir aus dem 3. Newtonschen Axiom

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \vec{R}(t) \;=\; 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{R}(t) \;=\; \vec{R}_0 \,+\, \vec{V}_0 t \; .$$

Der Schwerpunkt eines Systems von N untereinander wechselwirkenden Teilchen bewegt sich also gleichförmig und geradlinig.

3.1.5 Zwei-Körper-Probleme

Während das allgemeine N-Körper-Problem außer für sehr einfache Fälle (freier Fall, gekoppelte harmonische Oszillatoren) nicht mehr lösbar ist, lassen sich die Zwei-Körper-Probleme auf das normale Problem eines einzelnen Massepunktes reduzieren. Addieren wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{x}}_1(t) &= \vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \\ m_2\ddot{\vec{x}}_2(t) &= -\vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \ , \end{aligned}$$

so erhalten wir wieder die geradlinige Bewegung des Schwerpunktes:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{m_1 + m_2} \ = \ 0 \ .$$

Dividieren wie die beiden obigen Gleichungen durch die Massen und bilden die Differenz, so folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \ = \ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \ = \ \frac{1}{\mu}\vec{F}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \ ,$$

mit der sogenannten reduzierten Masse μ:

$$\frac{1}{\mu} \ = \ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \quad \text{bzw.} \quad \mu \ = \ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ .$$

Bezeichnen wir mit $\vec{r}(t) = \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)$ den Differenzvektor zwischen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ (er ist unabhängig vom Bezugspunkt!), so erhalten wir also als Differentialgleichung für diesen Vektor:

$$\mu\ddot{\vec{r}}(t) \ = \ \vec{F}(\vec{r}(t)) \ .$$

Dies ist die gewöhnliche Bewegungsgleichung für einen einzelnen Massepunkt der Masse μ, auf den die Kraft $\vec{F}$ wirkt. Wir haben also das Zwei-Körper-Problem auf ein Ein-Körper-Problem reduziert. Dies wäre nicht möglich gewesen, hätten neben der gegenseitigen Wechselwirkung noch weitere äußere Kräfte auf die Teilchen eingewirkt.

3.1.6 Erhaltungssätze

Wir betrachten im folgenden die Bewegungsgleichung eines Massepunktes in einem konservativen Kraftfeld, d.h. in einem Potential U:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) \ = \ -\vec{\nabla}U(\vec{x}(t)) \ . \tag{3.6}$$

Eine Lösungskurve ist durch Vorgabe von $\vec{x}_0$ und $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$ festgelegt. Man erhält so eine sechsparametrige Schar von Lösungskurven in einem 6-dimensionalen Phasenraum.

(Die Lösungskurven im Phasenraum haben die Eigenschaft, daß keine Überschneidungen stattfinden, d.h. durch jeden Punkt verläuft genau eine Lösungskurve. Im Konfigurationsraum können durch einen Punkt unendlich viele Bahnkurven verlaufen, je nach Wahl der Geschwindigkeit.)

Zunächst wird man versuchen, den Raum, in dem sich die Lösungskurven bewegen, einzuschränken. Dies ist durch sogenannte Erhaltungsgrößen möglich. Erhaltungsgrößen sind Observable (d.h. Funktionen über dem Phasenraum), die sich zeitlich nicht ändern, d.h. für die gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}(t), \vec{p}(t)) \;=\; 0 \;,$$

wenn man für $(\vec{x}(t), \vec{p}(t))$ eine Lösungskurve einsetzt. Eine solche Erhaltungsgröße ist also entlang der Lösungskurve konstant. Umgekehrt schänkt eine Erhaltungsgößdie Bewegung im Phasenraum ein, da ausgehend von den Anfangsbedingungen für den weiteren Verlauf der Lösungskurve nur die Hyperfläche im Phasenraum in Frage kommt, auf der die Erhaltungsgöße denselben Wert wie bei den Anfangsbedingungen hat.

Ziel ist es daher, möglichst viele Erhaltungsgößen zu einer Differentialgleichung zu finden und dadurch die Bewegung im Phasenraum auf einen Teilraum mit möglichst kleiner Dimension einzuschränken. Welche und wieviele Erhaltungsgrößen zu einer Differentialgleichung existieren, läßt sich oft nicht leicht erkennen. Daher ist es notwendig, allgemeine Methoden zum Auffinden von Erhaltungsgrösßen zu entwickeln.

Ein Beispiel für eine Erhaltungsgröße haben wir bereits bei Mehrteilchensystemen ohne äußere Kräfte gefunden: Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts bleibt konstant, ist also eine Erhaltungsgröße. Weitere bekannte Erhaltungsgrößen bei bestimmten Systemen sind die Energie und der Drehimpuls, die wir nun untersuchen wollen.

Die Energie

Wir betrachten die Differentialgleichung (3.6) und bilden auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $\dot{\vec{x}}(t)$.

$$m\ddot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} \;=\; -\left(\vec{\nabla} U(\vec{x})\right) \cdot \dot{\vec{x}} \;.$$

Man erkennt nun, daß sich beide Seiten der Gleichung also totale Ableitung nach der Zeit schreiben lassen:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} &= \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}) \\ -(\vec{\nabla} U(\vec{x})) \cdot \dot{\vec{x}} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(\vec{x}(t)) \;. \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}(t)|^2 \,+\, U(\vec{x}(t)) \right) \;=\; 0 \;.$$

Diese Gleichung gilt für jede Bahnkurve $\vec{x}(t)$, welche die Bewegungsgleichung erfüllt. Wir haben damit eine Erhaltungsgröße gefunden, die Energie:

$$E \;=\; \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}(t)|^2 \,+\, U(\vec{x}(t)) \;.$$

Eine wesentliche Vorraussetzung war, daß das Potential U ein zeitunabhängiges Feld ist, also nur eine Funktion der Position des Massenpunktes ist, nicht aber noch explizit von der Zeit abhängt. (Das bedeutet natürlich nicht, daß sich die potentielle Energie eines Teilchens im Verlauf seiner Bewegung nicht ändert, wie durch $U(\vec{x}(t))$ beschrieben.)

Eine Lösungskurve von (3.6) kann also nur auf einer 5-dimensionalen Hyperfläche im Phasenraum verlaufen, auf der die Energie konstant ist. Man spricht auch von der *Energie(hyper)fläche*.

Der Drehimpuls

Weitere Erhaltungsgrößen zu der Bewegungsgleichung (3.6) gibt es im allgemeinen nicht, es sei denn, man macht einschränkende Annahmen über die Form des Potentials $U(\vec{x})$.

Bei einer sehr häufig auftretenden Situation hängt das Potential U nur vom Abstand des Massepunktes von einem ausgezeichneten Bezugspunkt ab, dem sogenannten *(Rotations-) Zentrum* der Bewegung. Es gilt also $U(\vec{x}) = U(|\vec{x}|)$ (auch hier haben wir uns wieder der Unsitte angeschlossen, zwei verschiedene Funktionen mit demselben Symbol zu bezeichnen). Der Gradient eines solchen radialsymmetrischen Potentials ist:

$$\vec{\nabla}U(|\vec{x}|) \;=\; U'(x)\,\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \;.$$

Beweis:

Nach der Kettenregel ist

$$\partial_i U(|\vec{x}|) \;=\; U'(x)\partial_i|\vec{x}| \;,$$

und

$$\partial_i(x_jx_j)^{1/2} \;=\; \frac{1}{2(x_jx_j)^{1/2}}\partial_i(x_jx_j) \;=\; \frac{1}{2(x_jx_j)^{1/2}}2x_j\delta_{ij} \;=\; \frac{1}{(x_jx_j)^{1/2}}x_i \;.$$

Also gilt für die i-te Komponente des Gradienten von $|\vec{x}|$:

$$\partial_i|\vec{x}| \;=\; \frac{x_i}{|\vec{x}|} \;.$$

Die Bewegungsgleichung in einem radialsymmetrischen Potential ist also

$$m\ddot{\vec{x}}(t) \;=\; -\,U'(|\vec{x}|)\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \;.$$

Wir bilden nun auf beiden Seiten das Kreuzprodukt mit $\vec{x}$. Da aber das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selber verschwindet, folgt:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) \times \vec{x} \;=\; 0 \;.$$

Aus demselben Grund ($\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} = 0$) läßt sich die linke Seite dieser Gleichung als totale Zeitableiung schreiben,

$$m\ddot{\vec{x}}(t) \times \vec{x} \;=\; m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\vec{x}} \times \vec{x}) \;,$$

und wir erhalten die zeitliche Konstanz des Drehimpulses:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) \;=\; 0 \;.$$

Wesentliche Voraussetzung für die Drehimpulserhaltung war die Rotationsinvarianz des Potentials um ein Rotationszentrum, bezüglich dessen auch der Drehimpuls zu messen ist. Dabei hätte das Potential durchaus auch explizit von der Zeit abhängen können, denn der Gradient eines rotationssymmetrischen Potentials ist immer proportional zum Ortsvektor, d.h. das Kreuzprodukt mit dem Ortsvektor verschwindet.

Wir erhalten also: Der Drehimpuls eines Teilchens in einem rotationssymmetrischen Potential (selbst wenn sich dieses explizit mit der Zeit verändert) ist erhalten.

3.1.7 Das zweite Keplersche Gesetz

Die drei Keplerschen Gesetze entstanden ursprünglichim Zusammenhang mit der Beschreibung der Planetenbahnen. Während das erste Keplersche Gesetz („die Bahnkurven verlaufen auf Ellipsen bzw. Kreisen“) und das dritte Keplersche Gesetz („T^2/R^3 =const.“) ein sehr spezielles Potential voraussetzen (das erste Keplersche Gesetz gilt noch für den rotationssymmetrischen harmonischen Oszillator), gilt das zweite Keplerscher Gesetz bei allen Potentialen mit Drehimpulserhaltung (d.h. bei allen rotationssymmetrischen Potentialen).

Die Erhaltung des Drehimpulses $\vec{L}$ bei rotationssymmetrischen Potentialen führt sofort auf mehrere einschränkende Bedingungen an die möglichen Bahnkurven. Der Drehimpuls als Vektor definiert eine zu ihm senkrechte Ebene. Da aus der Drehimpulserhaltung insbesondere die Konstanz der Richtung von $\vec{L}$ folgt, und damit auch die Konstanz der Ebene senkrecht dazu, kann die Bahnkurve nur innerhalb dieser Ebene verlaufen. Die Erhaltung des Drehimpulses bei rotationssymmetrischen Potentialen führt also zu einer erheblichen Vereinfachung der Beschreibung: *Die Ebene, in der die Bewegung zu einem rotationssymmetrischen Potential verläuft, bleibt konstant.*

Wir können nun die möglichen Bahnkurven weiter einschränken, indem wir ausnutzen, daß auch der Betrag von $\vec{L}$ zeitlich konstant bleibt. Dies führt direkt auf das zweite Keplersche Gesetz: „In gleichen Zeiten werden von dem Bahnvektor gleiche Flächen überstrichen.“

Beweis: Innerhalb des Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ bewegt sich der Massepunkt von Punkt $\vec{x}(t)$ zum Punkt $\vec{x}(t+\mathrm{d}t)$, legt also die Strecke $\mathrm{d}\vec{x} = \vec{x}(t+\mathrm{d}t) - \vec{x}(t)$ zurück. Die Fläche, die der Bahnvektor innerhalb dieses Zeitintervalls überstreicht, ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \frac{1}{2}|\vec{x}(t) \times \mathrm{d}\vec{x}(t)| \\ &= \frac{1}{2}\left|\vec{x}(t) \times \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2m}|\vec{L}|\mathrm{d}t \ . \end{aligned}$$

Die Gesamtfläche, die im Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ überstrichen wird, ist daher:

$$F(\Delta t) \ = \ \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}F \ = \ \frac{1}{2m}|\vec{L}|\Delta t \ .$$

Hier geht die Erhaltung des Drehimpulses ein: $|\vec{L}|$ hängt nicht von der Zeit ab und kann daher vor das Integral gezogen werden.

Das dritte Keplersche Gesetz ist also eine direkte Folge der Drehimpulserhaltung und gilt bei jedem rotationssymmetrischen Potential (sogar wenn eine explizite Zeitabhängigkeit vorliegt)!

3.2 Die eindimensionale Bewegungsgleichung

Oft verläuft eine Bewegung aufgrund von äußeren Einschränkungen effektiv nur eindimensional, d.h. die möglichen Positionen eines Massenpunktes sind auf eine eindimensionale Kurve eingeschränkt. Dazu zählen beispielsweise das einfache Pendel oder die Bewegung von Kugeln auf einem Draht. In vielen anderen Fällen ist es möglich, durch Ausnutzung der Erhaltungsgrößen das Problem effektiv auf ein eindimensionales Problem zu reduzieren. Dies gilt zum Beispiel bei alles rotationssymmetrischen Potentialen, wie wir noch sehen werden.

Wir betrachten die eindimensionale Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x}(t) \ = \ F(x(t)) \ = \ -\frac{\mathrm{d}U(x(t))}{\mathrm{d}x} \ . \tag{3.7}$$

(In einer Dimension ist es immer möglich, die Kraft als Ableitung eines Potentials darzustellen.)

Wir wollen nun zeigen, daß sich eine Gleichung von diesem Typ immer integrieren läßt. Die allgemeine Lösung besteht aus Kurven im zweidimensionalen Phasenraum $\{(x, \dot{x})\}$. Wir wissen, nach unseren allgemeinen Überlegungen, daß es für die Lösungen einer Gleichung der obigen Form (3.7) immer eine Erhaltungsgröße gibt, die Energie:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \ = \ 0 \quad \text{mit} \quad E \ = \ \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \ .$$

Damit ist die Bewegung im zweidimensionalen Phasenraum effektiv auf einen eindimensionalen Unterraum eingeschränkt, der durch die Gleichung

$$E(x, \dot{x}) \;=\; E \;=\; \text{const.} \tag{3.8}$$

beschrieben wird.

Zunächst soll gezeigt werden, daß die Differentialgleichung für die Energieerhaltung äquivalent zu der Bewegungsgleichung ist. Dies gilt nur für eindimensionale Bewegungen:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \;=\; m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\dot{x} \;=\; \left(m\ddot{x} - \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)\dot{x} \;=\; 0\ .$$

Sofern $\dot{x} \not\equiv 0$ muß der Term in Klammern verschwinden, d.h. gilt die Bewegungsgleichung. In mehr als einer Dimension folgt aus der Energieerhaltung nur $(m\ddot{\vec{x}} + \vec{\nabla}U)\cdot\dot{\vec{x}} = 0$, d.h. der Ausdruck $(m\ddot{\vec{x}} + \vec{\nabla}U)$ ist senkrecht zur Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$. Diese Aussage ist nur in einer Dimension äquivalent zum Verschwinden dieses Terms, d.h. zur Bewegungsgleichung.

Die Gleichung für die Energieerhaltung $\dot{E} = 0$ läßt sich aber leicht integrieren: $E(x, \dot{x}) = E$. Man sagt in diesem Fall auch, daß man ein erstes Integral der Bewegungsgleichung gefunden hat. Wir können nun fortfahren, und diese Gleichung selber integrieren, wobei (3.8) eine Differentialgleichung 1. Ordnung ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + U(x(t)) \;&=\; E \\ \text{bzw.} \qquad \dot{x}(t) \;&=\; \frac{2}{m}\sqrt{E - U(x(t))}\ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Der Wert der Energie E spielt hierbei die Rolle einer Integrationskonstanten, die durch die „Integration“ der Differentialgleichung 2. Ordnung zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung hereinkommt. Statt beispielsweise die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t_0 als Anfangsbedingung an die Lösungskurve vorzugeben, kann man natürlich auch die Energie als mögliche Anfangsbedingung wählen.

Die Differentialgleichung 1. Ordnung (3.9) ist vom Typ:

$$\dot{x}(t) \;=\; f(x(t))\ .$$

Eine solche Differentialgleichung läßt sich immer durch die sogenannte „Quadratur“, oder auch Trennung der Variablen, integrieren:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;=\; f(x) \tag{3.10}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \;=\; \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{f(x')} \;=\; \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \;=\; t - t_0\ . \tag{3.11}$$

Sei $G(x)$ die Stammfunktion zu $1/f(x)$, d.h. $\mathrm{d}G(x)/\mathrm{d}x = 1/f(x)$, dann erhalten wir somit als Lösung:

$$G(x(t)) - G(x(t_0)) = t - t_0 \quad \text{bzw.} \quad G(x(t)) = t + G(x(t_0)) - t_0 \ .$$

Ist die Umkehrfunktion G^{-1} bekannt, d.h. die Lösung von $G^{-1}(G(x)) = x$, dann folgt:

$$x(t) = G^{-1}(t + \text{const.}) \ .$$

Zur Angabe der Lösung haben wir zwei Voraussetzungen gemacht: Erstens, daß die Stammfunktion $G(x)$ zu $1/f(x)$ bekannt ist und zweitens, daß sich die Stammfunktion zu $G^{-1}(x)$ invertieren läßt. Beide Voraussetzungen hängen von der expliziten Problemstellung ab, und in der Praxis sind diese Funktionen oft nicht durch elementare Funktionen ausdrückbar. Vom theoretischen Standpunkt gilt jedoch ein Problem als „gelöst“, wenn es auf die Berechnung eines Integrals (Gl. (3.11)) bzw. die Bestimmung einer Umkehrfunktion zurückgeführt wurde.

Wir erhalten also für die eindimensionale Newtonsche Gleichung:

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{m}{2\sqrt{E - U(x)}} \mathrm{d}x = t - t_0 \ .$$

3.2.1 Die Methode der Variablentrennung

Das oben angegebene Verfahren zur Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung ist so allgemein und wird in der Physik so häufig benutzt, daß einige allgemeine Bemerkungen angebracht scheinen. Die Differentialgleichung (3.10) ist ein Spezialfall der folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t) f(x(t)) \ , \tag{3.12}$$

wobei im obigen Fall $g(t) = \text{const.}$ gilt. Ein anderer Spezialfall, $f(x) = \text{const.}$, ist ebenfalls wohlbekannt und führt zur Lösung $x(t) = \int g(t')\mathrm{d}t'$. Die allgemeine Gleichung läßt sich nach demselben Verfahren der Variablentrennung umformen:

$$\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = g(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.13}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{f(x')}\mathrm{d}x' = \int_{t_0}^{t} g(t')\mathrm{d}t' \ . \tag{3.14}$$

Vom theoretischen Standpunkt ist die obige Differentialgleichung damit gelöst. Von praktischer Seite müssen die beiden Integrale noch bestimmt und (eventuell) die Lösung nach $x(t)$ aufgelöst werden.

Der „Trick“ durch Multiplikation mit dem Differential $\mathrm{d}t$ von Gl. (3.12) zu (3.13) zu gelangen und so die Variablenseparation zu erreichen führt zwar auf das richtige Ergebnis, aber streng genommen darf man mit Differentialen natürlich nicht wie mit gewöhnlichen Zahlen umgehen. Der Ausdruck $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ bildet eine zunächst nicht trennbare Einheit und steht für die erste Ableitung der Funktion $x(t)$. Daher soll an dieser Stelle kurz der „korrekte“ Weg von (3.12) zu (3.14) skizziert werden:

Wir dividieren beide Seiten von (3.12) zunächst durch $f(x(t))$ und integrieren beide Seiten nach t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{f(x(t'))} \frac{\mathrm{d}x(t')}{\mathrm{d}t'} \,\mathrm{d}t \;=\; \int_{t_0}^{t} g(t') \,\mathrm{d}t' \;.$$

Nun führen wir auf der linken Seite dieser Gleichung $x' = x(t')$ als neue Integrationsvariable ein, wobei wir durch den Übergang $t' \to x(t')$ für das Differential im Integral gerade

$$\mathrm{d}x' \;=\; \frac{\mathrm{d}x(t')}{\mathrm{d}t'} \mathrm{d}t'$$

erhalten, und die neuen Grenzen durch $x_0 = x(t_0)$ und $x(t)$ gegeben sind:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{1}{f(x')} \mathrm{d}x' \;=\; \int_{t_0}^{t} g(t') \,\mathrm{d}t' \;.$$

Damit ist das obige Ergebnis (3.14) wieder abgeleitet, diesmal ohne „unerlaubte“ Manipulationen der Differentiale.

3.3 Die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen

Unter der Annahme einer instantanen Fernwechselwirkung für die Kräfte hatten wir gesehen, daß die Newtonschen Bewegungsgleichungen in den meisten Fällen die Form

$$m\ddot{\vec{x}} \;=\; \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

annehmen. Wie schon erwähnt, handelt es sich hierbei um eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung (genauer, um drei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung). Jede solche Differentialgleichung höherer Ordnung läßt sich zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung umformen. Für obige Gleichung können wir auch schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{v} \\ m\dot{\vec{v}} &= \vec{F}(\vec{x}, \vec{v}, t) \;, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{x}} &= \vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= \vec{F}(\vec{x}, \vec{p}/m, t) \;. \end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei also um einen Satz von sechs gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung. Handelt es sich speziell um eine konservative Kraft, die sich aus einem Potential ergibt, so folgt:

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{x}} &= \vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= -\vec{\nabla}U(\vec{x}) \ . \end{aligned}$$

Dieser Satz von Differentialgleichungen läßt sich formal auch aus der Energie

$$H(\vec{x},\vec{p}) \ = \ \frac{1}{2m}|\vec{p}|^2 \ + \ U(\vec{x})$$

erhalten:

$$\dot{\vec{x}} \ = \ \frac{\partial H(\vec{x},\vec{p})}{\partial \vec{p}} \tag{3.15}$$

$$\dot{\vec{p}} \ = \ -\frac{\partial H(\vec{x},\vec{p})}{\partial \vec{x}} \ . \tag{3.16}$$

(Hierbei bezeichnet $\partial/\partial\vec{p}$ den „Gradienten“ nach $\vec{p}$, d.h. $\partial H/\partial\vec{p}$ ist der Vektor mit Komponenten $\partial H/\partial p_i$. Entsprechendes gilt für $\partial/\partial\vec{x}$.) In dieser Form bezeichnet man die Bewegungsgleichungen auch als *Hamiltonsche Bewegungsgleichungen*. Die Bedeutung des Phasenraumes $(\vec{x},\vec{p})$ als Menge der möglichen Anfangsbedingungen sowie auch als Menge der möglichen (reinen) Zustände eines Massepunktes wird hier offensichtlich.

Ganz allgemeine läßt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung (n. Ordnung) der Form

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \ = \ f(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \ldots, \dot{x}, x)$$

zu einem Satz gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung umformen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= x_2 \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= x_3 \\ \vdots \quad &\quad \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}t} &= x_n \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1) \ . \end{aligned}$$

Vom mathematischen Standpunkt sind gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung nur Spezialfälle von gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Kapitel 4

Das Kepler-Problem

Das Kepler-Problem, d.h. die Bewegung eines Planeten im Gravitationsfeld der Sonne, ist sicherlich eines der „Paradebeispiele“ für den Erfolg der Newtonschen Mechanik. Zum einen konnte Newton mit Hilfe „seiner“ Gleichungen die drei Keplerschen Gesetze aus einem viel allgemeineren Gesetz ableiten. Wichtiger aber war die Möglichkeit, die Abweichungen der Planetenbahnen von den Keplerschen Idealformen aufgrund der Störeinflüsse der anderen Planeten mit einzubeziehen. Die Newtonsche Theorie war dabei so erfolgreich, daß von LeVerrier (1846) und Adams (1845) aufgrund minimaler Abweichungen der Uranusbahn von ihren „Sollwerten“ die Existenz eines neuen Planeten (Neptun) sowie der richtige Ort für seine Beobachtung vorhergesagt werden konnte.

Als man dann in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts einige Abweichungen der Merkurbahn beobachtete (die sogenannte *Periheldrehung*) postulierte (derselbe) LeVerrier wiederum die Existenz eines neuen Planeten (Vulkanus), diesmal aber zwischen der Merkurbahn und der Sonne. Glücklicherweise (?) erlebte LeVerrier den Tag nicht mehr, für den er eine Möglichkeit für die Beobachtung von Vulkanus vorhergesagt hatte. Erst die Allgemeine Relativitätstheorie gab eine befriedigende Erklärung für den beobachteten Effekt.

Dabei handelt es sich nicht einfach um die Periheldrehung des Merkurs, die ungefähr 574,1 Winkelsekunden im Jahrhundert ausmacht. Unter Berücksichtigung der Einflüsse der anderen Planeten (hauptsächlich Venus, Jupiter und Erde) hätte sich ein Wert von 531,5 Winkelsekunden pro Jahrhundert ergeben sollen. Die Differenz — 42,6 Winkelsekunden im Jahrhundert — wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie erklärt.

4.1 Die Bewegungsgleichungen im Gravitationsfeld

Wir werden später allgemeiner die Bewegung in einem rotationssymmetrischen Potential behandeln, da (abgesehen von der abschließenden Bestimmung der Integrale) dieser

keine weiteren Schwierigkeiten beinhaltet. Trotzdem sollen zunächst ein paar Bemerkungen speziell zum Gravitationsgesetz vorangestellt werden.

Für das Kraftgesetz der Gravitation fand Newton das sogenannte $1/r^2$-Verhalten:

$$\vec{F}(\vec{r}) \;=\; -\,G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\;.$$

m_1 und m_2 sind hierbei die Massen der beiden beteiligten Körper, $\vec{r}$ der Relativvektor zwischen diesen beiden Körpern (von dem Körper aus betrachtet, der die obige Kraft ausübt), und G ist die Newtonsche Gravitationskonstante ($G = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$).

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für den Körper am Punkt $\vec{r}$ lautet somit:

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\,G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\;. \tag{4.1}$$

Üblicherweise dividiert man diese Gleichung durch m_1 und begründet so, daß die Bewegungen von Massepunkten in der Newtonschen Gravitationstheorie von der Masse des Körpers unabhängig sind. („Alle Körper fallen gleich schnell!“) Wir wollen zunächst kurz überlegen, warum diese Vorgehensweise gerechtfertigt ist.

Auf der linken Seite von Gleichung (4.1) steht die sogenannte *träge Masse*, ein Maß für die Eigenschaft eines Körpers, sich der Beschleunigung durch eine Kraft entgegenzustellen. Auf der rechten Seite von Gleichung (4.1) steht jedoch die sogenannte *schwere Masse*, ein Maß für die Eigenschaft eines Körpers, andere massive Gegenstände aufgrund der Gravitationswechselwirkung anzuziehen. Die Gleichheit (genauer sollte man von Proportionalität sprechen, da ein entsprechender Faktor immer in die Definition der Gravitationskonstanten bzw. der Definition von „Kraft“ absorbiert werden kann) dieser beiden Größen ist alles andere als selbstverständlich. Die ersten Experimente dazu werden Galilei zugesprochen, der angeblich am schiefen Turm von Pisa die Fallzeiten von Gegenständen unterschiedlichen Materials ausgemessen hat. Genauere Experimente hat Eötvös um die Jahrhundertwende durchgeführt (er nutzte dabei die Fliehkräfte, die ebenfalls Trägheitskräfte sind, von massiven Gegenständen im Gravitationsfeld aus). Die vermutlich genauesten Experimente stammen aus den 60er Jahren von Dicke, der die Gleichheit von schwerer und träger Masse auf $1 : 10^{10}$ bestätigte. Dabei sollte man jedoch immer bedenken, daß es sehr schwierig ist, wirklich verschiedene Materialien zu untersuchen. Letztendlich ist das Verhältnis von Protonen zu Neutronen zu Elektronen in den Materialien nahezu gleich. Für andere Elementarteilchen ist das Gesetz sehr viel schlechter überprüft. Außerdem findet man immer noch populärwissenschaftliche Artikel, in denen der „Antimaterie“ auch eine „Antigravitation“ zugesprochen wird.

Die Gleichheit von schwerer und träger Masse ist also eine experimentelle Tatsache:

$$\text{träge Masse} \;=\; \text{schwere Masse}\;.$$

Eine wirkliche Erklärung gibt es nicht für dieses Gesetz, allerdings bildet es die Grundlage für die Allgemeine Relativitätstheorie. Man bezeichnet es in diesem Zusammenhang auch als *Äquivalenzprinzip*.

Für einen Gegenstand der Masse m im Abstand h oberhalb der Erdoberfläche bietet es sich an, die Kraft als Funktion vom Abstand vom Erdmittelpunkt nach der Höhe zu entwickeln (die Richtung der Kraft ist dabei immer zum Erdmittelpunkt gerichtet und wird im folgenden nicht berücksichtigt):

$$F(R+h) \;=\; Gm_{\text{Erde}}\frac{m}{(R+h)^2} \;\approx\; Gm_{\text{Erde}}m\frac{1}{R^2}\left(1-\frac{2}{R}h+\mathcal{O}((h/R)^2)\right)\;.$$

Der erste Term dieser Entwicklung entspricht dem *Gewicht* des Massekörpers auf der Erdoberfläche, der zweite gibt die Abnahme des Gewichts mit der Höhe an und ist um einen Faktor h/R kleiner. Geht man vom Potential aus,

$$V(R+h) \;=\; Gm_{\text{Erde}}\frac{1}{R+h} \;\approx\; Gm_{\text{Erde}}\frac{1}{R}\left(1-\frac{1}{R}h+\mathcal{O}((h/R)^2)\right)\;,$$

so ist der erste Term eine (irrelevante) Konstante, der zweite Term führt auf die Kraft:

$$-\left.\frac{\partial V(R+h)}{\partial h}\right|_{h=0} \;=\; Gm_{\text{Erde}}\frac{1}{R^2} \;=\; g\;.$$

($g\approx 9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ist die Konstante der Massenanziehung auf der Erdoberfläche, und mg ist das *Gewicht* einer Masse m an der Erdoberfläche.) Auch in dieser Näherung eines linearen Potentials $V\propto h$ bzw. einer konstanten Kraft fällt die Masse des Gegenstandes natürlich heraus, d.h. alle Körper fallen im Gravitationsfeld der Erde gleich schnell.

4.2 Das effektive Potential

Wir nehmen nun eine Bewegungsgleichung der Form

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} \;=\; -\vec{\nabla}U(|\vec{x}|)$$

an. Wir hatten schon gesehen, daß die Bewegungsgleichungen eines Zwei-Körper-Problems für die Relativkoordinate die obige Form annehmen, wobei m allerdings die reduzierte Masse

$$m \;\simeq\; \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

ist. Für $m_1\gg m_2$ wird $m\approx m_2$.

Wir hatten auch gesehen, daß es für eine solche Bewegungsgleichung zwei Erhaltungsgrößen gibt, die Energie und den Drehimpuls:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 + U(|\vec{x}|) \\ \vec{L} &= m(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) \ . \end{aligned}$$

Die Erhaltung des Drehimpulses impliziert insbesondere, daß die Bewegung innerhalb einer festen Ebene erfolgt. Wir wählen das Koordinatensystem so, daß diese Ebene den xy-Koordinaten entspricht.

Als nächsten Schritt beschreiben wir die Punkte der Ebene in Polarkoordinaten, d.h. wir bezeichnen sie durch ihren Abstand r vom Rotationszentrum und ihren Winkel φ relativ zur x-Achse. Es gilt also:

$$\vec{x}(t) \ = \ (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t), 0) \ = \ r(t)(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t), 0) \ .$$

Als Geschwindigkeitskurve erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} \ = \ \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t), 0) \ + \ r(t)\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}(-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t), 0) \ .$$

Damit folgt für die Erhaltungsgrößen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}(t)^2 + r(t)^2\dot{\varphi}(t)^2\right) + U(r(t)) \\ L_3 := l &= mr(t)^2\dot{\varphi}(t) \ . \end{aligned}$$

Wäre die Lösung für $r(t)$ bekannt, so könnten wir nach

$$\varphi(t) - \varphi_0 \ = \ \int_{t_0}^{t} \frac{l}{mr(t')^2}\mathrm{d}t' \tag{4.2}$$

auch die Lösung für die Winkelabhängigkeit bestimmen. Andererseits geht in die Energie nur die Zeitableitung von φ ein, die wir somit durch den Drehimpuls (der für eine feste Bahnkurve eine Konstante ist) und $r(t)$ ersetzen können:

$$\dot{\varphi}(t) \ = \ \frac{l}{mr(t)^2} \ , \tag{4.3}$$

d.h.

$$\begin{aligned} E(\dot{r}, r) &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}(t)^2 + \frac{l^2}{m^2r(t)^2}\right) \ + \ U(r(t)) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}(t)^2 \ + \ U_{\text{eff}}(r(t)) \\ \text{mit} \quad U_{\text{eff}}(r) &= \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \ . \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für die Energie hat also genau dieselbe Form, wie die Energie für ein Teilchen in einer Dimension (beschrieben durch die Koordinate $r(t)$, allerdings mit einem sogenannten *effektiven Potential* U_{eff}, das zu dem ursprüngliche Potential noch um dem Beitrag $l^2/2mr^2$ erweitert ist. Dieser Beitrag ist positiv, d.h. wirkt vom Zentrum abstoßend, und ist für das Gravitationspotential $U(r) \propto -1/r$ (für $l \neq 0$) bei genügend kleinen Werten von r immer dominant.

Eine qualitative Analyse der Bahnkurven eines eindimensionalen Teilchens in diesem effektiven Potential liefert schon weitreichende Aussagen über die Bahnkurven des zweidimensionalen Problems. So erkennt man beispielsweise sofort die möglichen Bahnen zu gebundenen Zuständen sowie auch zu Streuzuständen (je nachdem, ob $E < 0$ oder $E > 0$), die Umkehrpunkte (für die $\dot{r} = 0$, also $E = U_{\text{eff}}$), etc.

4.3 Die Lösung des Kepler-Problems

Die Lösungskurve $r(t)$ (und nach Integration von Gl. (4.2) damit auch $\varphi(t)$) läßt sich nun nach dem allgemeinen Verfahren bestimmen, das wir für die eindimensionale Bewegung schon erläuert hatten. Aus der Energieerhaltung ergibt sich eine Bewegungsgleichung 1. Ordnung für den Abstand:

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r))} \tag{4.4}$$

bzw.

$$\int_{r_0}^{r(t)} \sqrt{\frac{m}{2(E - U_{\text{eff}}(r'))}}\mathrm{d}r' \;=\; t - t_0 \;.$$

Das Problem ist also (bis auf die Bestimmung der Integrale) gelöst. Die explizite Berechnung der Integrale ist allerdings meist schwierig.

Oft ist es leichter, statt der expliziten Lösung für die Bahnkurve — also $r(t)$ — eine andere Parametrisierung zu bestimmten, insbesondere die Abhängigkeit des Radius vom Winkel, $r(\varphi)$, wobei natürlich gelten soll $r(\varphi(t)) = r(t)$. (Auch hier wurde wieder von der Unsitte gebrauch gemacht, verschiedene Funktionen mit demselben Symbol zu benennen.) Es gilt in diesem Fall:

$$\frac{\mathrm{d}r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \;,$$

bzw. mit Gleichung (4.3)

$$\frac{\mathrm{d}r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \;=\; \frac{mr^2}{l}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} \;,$$

und weiter mit Gl. (4.4):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} &= r^2\frac{\sqrt{2m}}{l}\sqrt{E-U_{\text{eff}}(r)} \\ &= r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2}-\frac{1}{r^2}-\frac{2m}{l^2}U(r)}\ . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Auch wenn diese Differentialgleichung zunächst schwieriger erscheint, als die Differentialgleichung für $r(t)$, so läßt sich ihre Lösung häufig leichter angeben.

Wir betrachten nun ganz speziell den Fall des Kepler-Problems, bei dem

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} \qquad (\kappa = GMm)\ .$$

(M ist die Masse eines Zentralkörpers, dessen Position fest bleibt.) Diese Differentialgleichung wird durch die Funktion

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi}$$

gelöst. Zum Beweis bilden wir die Ableitung nach φ:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\epsilon p\sin\varphi}{(1+\epsilon\cos\varphi)^2} = r^2\frac{\epsilon}{p}\sin\varphi\ . \tag{4.6}$$

Wir können $r(\varphi)$ nach $\cos\varphi$ auflösen, und dann $\sin\varphi$ daraus als Funktion von r berechnen:

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{p}{r}-1\right) \\ \Rightarrow\quad \sin\varphi &= \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{p^2}{r^2}-\frac{2p}{r}-1\right)} \\ &= \frac{p}{\epsilon}\sqrt{\frac{\epsilon^2-1}{p^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{2}{pr}}\ .\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in Gleichung (4.6) ein, so sehen wir, daß $r(\varphi)$ tatsächlich die richtige Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{2m\kappa}{l^2 r}}$$

erfüllt, und durch einen Vergleich der Parameter folgt:

$$p = \frac{l^2}{m\kappa} \qquad \epsilon = \sqrt{1+\frac{2El^2}{m\kappa^2}}\ . \tag{4.7}$$

Für gebundene Zustände ist

$$-\frac{m\kappa^2}{2l^2} \;<\; E \;<\; 0\;,$$

und damit $0 < \epsilon < 1$. In diesem Fall beschreibt die Bahn eine Ellipse. Ist $E > 0$ so wird der Radius für bestimmte Winkel unendlich, die Lösung beschreibt eine Hyperbel, d.h. ein Streuproblem.

Der Parameter ϵ ist gleich dem Verhältnis aus der großen Halbachse zum Abstand Mittelpunkt–Brennpunkt. Für $\epsilon = 0$ erhält man Kreisbahnen.

Wir haben gesehen, daß die Bahnkurven des Kepler-Problems für gebundene Zustände geschlossene Kurven darstellen. Dies ist nach den bisherigen Überlegungen (insbesondere nach der Kenntnis der bisherigen Erhaltungsgrößen) nicht selbstverständlich. Der tiefere Grund dafür ist, daß es neben der Energie und dem Drehimpuls noch eine weitere Erhaltungsgröße gibt, die allerdings nicht so leicht zu finden ist. Diese Erhaltungsgröße $\vec{A}$ bezeichnet man als *Lenzschen-Vektor* oder auch als *Lenz-Runge-Vektor*:

$$\vec{A} \;=\; \dot{\vec{x}} \times \vec{L} - \kappa \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\;.$$

Beim Kepler-Problem gilt also $\mathrm{d}\vec{A}/\mathrm{d}t = 0$.

4.4 Das dritte Keplersche Gesetz

Das erste Keplersche Gesetz („Die Planetenbahnen sind Ellipsen“) haben wir im vorherigen Abschnitt hergeleitet. Das zweite Keplersche Gesetz („In gleichen Zeiten überstreicht der Ortsvektor gleiche Flächen“) folgte ganz allgemein aus der Erhaltung des Drehimpulses. Wir wollen nun das dritte Keplersche Gesetz herleiten, das eine Aussage über die Umlaufzeit als Funktion der großen Halbachse der Ellipse macht.

Zunächst wollen wie die Parameter der Ellipse — die große und kleine Halbachse a bzw. b — durch die beiden Parameter ϵ und p ausdrücken. Für die große Halbachse a gilt:

$$2a \;=\; r_{\min} + r_{\max} \;=\; \frac{p}{1+\epsilon} + \frac{p}{1-\epsilon} \;=\; \frac{2p}{1-\epsilon^2}\;,$$

bzw.

$$a \;=\; \frac{p}{1-\epsilon^2}\;.$$

Weiterhin ist die Lage des Brennpunktes durch

$$r_{\mathrm{B}} \;=\; \frac{1}{2}(r_{\max} - r_{\min}) \;=\; \epsilon \frac{p}{1-\epsilon^2} \;=\; \epsilon a$$

gegeben, und es gilt für die kleine Halbachse b:

$$r_{\mathrm{B}}^2 + b^2 \;=\; \epsilon^2 a^2 + b^2 \;=\; a^2$$

bzw.

$$b^2 \;=\; a^2(1-\epsilon^2) \;=\; ap\;.$$

Damit haben wir alle Relationen, die wir für das folgende benötigen.

Für das Flächenelement, daß in einer Zeiteinheit dt überstrichen wird, gilt

$$\mathrm{d}F \;=\; \frac{1}{2m}|\vec{L}|\mathrm{d}t \;,$$

und da die Gesamtfläche einer Ellipse $F = \pi ab$ ist, folgt für die Umlaufzeit:

$$T \;=\; \frac{2mF}{|\vec{L}|} \;=\; \frac{2\pi mab}{l} \;=\; 2\pi\frac{m\sqrt{p}}{l}a^{3/2} \;,$$

bzw.

$$T^2 \;=\; 4\pi^2\frac{m^2p}{l^2}a^3 \;.$$

Mit $p = l^2/m\kappa$ und $\kappa = GMm$ erhalten wir schließlich:

$$\frac{T^2}{a^3} \;=\; \frac{4\pi^2}{GM} \;=\; \text{const.}$$

(Eine genauere Rechnung ausgehend von einem Zwei-Körper-Problem mit der reduzierten Masse liefert statt M — also der Sonnenmasse — den Wert $M + m$, der aber für die Planeten praktisch immer durch M ersetzt werden kann.) In dem Maße, wie die Eigenbewegung der Sonne vernachlässigt werden kann (bzw. die Sonnenmasse sehr viel größer als die Planetenmasse ist), haben wir damit das dritte Keplersche Gesetz hergeleitet.

Kapitel 5

Der harmonische Oszillator

5.1 Die Lösung des Anfangswertproblems

Der harmonische Oszillator ist neben der freien Bewegung sicherlich das einfachste System. Die Bewegungsgleichung ist linear, d.h. die Funktion $\vec{x}(t)$ tritt nur in erster Ordnung auf. Die Bewegungsgleichung des ungedämpften, freien harmonischen Oszillators lautet:

$$m\ddot{x}(t) \;=\; -\,Dx(t)\;,$$

bzw.

$$\ddot{x}(t) \;=\; -\,\omega^2 x(t) \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}\;.$$

Die speziellen Lösungen dieser Gleichunge sind

$$x_1(t) \;=\; \sin\omega t \quad \text{und} \quad x_2(t) \;=\; \cos\omega t\;,$$

und die allgemeinste Lösung ergibt sich als Linearkombination der beiden speziellen Lösungen:

$$x(t) \;=\; a\sin\omega t \;+\; b\cos\omega t \;=\; A\sin(\omega t+\varphi_0)\;,$$

mit $a = A\cos\varphi_0$ und $b = A\sin\varphi_0$. Die beiden Integrationskonstanten a, b bzw. A, φ_0 lassen sich beispielsweise durch Anfangsbedingungen bei $t = 0$ festlegen:

$$b \;=\; x(0)\;,\quad a \;=\; \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\;.$$

Damit ist das allgemeine Anfangswertproblem für den freien, ungedämpften harmonischen Oszillator gelöst. Vom mathematischen Standpunkt aus bereitet der harmonische Oszillator also keinerlei Schwierigkeiten. Gerade deshalb bietet er sich aber als „Testsystem“ zur Untersuchung vieler Methoden und Verallgemeinerungen an. Zunächst wollen wir aber ein paar Bemerkungen zur physikalischen Bedeutung des harmonischen Oszillators machen.

5.2 Physikalische Bedeutung des harmonischen Oszillators

Die wesentlichste Bedeutung des harmonischen Oszillators ergibt sich daraus, daß er für genügend kleine Amplituden das Verhalten von Systemen in der Nähe ihrer Ruhelagen beschreibt. Sei $U(x)$ ein Potential mit einem Minimum bei x_0, d.h.

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} \;\equiv\; \lambda \;>\; 0 \;,$$

so läßt sich für kleine Amplituden $y = x - x_0$ die allgemeine Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) \;=\; -\,\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$$

näherungsweise in der Form

$$m\ddot{y} \;=\; -\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(U(x_0) + \frac{1}{2}\lambda y^2 + \ldots\right) \;=\; -\,\lambda y + \ldots$$

schreiben. Man erhält also die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators, wobei sich „. . . “ auf Terme höherer Ordnung in y bezieht. Gerechtfertigt wird diese Näherung allerdings erst dadurch, daß die Lösung der Bewegungsgleichung zu einer kleinen Auslenkung bei $t = 0$ (und kleiner Geschwindigkeit) auch für lange Zeiten eine kleine Amplituden beibehält. Hierfür ist notwendig, daß bei x_0 ein Minimum des Potentials vorliegt, d.h. $\lambda > 0$ ist. Anderenfalls wäre die Lösung eine Exponentialfunktion der Form

$$\hat{y}(t) \;=\; a\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}t} + b\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t} \;,$$

und diese würde für große Zeiten selbst bei kleiner Anfangsamplitude $a+b$ bei $t = 0$ i. A. zu großen Auslenkungen führen, so daß die lineare Näherung in der Bewegungsgleichung nicht mehr gerechtfertigt ist. (Einzige Ausnahme ist der Fall $a = 0$, der für $b \neq 0$ gerade einer Anfangsgeschwindigkeit entspricht, die für das Teilchen asymptotisch zu einer metastabilen Ruhelage auf dem Potentialmaximum führt.)

Die lineare Approximation läßt sich nicht nur für eindimensionale Probleme durchführen. Sei $U(\vec{x})$ ein Potential mit einem Minimum bei $\vec{x}_0$, so führt eine Entwicklung nach Potenzen von $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0$ um den stationären Punkt

$$U(\vec{x}) \;\approx\; U(\vec{x}_0) \,+\, \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_j} y_i\, y_j \;+\; \ldots$$

zu einer Bewegungsgleichung der Form

$$m\ddot{y}_i \;=\; -\,\Gamma_{ij} y_j \;, \qquad \text{Summenkonvention!} \tag{5.1}$$

mit

$$\Gamma_{ij} \;=\; \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \quad .$$

In Vektorschreibweise können wir auch sagen:

$$m\ddot{\vec{y}}(t) \;=\; -\,\Gamma\vec{y}(t)\ .$$

Offensichtlich ist Γ eine reelle, symmetrische Matrix, $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$, die bei einer geeigneten Wahl des Koordinatensystems Diagonalgestalt annimmt. Sei R eine Drehung (d.h. $R^{-1} = R^{+}$) des Koordinatensystems (dessen Zentrum wir nun in den Punkt $\vec{x}_0$ legen), so daß für die Koordinaten eines Vektors gilt

$$z_i \;:=\; y_i' \;=\; (R^{-1})_{ij}y_j\ ,\quad y_i \;=\; R_{ij}z_j\ .$$

So ist:

$$m\ddot{z}_i \;=\; m(R^{-1})_{ij}\ddot{y}_j \;=\; -\,(R^{-1})_{ij}\Gamma_{jk}y_k \;=\; -\,(R^{-1})_{ij}\Gamma_{jk}R_{kl}z_l\ .$$

Wir erhalten so:

$$m\ddot{z}_i \;=\; -\,\Gamma'_{ij}z_j$$

mit

$$\Gamma'_{ij} \;=\; (R^{-1})_{ik}\Gamma_{kl}R_{lj} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma' = R^{+}\Gamma R\ .$$

Wählen wir die Rotation des Koordinatensystems gerade so, daß Γ' diagonal wird, mit

$$\Gamma' \;=\; R^{+}\Gamma R \;=\; \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\ ,$$

so folgt als Bewegungsgleichung für die Koordinaten $\{z_i\}$:

$$m\ddot{z}_i \;=\; -\,\lambda_i z_i \quad \text{keine Summenkonvention!}$$

Wir haben also die drei gekoppelten harmonischen Oszillatoren (5.1) durch eine geeignete Koordinatenwahl „entkoppelt“. $\{\lambda_i\}$ sind gerade die Eigenwerte der zweiten Ableitung von $U(\vec{x})$. Damit $\vec{x}_0$ wirklich ein Minimum von U ist, müssen alle drei Eigenwerte positiv sein. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß Γ eine positive Matrix ist. (Für eine positive Matrix gilt $(\vec{x}, \Gamma\vec{x}) > 0$ für jeden Vektor $\vec{x} \neq 0$.)

Der harmonische Oszillator beschreibt also die Bewegungen von Newtonschen Körpern in einem Potential um die Ruhelage. Damit ist er gleichzeitig auch Ausgangpunkt für sogenannte störungstheoretische Betrachtungen, bei denen man die vernachlässigten Terme bei der Entwicklung von U um die Ruhelage schrittweise wieder mitberücksichtigt.

Eine direkte physikalische Bedeutung gewinnt der harmonische Oszillator durch die Eigenschaft, daß die Periode der Bewegung $T = 2\pi/\omega$ nicht von der Amplitude bzw. den Anfangsbedingungen abhängt, sondern eine Systemeigenschaft ist. Daher eignen sich Systeme, die hinreichend genau den Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators genügen, auch als Taktgeber für die Zeitmessung. Beispiele dafür sind das Pendel (bei kleinen Auslenkungen — daher auch meist die großen Pendeluhren) oder die Schwindungen einer Feder.

5.3 Zwischenabschnitt: Komplexe Zahlen

Wir werden in den nächsten Abschnitten die Bedeutung des Exponentialansatzes für die Lösung des harmonischen Oszillators (ungedämpft, gedämpft, und mit äußeren Kräften) untersuchen. Da die Lösungen in diesem Fall zunächst als komplexe Funktionen erscheinen, sollen einige grundlegende Eigenschaften der komplexen Zahlen kurz wiederholt werden.

Wir definieren ein Symbol i durch die Eigenschaft $i^2 = -1$ oder formal:$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$. Jede komplexe Zahl läßt sich dann darstellen als

$$z \;=\; x + \mathrm{i}y \quad \text{mit} \;\; x, y \in \mathbb{R} \; .$$

x bezeichnet man als den Realteil von z und y als den Imaginärteil.

Wir fordern, daß das Produkt assoziativ und kommutativ sein soll, und die üblichen Distributivgesetze gelten. Dann folgt:

$$z_1 z_2 \;=\; (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \;=\; (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + y_1 x_2) \; .$$

Das Eins-Element bezüglich der Multiplikation ist offensichtlich die 1 der reellen Zahlen, und wenn das Produkt zweier Zahlen verschwindet, muß eine der beiden verschwinden:

$$z_1 z_2 \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 0 \text{ oder } z_2 = 0 \; .$$

Zu jedem $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ gibt es ein inverses Element:

$$z^{-1} \;=\; \frac{1}{x + \mathrm{i}y} \;=\; \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2} \; .$$

Die komplexen Zahlen bilden offensichtlich einen (kommutativen) Körper.

Zu einer komplexen Zahl z definieren wir die konjugierte Zahl $\bar{z}$ durch:

$$z \;=\; x + \mathrm{i}y \quad \Rightarrow \quad \bar{z} \;=\; x - \mathrm{i}y \; .$$

Offensichtlich ist die $\bar{}$-Operation eine Inversion, d.h. es gilt $\bar{\bar{z}} = z$. Außerdem ist

$$\overline{z_1 z_2} \;=\; \bar{z}_1 \bar{z}_2 \; . \tag{5.2}$$

Wir können jeder komplexen Zahl eine Norm zuordnen:

$$|z| \;:=\; (\bar{z}z)^{1/2} \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\;,$$

und es gelten folgende Regeln:

$$|z| \;=\; |\bar{z}| \qquad |z_1 z_2| \;=\; |z_1|\,|z_2| \qquad |z^{-1}| \;=\; \frac{1}{|z|}\;.$$

Funktionen mit einer Potenzreihendarstellung lassen sich so auch für komplexe Zahlen angeben:

$$f(z) \;=\; \sum_n a_n\, z^n\;.$$

Handelt es sich bei den Koeffizienten a_n um reelle Zahlen, so spricht man von *analytischen* Funktionen. Die Konvergenz einer solchen Reihe bezieht sich auf eine Konvergenz bezüglich Real- und Imaginärteil. Als Konvergenzradius einer solchen Funktion bezeichnet man den größten Wert R, so daß die Reihe für $f(z)$ für alle z mit $|z| < R$ konvergiert.

Formal kann man solche Reihen auch für negative Potenzen definieren, man spricht dann von sogenannten Laurent-Reihen:

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-p}^{\infty} a_n\, z^n\;.$$

Sind die Koeffizienten alle reell, so gilt

$$\overline{f(z)} \;=\; f(\bar{z})\;.$$

Äquivalent hätten wir die Menge der komplexen Zahlen auch als die Algebra der 2×2-Matrizen der Form

$$z \;=\; \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

mit der üblichen Matrixmultiplikation einführen können. Komplexe Konjugation entspricht der Transposition der Matrix. Die Norm ist die Wurzel aus der Determinante.

Eine wichtige Formel ist die Euler-Formel für die Exponentialfunktion einer imaginären Zahl:

$$\mathrm{e}^{i\varphi} \;=\; \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\;.$$

Der Beweis erfolgt über die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion sowie der trigonometrischen Funktionen. Mit dieser Formel lassen sich beispielsweise sehr rasch die trigonometrischen Additionstheoreme ableiten:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} &= (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \;+\; \mathrm{i}(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)\;. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen lassen sich damit auch in „Polarkoordinaten“ angeben:

$$z \;=\; x + \mathrm{i}y \;=\; r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \;=\; r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \;,$$

mit

$$r \;=\; \sqrt{x^2+y^2} \;=\; |z| \quad \text{und} \quad \tan\varphi \;=\; \frac{y}{x} \;.$$

Die Euler-Formel ermöglicht es, die Exponentialfunktion von komplexen Zahlen anzugeben:

$$\mathrm{e}^{z} \;=\; \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} \;=\; \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \;.$$

Für das Produkt zweier komplexer Zahlen in der Polarzerlegung ($z_i \simeq (r_i, \varphi_i)$) folgt:

$$(r_1,\varphi_1)(r_2,\varphi_2) \;=\; (r_1 r_2, \varphi_1+\varphi_2) \;.$$

Die Winkel addieren sich und die Beträge multiplizieren sich. Die $\bar{}$-Konjugation bedeutet $\varphi \to -\varphi$. Multiplikation einer komplexen Zahl mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ entspricht daher einer Rotation der komplexen Zahl in der komplexen Ebene um den Winkel φ. Dies wird auch durch die Matrixdarstellung der Eulerformel,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \;,$$

deutlich: Die rechte Seite ist eine Matrix-Darstellung einer Drehung in der 2-dimensionalen Ebene um den Winkel φ.

Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ lassen sich auch durch z und $\bar{z}$ ausdrücken:

$$x \;=\; \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \qquad y \;=\; \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \;.$$

Daher läßt sich jede (komplexwertige) Funktion $f(x,y)$ über der 2-dimensionalen reellen Ebene auch als Funktion $\hat{f}(z,\bar{z})$ schreiben. Falls sich eine Funktion über der 2-dim. Ebene nur als Funktion von z schreiben läßt, so nennt man sie holomorph. Für holomorphe Funktionen gilt das sogenannte *Residuen-Theorem*: Für das Integral von

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-p}^{\infty} a_n z^n$$

um einen (positiv orientierten, d.h. dem Uhrzeigersinn entgegengerichteten) Weg um den Punkt $z = 0$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; a_{-1} \;.$$

Man bezeichnet a_{-1} auch als das *Residuum* von $f(z)$, wobei man strenggenommen von dem Residuum der Form $f(z)\mathrm{d}z$ sprechen sollte.

Beweis: Wir berechnen das Integral von z^n um einen Kreis vom Radius r um den Punkt $z = 0$ in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $dz = izd\varphi$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} z^n\,dz \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}\,d\varphi \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 1 & \text{für } n = -1 \end{cases}$$

Dieses Theorem ist oft hilfreich bei der Berechnung von Integralen. Kann man nämlich den Integrationsweg geeignet in die komplexe Ebene fortsetzen, so daß sich ein geschlossener Weg ergibt, so reduziert sich das Integral im wesentlichen auf die Summe der Residuen innerhalb des Integrationsweges. Wir werden später Beispiele hierfür sehen.

Strenggenommen ist das Residuentheorem damit noch nicht bewiesen, da wir nur spezielle Wege (Kreise) um den Punkt 0 betrachtet haben. Man muß noch zeigen, daß die Integration unabhängig von der Wahl des Weges ist. Dazu benutzen wir eine Darstellung, die wir im Zusammenhang mit den konservativen Kraftfeldern schon untersucht haben, nämlich daß ein geschlossenes Wegintegral über ein Vektorfeld verschwindet, wenn das Vektorfeld rotationsfrei ist und der Weg keine Singularitäten des Feldes einschließt.

Zunächst beweisen wir jedoch die Cauchy-Riemann-Gleichungen. Sei $F(z)$ eine komplexe Funktion auf der komplexen Ebene, welche die Form

$$F(z) \;=\; F(x+iy) \;=\; f(x,y) + ig(x,y)$$

habe. Dann gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \;=\; \frac{\partial F}{\partial iy} \;=\; -i\frac{\partial F}{\partial y}\;.$$

Die obige Zerlegung von F in Real- und Imaginärteil für auf die Gleichung:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \;=\; -i\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\;,$$

bzw., da Real- und Imaginärteil getrennt übereinstimmen müssen:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \;=\; \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \;=\; -\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\;. \tag{5.4}$$

Diese beiden Gleichungen bezeichnet man als Cauch-Riemann-Gleichungen. Sie sind äquivalent dazu, daß sich die Funktion $f(x,y) + ig(x,y)$ in der Form $F(z)$ schreiben läßt.

Wir wollen nun die Wegunabhängigkeit von komplexen Integralen zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\oint F(z)\mathrm{d}z &= \oint [f(x,y)+\mathrm{i}g(x,y)]\,[\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y] \\ &= \oint (f(x,y)\mathrm{d}x - g(x,y)\mathrm{d}y) \;+\; \mathrm{i}\oint (g(x,y)\mathrm{d}x + f(x,y)\mathrm{d}y)\;.\end{aligned}$$

Damit dieses Integral verschwindet, müssen Real- und Imaginärteil verschwinden. Beide Anteile können wir jedoch auch als Integrale über 2-dimensionale Vektorfelder interpretieren. Die Rotationsfreiheit des Vektorfeldes zum Realteil, $(f(x,y),-g(x,y))$, folgt aus der zweiten Cauchy-Riemann-Gleichung (5.4), die Rotationsfreiheit des Vektorfeldes zum Imaginärteil, $(g(x,y),f(x,y)$, folgt aus der ersten Cauchy-Riemann-Gleichung (5.3). Damit ist das Residuentheorem bewiesen.

Man kann den Residuensatz auch noch aus einem anderen Blickwinkel verstehen. Komplexe holomorphe Funktionen kann man ableiten und die Ableitungen sind eindeutig. Ebenso kann man zu einer holomorphen Funktion die Stammfunktion bilden. Das Wegintegral (in der komplexen Ebene) über eine Funktion ist dann gleich der Differenz aus dem Wert der Stammfunktion am Wegende und dem Wert am Weganfang. Bei einem geschlossenen Weg ist diese Differenz 0, vorausgesetzt die Stammfunktion ist eindeutig. Nun hat die Funktion $F(z)=z^n$ für alle $n\neq -1$ eine eindeutige Stammfunktion $G(z)=z^{n+1}/(n+1)$, so daß das Integral über einen geschlossenen Weg verschwinden muß. Die Funktion $F(z)=1/z$ hat als Stammfunktion aber $G(z)=\ln z$, und diese Funktion ist über der komplexen Ebene mehrdeutig – sie verlang eine unendliche Überlagerung. Nach einem Umlauf um den Nullpunkt gelangt man auf ein anderes Blatt der Logarithmusfunktion mit einer Unterschied von 2πi, d.h. der Wert am Endpunkt minus dem Wert am Anfangspunkt bei einem geschlossenen Weg um die Null ist gerade 2πi.

5.4 Der Exponentialansatz

Kehren wir zur Differentialgleichung des harmonischen Oszillators zurück:

$$\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t) \;=\; 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\right)x(t) \;=\; 0\;.$$

Diese Differentialgleichung besitzt folgende Eigenschaften: Sie ist

- linear
- homogen
- invariant unter Zeittranslationen
- gewöhnlich von 2. Ordnung .

Die ersten beiden Punkte bedeuten, daß mit je zwei Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ auch eine beliebige Linearkombination $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ Lösung der Gleichung ist. Invarianz unter Zeittranslationen bedeutet, daß mit jeder Lösung $x(t)$ auch $x(t-a)$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ Lösung der Differentialgleichung ist. Sie folgt aus der Tatsache, daß die Koeffizienten in obiger Gleichung — ω^2 und 1 (vor der Ableitung) — nicht explizit von der Zeit abhängen. Die letzte Bedingung — gewöhnlich und von 2. Ordnung — kennen wir schon, wird aber für die folgenden Bemerkungen die untergeordnetste Rolle spielen.

Die Invarianz unter Zeittranslationen ist für das folgende sehr wichtig. Wir wissen, daß eine Differentialgleichung 2. Ordnung nur zwei linear unabhängige Lösungen besitzt, sich also jede Lösung als Linearkombination dieser beiden Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ erhalten läßt. Für den Fall des harmonischen Oszillators folgt diese Eigenschaft einfach aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen. Der einfachste Ansatz für die Lösungen ergibt sich daher für Funktionen $f(t)$ mit der Eigenschaft:

$$f(t+a) \;=\; \lambda(a) f(t) \;.$$

Die einzige Funktion mit dieser Eigenschaft ist die Exponentialfunktion $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$.

Wir können auch eine infinitesimale Betrachtung anstellen, d.h. $a \to 0$, und erhalten dann für $f(t)$ die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} f(t+a)|_{a=0} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \;=\; \lambda f(t) \;.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist wiederum die Exponentialfunktion. Die Bedeutung der Exponentialfunktion liegt also darin, daß sie „Eigenfunktion“ zum Ableitungsoperator ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{kt} \;=\; k\mathrm{e}^{kt} \;. \tag{5.5}$$

Die Gleichung (5.5) läßt sich in einem ganz ähnlichen Sinn verstehen, wie in der linearen Algebra eine Eigenwertgleichung für eine Matrix A:

$$\sum_{ij} A_{ij} y_j \;=\; \lambda y_i \;.$$

Man überzeuge sich insbesondere davon, daß auch Funktionen Vektorräume bilden (sie lassen sich addieren und mit Zahlen multiplizieren), und die Operation einer Ableitung des Arguments eine lineare Operation ist. (Unter einem Operator versteht man eine lineare Transformation von Funktionen.) Wir werden diesen Gesichtspunkt später noch ausführlicher besprechen. Er spielt im Zusammenhang mit Distributionen und Greenschen Funktionen eine wichtige Rolle, und wird dann später für den Formalismus der Quantenmechanik sogar grundlegend.

Diese Eigenschaft der Exponentialfunktion, Eigenfunktion zum Ableitungsoperator zu sein, macht sie für das Lösen von linearen Differentialgleichungen, bei denen die

Koeffizienten nicht explizit von dem Argument abhänge, so bedeutend. So gilt beispielsweise:

$$\mathcal{L}\mathrm{e}^{kt} \;:=\; \sum_n a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{kt} \;=\; \left(\sum_n a_n k^n\right)\mathrm{e}^{kt}\ .$$

Die Exponentialfunktion ist damit auch Eigenfunktion von beliebigen Summen von Ableitungen. Wollen wir eine entsprechende Differentialgleichung lösen,

$$\mathcal{L}f(t) \;=\; \sum_n a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t) \;=\; 0\ , \tag{5.6}$$

so führt uns der Exponentialansatz auf eine Gleichung der Form

$$\left(\sum_n a_n k^n\right)\mathrm{e}^{kt} \;=\; 0 \quad \text{bzw.} \quad \sum_n a_n k^n \;=\; 0\ . \tag{5.7}$$

Wir haben durch die Exponentialfunktion dividiert, da die Gleichung nur dann für alle t erfüllt sein kann, wenn der Term in den Klammern verschwindet.

(5.7) ist eine algebraische Gleichung für k mit (im allgemeinen) reellen Koeffizienten a_n. Nun sind die reellen Zahlen aber algebraisch nicht abgeschlossen, d.h. nicht alle Lösungen von algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten sind auch wieder reell. Aber die komplexen Zahlen sind algebraisch abgeschlossen, d.h. sämtliche Lösungen der Gleichung (5.7) liegen innerhalb der komplexen Zahlen. Ein fundamenales Theorem der Algebra besagt, daß sich jedes Polynom N-ter Ordnung in der Form

$$\sum_{n=1}^{N} a_n k^n \;=\; \prod_{n=1}^{N} (k_n - k)$$

schreiben läss t, wobei k_n (nicht notwendigerweise verschiedene) komplexe Zahlen sind, die gleichzeitig die Lösungen der Gleichung

$$\sum_{n=1}^{N} a_n k^n \;=\; 0$$

darstellen.

Die Differentialgleichung (5.6) ist linear und homogen. Ist $f(t)$ daher eine Lösung und eine komplexe Funktion, $f(t) = g(t) + \mathrm{i}h(t)$, dann sind sowohl der Realteil $g(t)$ als auch der Imaginärteil $h(t)$ Lösungen. Zu je zwei Lösungen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ der Differentialgleichung sind auch beliebige Linearkombinationen $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ Lösungen, wobei α und β auch komplexe Zahlen sein können. Aus physikalischen Gründen wird man verlangen, daß die gesuchten Lösungen reell sind.

Wir beginnen mit der Differentialgleichung 1. Ordnung. Wir wissen, daß es bis auf einen Faktor nur eine Lösung gibt. Es kann sich also nicht um eine komplexe Lösung

handeln, bei der Real- und Imaginärteil von einander linear unabhängig sind. (Zwei Funktionen heißen linear abhängig, wenn $f_1(t) = \alpha f_2(t)$ für alle t.) Tatsächlich hat

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_2\right) f(t) \;=\; 0$$

nur die Lösung:

$$f(t) \;=\; A\mathrm{e}^{-a_2 t} \; .$$

Die Integrationskonstante ist A. Diese Lösung ist (für reelles A) reell. (Für komplexes A ist die Lösung zwar komplex, Real- und Imaginärteil sind aber proportional zueinander, also linear abhängig.)

Betrachten wir nun den schon bekannten Fall der Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\right) f(t) \;=\; 0 \; .$$

Der Exponentialansatz $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$ führt auf die algebraische Gleichung:

$$k^2 \,+\, \omega^2 \;=\; 0 \; .$$

ω ist in jedem Fall reell, so daß für k nur rein imaginäre Lösungen in Frage kommen:

$$k_{1/2} \;=\; \pm\,\mathrm{i}\omega \; .$$

Als spezielle Lösungen der Differentialgleichung erhalten wir somit:

$$f_+(t) \;=\; \mathrm{e}^{i\omega t} \quad \text{und} \quad f_-(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \; .$$

Diese beiden Lösungen sind als komplexe Funktionen linear unabhängig, die allgemeinste Lösung der Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator ist also:

$$f(t) \;=\; A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \; , \tag{5.8}$$

wobei A und B beliebige komplexe Zahlen sein können. Nun bilden der Real- und Imaginärteil einer Lösung ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung. Wir können für die speziellen Lösungen die Euler-Formel anwenden und erhalten:

$$f_+(t) \;=\; \cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t \quad \text{und} \quad f_-(t) \;=\; \cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t \; .$$

Real- und Imaginärteile der beiden Lösungen sind aber linear abhängig. Wir erhalten somit aus f_- keine neuen, linear unabhängige Lösungen und können daher auch

$$f_1(t) \;=\; \cos\omega t \quad \text{und} \quad f_2(t) \;=\; \sin\omega t$$

als spezielle Lösungen ansehen. Diese speziellen Lösungen erhalten wir auch aus (5.8) durch die Wahl der Koeffizienten $A = B = 1/2$ bzw. $A = -B = 1/2\mathrm{i}$. Ob man nun mit den reellen oder den komplexen Lösungen rechnet, ist eine Frage der Bequemlichkeit. Man verliert oder gewinnt keine zusätzliche Information durch die Anwendung der einen oder anderen Schreibweise.

Wir wollen nun den allgemeinen Fall der (homogenen) Differentialgleichung 2. Ordnung betrachten, wobei wir den Koeffizienten der höchsten Ableitung zu 1 normieren:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega^2\right) f(t) \;=\; 0 \;.$$

Das physikalische System, das von dieser Differentialgleichung beschrieben wird, ist ein harmonischer Oszillator (mit Eigenfrequenz ω) mit einer Reibungskraft, beschrieben durch einen Reibungskoeffizienten κ. Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit und sollte durch ihre Wirkung die Geschwindigkeit verlangsamen, d.h. $\kappa > 0$.

Der Exponentialansatz führt auf die Gleichung:

$$k^2 + \kappa k + \omega^2 \;=\; 0 \;,$$

bzw.

$$k_{1/2} \;=\; -\frac{\kappa}{2} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{4} - \omega^2} \;.$$

Wir müssen mehrere Fälle unterscheiden:

1. $\kappa^2 - 4\omega^2 > 0$:

   In diesem Fall erhalten wir zwei reelle Lösungen k_1 und k_2, und die allgemeinste Lösung ist:

   $$f(t) \;=\; A\mathrm{e}^{k_1 t} + B\mathrm{e}^{k_2 t} \;.$$

   Der physikalische Fall einer bremsenden Reibung ($\kappa > 0$) führt auf $k_i < 0$, und wir erhalten eine gedämpfte Bewegung ohne Schwingungen.

2. $\kappa^2 - 4\omega^2 < 0$:

   Jetzt existieren zwei komplex konjugierte Lösungen für k:

   $$k_{1/2} \;=\; -\frac{\kappa}{2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \kappa^2} \;=\; -\lambda \pm \mathrm{i}\tilde{\omega} \;.$$

   Wir erhalten also als spezielle Lösungen:

   $$\begin{aligned} f_+(t) \;&=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\tilde{\omega}t} \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}(\cos\tilde{\omega}t + \mathrm{i}\sin\tilde{\omega}t) \\ f_-(t) \;&=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{\omega}t} \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}(\cos\tilde{\omega}t - \mathrm{i}\sin\tilde{\omega}t) \;. \end{aligned}$$

Die Real- bzw. Imaginärteile dieser beiden Lösungen sind wieder linear abhängig, und die allgemeinste Lösung hat die Form

$$f(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t) \;=\; A\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin(\omega t + \varphi_0)\ .$$

Dies ist der typsische Fall eines gedämpften harmonischen Oszillators, wobei die rücktreibende Kraft groß genug ist, so daß es zu gedämpften Schwingungen kommt.

3. $\kappa^2 = 4\omega^2 \equiv 4\lambda^2$: Zunächst erhalten wir nur eine Lösung aus der algebraischen Gleichung:

$$k \;=\; -\lambda\ .$$

Die Tatsache, daß es sich dabei um eine doppelte Nullstelle der quadratischen Gleichung handelt, ändert leider nichts daran, daß wir zunächst nur eine Lösung der Differentialgleichung finden:

$$f(t) \;=\; A\mathrm{e}^{-\lambda t}\ .$$

Andererseits wissen wir aus physikalischen Gründen, daß es sich bei diesem System um einen gedämpften ($\lambda > 0$) harmonischen Oszillator handelt, und wir erwarten, sowohl den Ort wie auch die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgeben zu können. Auch die Mathematik sagt uns, daß es zwei linear unabhängige Lösungen geben muß.

Einen ersten Hinweis darauf, daß wir mit dem Exponentialansatz nicht alle Lösungen gefunden haben, erhalten wir, wenn wir $\lambda = 0$ setzen. Das führt uns auf die kräftefreie Bewegung mit der Lösung $f(t) = a + bt$. Diese Lösung läßt sich nicht als Exponentialfunktion darstellen.

Ein anderer Trick hilft uns, die fehlende Lösung zu finden: Wir betrachten zunächst die Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators mit $2\tilde{\omega} = \sqrt{4\omega^2 - \kappa^2} \neq 0$:

$$f_{\tilde{\omega}}(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}(a\cos\tilde{\omega}t + b\sin\tilde{\omega}t)\ .$$

Wir lösen nun das Anfangswertproblem $f(0) = x_0$ und $\dot{f}(0) = v_0$, was uns auf die Koeffizienten

$$a = x_0 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{\tilde{\omega}}(v_0 + \lambda x_0)$$

führt. Die Lösung lautet also:

$$f_{\tilde{\omega}}(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(x_0\cos\tilde{\omega}t + (v_0 + \lambda x_0)\frac{\sin\tilde{\omega}t}{\tilde{\omega}}\right)\ .$$

Nun betrachten wir den Grenzfall $\tilde{\omega} \to 0$:

$$\lim_{\tilde{\omega}\to 0} f_{\tilde{\omega}}(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}[x_0 + (v_0 + \lambda x_0)t]\ . \tag{5.9}$$

Wir sehen, daß in der Klammer ein in t linearer Term übrigbleibt. Tatsächlich erhalten wir für $\lambda = 0$ wieder die Lösung der kräftfreien Bewegung. Außerdem kann man sich überzeugen, daß die angegebene Funktion tatsächlich die Bewegungsgleichung löst. Die folgenden beiden speziellen Funktionen sind also die Lösungen in diesem Fall:

$$f_1(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad \text{und} \quad f_2(t) \;=\; t\mathrm{e}^{-\lambda t} \;.$$

5.5 Zwischenkapitel

5.5.1 Darstellungen der Translationsgruppe

Ganz allgemein hat die Differentialgleichung

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\right) f(t) \;=\; 0$$

N linear unabhängige spezielle Lösungen, die wir mit $\{f_i(t)\},\ i = 1, \ldots N$ bezeichnen. Mit jeder Lösung $f(t)$ der Differentialgleichung ist auch die Funktion $(P_a f)(t) = f(t-a)$ Lösung der Differentialgleichung, d.h. sie muß sich in die speziellen Lösungen entwickeln lassen. Insbesondere gilt:

$$f_i(t-a) \;=\; \sum_j P_{ij}(a) f_j(t) \;.$$

Die Matrizen $P_{ij}(a)$ bilden eine Darstellung der Translationsgruppe auf dem Raum der Lösungen:

$$P_{ij}(a+b) \;=\; \sum_k P_{ik}(a) P_{kj}(b) \;.$$

Die einfachsten Darstellungen der Translationsgruppe sind eindimensional, d.h. die Matrizen $P_{ij}(a)$ haben Diagonalgestalt:

$$P_{ij}(a) \;=\; \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{k_1 a}, \mathrm{e}^{k_2 a}, \ldots, \mathrm{e}^{k_N a}\right) \;.$$

Dies ist gerade der Fall, wenn die Nullstellen der charakteristischen Gleichung

$$\sum_n a_n k^n \;=\; \prod_n (k - k_n) \;=\; 0$$

verschieden sind, d.h. sämtliche Lösungen $f_i(t) = \mathrm{e}^{k_i t}$ linear unabhängig sind.

Sind jedoch einige der k_i gleich, so haben wir gesehen, daß es noch andere Lösungen gibt. In diesem Fall kann es sein, daß die Darstellungen der Translationsgruppe $P_{ij}(a)$ nicht voll reduzierbar sind. Betrachten wir als Extremfall die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}t^N} f(t) \;=\; 0 \;,$$

mit den linear unabhängigne Lösungen:

$$f_i(t) \;=\; t^{i-1} \qquad i = 1, \ldots, N \;.$$

Die Darstellung der Translationsgruppe auf diesem Lösungsraum ist:

$$P(a) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 \\ a^k & ka^{k-1} & \ldots & \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} a^{k-l} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a^{N-1} & (N-1)a^{N-2} & \ldots & & (N-1)a & 1 \end{pmatrix} .$$

Diese Darstellung ist nicht irreduzibel, da Unterräume in sich selber abgebildet werden. Aber sie läßt sich auch nicht weiter zerlegen, d.h., sie ist nicht voll reduzierbar.

5.5.2 Lösung der Differentialgleichungen in Matrix-Form

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega^2 \right) f(t) \;=\; 0 \;.$$

Wir schreiben diese Differentialgleichung zunächst als Differentialgleichung 1. Ordnung mit $\dot{f} = g$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \;.$$

Die Matrix Λ,

$$\Lambda \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\lambda \end{pmatrix} \;,$$

besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ und läßt sich als Summe von zwei zueinander senkrechten Projektionsoperatoren $P_\pm$ auf die zugehörigen Eigenvektoren schreiben:

$$\Lambda \;=\; \lambda_+ P_+ \;+\; \lambda_- P_- \;,$$

wobei

$$P_+ \;=\; \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ \lambda_+\lambda_- & -\lambda_+ \end{pmatrix} \qquad P_- \;=\; \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} \lambda_+ & -1 \\ \lambda_+\lambda_- & -\lambda_- \end{pmatrix} \;,$$

mit

$$P_+^2 = P_+ \qquad P_-^2 = P_- \qquad P_+P_- = P_-P_+ = 0 \qquad P_+ + P_- = \mathbb{1} \ .$$

Der Ausdruck „zueinander senkrecht“ bezieht sich auf die letzten beiden Eigenschaften. Die Projektionsoperatoren sind jedoch im allgemeinen keine orthogonalen Matrizen.

Jeder Projektionsoperator auf einen Vektor $\vec{x}$ läßt sich in der Form

$$P \ = \ \frac{1}{x_1y_2 - x_2y_1} \begin{pmatrix} x_1y_2 & -x_1y_1 \\ x_2y_2 & -x_2y_1 \end{pmatrix} \ = \ \frac{1}{\vec{x}\cdot\vec{y}_\perp} \left(\vec{x} \otimes \vec{y}_\perp^T\right)$$

schreiben. Hierbei ist $\vec{y}$ ein beliebiger (von $\vec{x}$ linear unabhängiger) Vektor, entlang dessen Richtung die Projektion auf $\vec{x}$ erfolgt, d.h. $P\vec{y} = 0$. $\vec{y}_\perp$ ist der auf $\vec{y}$ senkrechte Vektor, d.h. $(y_\perp)_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}(y_\perp)_\beta$ und $\vec{y}^T$ ist der transponierte Vektor.

In N Dimensionen gilt folgende Verallgemeinerung obiger Formel: Seien $\{\vec{v}_i\}, i = 1, \ldots, N$ linear unabhängige Vektoren und $\{\vec{\omega}_i\}$ die dazu dualen Vektoren, d.h. $(\vec{\omega}_i, \vec{v}_j) = \delta_{ij}$. Dann ist

$$P_i \ = \ (\vec{v}_i \otimes \vec{\omega}_i)$$

ein Satz von Projektionsoperatoren mit folgenden Eigenschaften:

$$P_i^2 = P_i \qquad P_iP_j = P_jP_i = 0 \ \ (i \neq j) \qquad \sum_i P_i = \mathbb{1} \ .$$

P_i ist Projektor auf $\vec{v}_i$ entlang der Hyper-Ebene, die von allen $\vec{v}_j$ $(j \neq i)$ aufgespannt wird, d.h. der Kern vonP_i sind alle $\vec{v}$ mit $(\vec{\omega}_i, \vec{v}) = 0$.

Außerdem gibt es zu jeder Matrix A mit Eigenwerten $\{\lambda_i\}$, für die die geometrische Entartung gleich der algebraischen Entartung ist, einen Satz von Projektionsoperatoren $\{P_i\}$ mit $P_i^2 = P_i$, $P_iP_j = P_jP_i = 0$ $(i \neq j)$, $\sum_i P_i = \mathbb{1}$, so daß $A = \sum_i \lambda_i P_i$ (Spektralzerlegung von A).

Damit folgt

$$\mathrm{e}^{\Lambda t} \ = \ \mathrm{e}^{\lambda_+ t}P_+ \ + \ \mathrm{e}^{\lambda_- t}P_- \ ,$$

und wir erhalten als Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} \ = \ \left[\mathrm{e}^{\lambda_+ t}P_+ \ + \ \mathrm{e}^{\lambda_- t}P_-\right] \begin{pmatrix} f(0) \\ \dot{f}(0) \end{pmatrix} \ .$$

Die beiden Projektionsoperatoren wurden dabei so gewählt, daß P_+ Eigenvektor $\vec{y}_+$ zu λ_+ projiziert, und zwar entlang $\vec{y}_-$, d.h. $P_+\vec{y}_- = 0$. Entsprechend projiziert P_- auf $\vec{y}_-$ mit $P_-\vec{y}_+0$.

Diese Wahl von zueinander senkrechten Projektionsoperatoren ist nicht mehr möglich, wenn $\lambda_+ = \lambda- \equiv -\lambda$. Der Eigenwert ist in diesem Fall algebraisch 2-fach entartet, geometrisch jedoch einfach, d.h. der zugehörige Eigenraum ist nur 1-dimensional. In diesem Fall läßt sich Γ als Summe aus der Einheitsmatrix und einer nillpotenten Matrix Ψ mit $\Psi^2 = 0$ schreiben:

$$\Gamma \ = \ -\lambda(\mathbb{1} + \Psi) \qquad \Psi \ = \ -\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -\lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix} \ .$$

Wegen $\Psi^2 = 0$ folgt:

$$\Gamma^n \;=\; (-\lambda)^n(\mathbb{1} + n\Psi) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{e}^{\Gamma t} \;=\; \mathrm{e}^{-\lambda t}(\mathbb{1} - \lambda t\Psi) \;,$$

was ebenfalls auf die oben gefundene Lösung (5.9) führt.

Alternativ kann man Γ auch als Summe zweier Projektionsoperatoren P_1 und P_2 darstellen, wobei das Bild von P_1 im Kern von P_2 liegt, d.h. $P_2P_1 = 0$. Allerdings ist $P_1P_2 = \Psi \neq 0$:

$$\Gamma \;=\; -\lambda(P_1 + P_2) \qquad P_1^2 = P_1 \;,\;\; P_2^2 = P_2 \;,\;\; P_2P_1 = 0 \;,$$

mit

$$P_1 \;=\; -\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \qquad P_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \;.$$

P_1 ist Projektionsoperator auf den Eigenvektor von Γ. Dieser Eigenvektor wiederum ist der Kern von P_2.

Kapitel 6

Distributionen und Greensche Funktionen

6.1 Vorbemerkungen

Im nächsten Kapitel wollen wir den harmonischen Oszillator mit einer äußeren Kraft untersuchen. Im ungedämpften Fall haben wir also eine Differentialgleichung der Form

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\right) f(t) \;=\; K(t) \tag{6.1}$$

zu lösen. Formal hat diese Gleichung die Gestalt:

$$\mathcal{L} f \;=\; K \;. \tag{6.2}$$

Ebenso formal möchte man nun gerne „das Inverse“ von $\mathcal{L}$ finden, so daß die Lösung lautet:

$$f \;=\; \mathcal{L}^{-1} K \;. \tag{6.3}$$

Das Inverse ist dabei definiert durch die Bedingung:

$$\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} \;=\; \mathbb{1} \;. \tag{6.4}$$

Überlegen wir uns kurz die Analogie zur Matrizenschreibweise. In der linearen Algebra entspräche (6.2) einer Gleichung der Form:

$$\sum_i L_{ij} f_j \;=\; K_i \;,$$

mit der Lösung analog zu (6.3)

$$f_i \;=\; \sum_j (L^{-1})_{ij} K_j \;.$$

Hierbei ist das Inverse der Matrix L durch die Gleichung

$$\sum_k L_{ik}(L^{-1})_{kj} \;=\; \delta_{ij}$$

definiert, was Gleichung (6.4) entspricht.

Grundsätzlich können wir auch bei Differentialoperatoren von „Inversen“ sprechen, obwohl in diesem Zusammenhang der Ausdruck *Greensche Funktion* gebräuchlicher ist. Bevor wir aber das Problem des harmonischen Oszillators mit äußeren Kräften behandeln, wollen wir die obigen Überlegungen konkretisieren. Wir müssen uns dazu überlegen, was eigentlich „lineare Operationen“ auf Räumen von Funktionen sind, was die Identitätsabbildung $\mathbb{1}$ in Gleichung (6.4) bzw. δ_{ij} bei Funktionen zu bedeuten hat und somit durch welche mathematisch wohldefinierte Vorschrift Gleichung (6.4) zu ersetzen ist.

Wir werden dabei eine Struktur finden, die in folgender Tabelle zusammengefaßt ist:

	lineare Algebra	Funktionalanalysis
Vektoren	$\vec{v} \in V$	f
Komponenten von Vektoren	$v_i \in \mathbb{R}$	$f(x) \in \mathbb{R}$
Dualer Vektorraum	$V^* = \{\vec{\omega} : V \to \mathbb{R}\}$	$\{g : \{f\} \to \mathbb{R}\}$
Komponentenschreibweise	$(\vec{\omega}, \vec{v}) = \sum_i \omega_i v_i$	$(g, f) = \int g(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x$
Speziell i-te Komponente	$\vec{v} \to v_i = \sum_j \delta_{ij} v_j$	$f \to f(x_0) = \int \delta(x - x_0) f(x)\, \mathrm{d}x$
Lineare Abbildungen	$L\vec{v} \simeq \sum_j L_{ij} v_j$	$\mathcal{L}f \simeq \int L(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y$
Differentialoperatoren		$\mathcal{L}_x f(x) = \sum_n a_n \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$
Identität	$v_i \;=\; \sum_j \delta_{ij} v_j$	$f(x) = \int \delta(x - y) f(y)\, \mathrm{d}y$
Inverse Abbildung	$\sum_k L_{ik} L^{-1}_{kj} = \delta_{ij}$	$\int \mathrm{d}z L(x,z) L^{-1}(z,y) = \delta(x - y)$
Greensche Funktion		$\mathcal{L}_x G(x,y) \;=\; \delta(x - y)$
Lösung von $\mathcal{L}f = K$	$f_i = \sum_j (L^{-1})_{ij} K_j$	$f(x) = \int G(x,y) K(y)\, \mathrm{d}y$

Ziel dieses Kapitels ist es, diese Tabelle zu erläutern.

6.2 Funktionenräume als Vektorräume

Wir haben bei der Behandlung des harmonischen Oszillators erwähnt, daß die Bewegungsgleichung „linear“ ist, d.h. mit $f_1(t)$ und $f_2(t)$ ist auch $\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Dabei haben wir implizit vorausgesetzt, daß man Funktionen

(punktweise) addieren und mit reellen (oder komplexen) Zahlen multiplizieren kann. In diesem Sinne bilden Funktionen also einen Vektorraum. Wir müssen allerdings genauer spezifizieren, welche Klassen von Funktionen wir zulassen. Je nachdem unterscheidet man verschiedene Funktionenräume.

Beispielsweise können wir verlangen, daß die Funktionen außerhalb eines kompakten Gebietes verschwinden. Die Eigenschaft wird von der Linearität respektiert. Wir können aber im allgemeinen nicht verlangen, daß die Funktionen an einem bestimmten Punkt x_0 einen bestimmten Wert f_0 annehmen, es sei denn $f_0 = 0$. Anderenfalls wäre der entsprechende Raum kein Vektorraum.

Für die weiteren Überlegungen ist es sinnvoll anzunehmen, daß die Funktionen beliebig oft differenzierbar sind, und auch die Integrale für alle Ableitungen existieren. Dazu ist es notwendig, daß die Funktionen für $x \to \pm\infty$ genügend rasch verschwinden. Wir werden im folgenden verlangen, daß sämtliche Ableitungen der Funktionen existieren, und daß die Funktionen sowie ihre Ableitungen für große x schneller als jede Potenz verschwinden (d.h. $\lim_{x\to\pm\infty} x^n f(x) = 0$). Solche Funktionen bezeichnet man auch als *Testfunktionen*. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist die Gaußkurve:

$$f(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x^2} \;.$$

Testfunktionen bilden einen Vektorraum, d.h. sie lassen sich beliebig addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren, ohne daß sie ihre Eigenschaft als Testfunktionen verlieren. Man kann sich leicht überlegen, daß es unendlich viele linear unabhängige Testfunktionen gibt, d.h. der Vektorraum der Testfunktionen ist unendlichdimensional.

Die Bezeichnung $f(x)$ kann zweierlei bedeuten, was im folgenden jedoch begrifflich unterschieden werden sollte: Entweder ist damit die Funktion f gemeint (d.h. ein Element des Funktionenraums), oder der Wert dieser Funktion (d.h. eine reelle Zahl) an einer speziellen Stelle x. Ganz entsprechend sollte man bei gewöhnlichen Vektoren auch zwischen dem Vektor $\vec{x}$ und seinen Komponenten x_i unterscheiden.

6.3 Distributionen

Distributionen sind lineare Abbildungen von einem Testfunktionenraum in die reellen Zahlen. (Bei komplexen Testfunktionen betrachtet man auch lineare Abbildungen in die komplexen Zahlen, was hier jedoch nicht untersucht werden soll).

Bevor wir Folgerungen aus dieser Definition ziehen und Beispiele geben, soll das Konzept der Distributionen an Hand eines physikalischen Beispiels motiviert werden. Dieses Beispiel war tatsächlich der Ausgangspunkt für die Theorie der Distributionen. Angenommen, wir möchten die Ladungsverteilung $\delta(x)$ (daher auch der Name „Distribution“ — es handelt sich um verallgemeinerte „Verteilungen“) einer Punktladung am Ort $x = 0$ beschreiben. Die Einheiten seien so gewählt, daß die Ladungsmenge

1 ist. Da sich außerhalb dieses Punktes keine Ladung befindet, müssen wir

$$\rho(x) \;=\; 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

verlangen. Andererseits sollte aber auch für die Gesamtladung in einem Volumen, das $x = 0$ enthält, gelten:

$$\int \rho(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 1 \;.$$

Beide Eigenschaften zusammen lassen sich von einer gewöhnlichen Funktion (und der gewöhnlichen Definition des Integrals) nicht erfüllen. Auch die häufig zu lesende Eigenschaft $\delta(0) = \infty$ ist eher irreführend. (Erweitert man die reellen — bzw. noch häufiger die komplexen — Zahlen um ∞, so gibt es für ∞ Rechenregeln wie für die 0, insbesondere gilt $\infty = 2\infty$, was aber bei der δ-Funktion nicht der Fall ist.)

Glücklicherweise benötigen wir den Wert der „δ-Funktion“ an der Stelle Null nicht. Was wir benötigen ist folgende Eigenschaft:

$$\int \delta(x) f(x)\,\mathrm{d}y \;=\; f(0) \;. \tag{6.5}$$

Dies faßt beide obigen Eigenschaften zusammen: Falls f seinen Träger außerhalb der 0 hat, so verschwindet das Integral, was gleichbedeutend mit der Bedingung $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ ist.

Gleichung (6.5) ist sicherlich nur ein formaler Ausdruck, denn einerseits haben wir gesehen, daß es sich bei $\delta(x)$ nicht um eine Funktion handelt, und andererseits kann daher die Integration nicht im Riemannschen oder Lebesgueschen Sinne zu verstehen sein. Noch besser sollte man von einer Zuordnung bzw. Abbildung sprechen:

$$(\delta, f) \;=\; f(0) \;. \tag{6.6}$$

Der Funktion f wird ihr Wert an der Stelle $x = 0$ zugeordnet. Diese Abbildung ist linear:

$$(\delta, \alpha f_1 + \beta f_2) \;=\; \alpha(\delta, f_1) + \beta(\delta, f_2) \;=\; \alpha f_1(0) + \beta f_2(0) \;.$$

In diesem Sinne ist die δ-Funktion eine lineare Abbildung auf dem Funktionenraum.

Wir wollen nun die obigen Konzepte verallgemeinern. Distributionen wurden definiert als lineare Abbildungen vom Raum der Testfunktionen in die reellen Zahlen. Überlegen wir uns zunächst ein paar Beispiele von solchen linearen Abbildungen.

- Ein einfaches Beispiel haben wir im Zusammenhang mit der δ-Funktion gerade kennengelernt: $\delta : f \to f(0)$ ist eine lineare Abbildung, die einer Funktion eine reelle Zahl zuordnet.

- Die Stelle $x = 0$ ist natürlich in keiner Weise ausgezeichnet. D.h. wir können einer Funktion auch ihren Wert an einer anderen Stelle x_0 zuordnen:

$$f \;\to\; (\delta_{x_0}, f) \;=\; f(x_0)\;. \tag{6.7}$$

  Formal können wir das mit der δ-Funktion auch als Integral schreiben:

$$(\delta_{x_0}, f) \;=\; \int \delta(x - x_0) f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x_0)\;. \tag{6.8}$$

- Das Integral einer Funktion

$$f \;\to\; \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

  ist ein weiteres Beispiel. Die Linearität dieser Abbildung ist offensichtlich, und da wir für die Funktionen f zunächst nur Testfunktionen zulassen, existiert dieses Integral auch im üblichen Sinne.

- Für jede (integrierbare) Funktion $\omega(x)$ ist die Abbildung

$$f \;\to\; (\omega, f) \;=\; \int \omega(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.9}$$

  ebenfalls eine lineare Abbildung in die reellen Zahlen.

- Als letztes Beispiel betrachten wir noch die folgende Abbildung:

$$f \;\to\; f'(0) \;=\; \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}\;. \tag{6.10}$$

  Auch hier ist die Linearität leicht nachgewiesen.

Beginnen wir unsere Diskussion mit Gleichung (6.9). Jede integrierbare Funktion definiert durch das Integral eine lineare Abbildung auf dem Raum der Testfunktionen. Insbesondere sind die Testfunktionen selber integrierbar, d.h. jede Testfunktion kann auch in diesem Sinne als Distribution fungieren. Aber der Raum der Distributionen ist offensichtlich viel größer. Dies ist ein erster Unterschied zu endlich dimensionalen Vektorräumen: Die dualen Vektorräume sind nicht notwendigerweise isomorph zu den Vektorräumen selber.

„Jede integrierbare Funktion“ schließt beispielsweise auch Potenzen $\omega(x) = x^n$ mit ein (daher mußten wir annehmen, daß die Testfunktionen im Unendlichen stärker als jede Potenz verschwinden). Auch nichtsteige Funktionen sind meist integrabel. Ein bekanntes Beispiel ist die Heaviside-Funktion:

$$\Theta(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}\;.$$

Der genaue Wert für $x = 0$ spielt keine Rolle, wird aber oft zu $1/2$ gesetzt. Als Distribution ist die Heaviside-Funktion folgendermaßen definiert:

$$f \;\to\; (\Theta, f) \;=\; \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Die Integralschreibweise ist nicht nur der Indexschreibweise bei endlichen Vektorräumen sehr ähnlich,

$$(\omega, f) \;=\; \int \omega(x) f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{\omega}, \vec{v}) \;=\; \sum_i \omega_i v_i \;,$$

sondern sie ist auch als suggestive Form für eine lineare Abbildung so einprägsam, daß man versuchen möchte, *jede* Distribution in dieser Form auszudrücken. Wir haben schon gesehen, wie das für die δ-Funktion und ihre Verallgemeinerung δ_{x_0} möglich ist (vgl. Gleichung (6.7)). Bis auf das letzte Beispiel in unserer obigen Liste können wir daher alle Distributionen formal als Integrale schreiben. Man spricht daher auch oft von *verallgemeinerten Funktionen*. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß dies auch für das letzte der Beispiele zutrifft.

6.4 Rechenregeln für Distributionen

Die Sprechweise, daß es sich bei Distributionen um verallgemeinerte Funktionen handelt, legt nahe, daß wir mit Distributionen ähnlich „rechnen“ dürfen, wie mit Funktionen. Dies ist jedoch nur in einem eingeschränkten Sinne richtig.

Distributionen bilden wieder einen Vektorraum, d.h. sie lassen sich addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren. Dies gilt immer für duale Vektorräume:

$$(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, f) \;=\; \alpha(\omega_1, f) + \beta(\omega_2, f) \;.$$

Die Integralschreibweise respektiert diese Eigenschaft:

$$\int (\alpha\omega_1(x) + \beta\omega_2(x)) f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \alpha \int \omega_1(x) f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \beta \int \omega_2(x) f(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Nicht definiert hingegen ist die Multiplikation von Distributionen. Es macht keinen Sinn, von $\delta(x)^2$ zu sprechen. Während für die Testfunktionen also eine allgemeinere mathematische Struktur definiert ist, nämlich die punktweise Multiplikation, die den Vektorraum der Testfunktionen zu einer (kommutativen, assoziativen) Algebra macht, ist für Distributionen zunächst keine Multiplikation möglich.

Wir wollen nun definieren, wie man Distributionen ableitet. Dazu gehen wir wieder von Gleichung (6.9) aus. Zu jeder integrierbaren und ableitbaren Funktion $\omega(x)$ können wir auch $\mathrm{d}\omega(x)/\mathrm{d}x$ bilden, und es gilt:

$$(\omega', f) \;=\; \int \frac{\mathrm{d}\omega(x)}{\mathrm{d}x} f(x)\,\mathrm{d}y \;=\; -\int \omega(x) \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \;=\; -\,(\omega, f') \;. \tag{6.11}$$

Diese Eigenschaft bildet die *Definition der Ableitung einer Distribution*. Insbesondere gilt für die δ-Funktion:

$$(\delta', f) \;=\; -(\delta, f') \;=\; -f'(0) \; .$$

Damit haben wir auch die letzte lineare Abbildung aus unserer obigen Liste durch eine Operation auf der δ-Funktion ausgedrückt. Formal schreibt man auch:

$$-\int \delta'(x - x_0) f(x) \, \mathrm{d}x \;=\; f'(x_0) \; .$$

Die Ableitungen von Distributionen sind durch die partielle Integration, bzw. allgemeiner die Relation (6.11) definiert.

Wir wollen die obigen Rechenregeln anwenden, um die Ableitung der Heaviside-Funktion zu berechnen:

$$(\Theta', f) \;=\; -(\Theta, f') \;=\; -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x \;=\; -[f(\infty) - f(0)] \;=\; f(0) \; .$$

Die Ableitung der Heaviside Funktion ist somit die δ-Funktion:

$$\frac{\mathrm{d}\Theta(x)}{\mathrm{d}x} \;=\; \delta(x) \; .$$

Weiterhin läßt sich leicht zeigen, daß die Ableitung der stetigen Funktion

$$T(x) \;=\; \begin{cases} x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \; , \tag{6.12}$$

bzw. in der Distributionsschreibweise

$$(T, f) \;=\; \int_0^\infty x f(x) \, \mathrm{d}x \; ,$$

gerade die Heaviside-Funktion ergibt, die zweite Ableitung daher die δ-Funktion:

$$T'(x) \;=\; \Theta(x) \qquad T''(x) \;=\; \delta(x) \; . \tag{6.13}$$

Ein allgemeines Theorem aus der Theorie der Distributionen besagt, daß sich jede Distribution als Ableitung von stetigen Funktionen darstellen läßt.

6.5 Distributionen als Grenzwerte regulärer Funktionen

Obwohl die obigen Rechenregeln für Distributionen sehr einfach sind und meist leicher zum Ziel führen als andere Verfahren, ist es aus physikalischer Sicht manchmal sinnvoll,

Distributionen als Grenzwerte regulärer Funktionen zu verstehen. Dabei beschränken wir uns im wesentlichen auf die δ-Funktion.

Wir suchen Funktionen $D_\epsilon(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\int D_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{\epsilon\to 0} D_\epsilon(x) \;=\; 0 \quad \text{für } x \neq 0\ . \tag{6.14}$$

Drei solche Funktionen wollen wir hier angeben:

- Die Kastenfunktion:

$$D_\epsilon(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2\epsilon} & \text{für } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Gaußfunktion:

$$D_\epsilon(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\epsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{2\epsilon^2}\right)\ . \tag{6.15}$$

- Die Lorentz-Kurve:

$$D_\epsilon(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\ .$$

In allen drei Fällen lassen sich die obengenannten Bedingungen leicht nachweisen. Für jede Testfunktion $f(x)$ läßt sich auch beweisen, daß

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} D_\epsilon(x) f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x_0)\ .$$

In diesem Sinne läßt sich die δ-Funktion (und auch ihre Ableitungen) als Grenzwert von gewöhnlichen Integralen verstehen. Allerdings ist die explizite Auswertung solcher Integrale oft schwierig.

In ähnlicher Weise ist auch die Heaviside-Funktion Grenzwert von stetigen Funktionen, beispielsweise:

$$\Theta_\epsilon(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2}\ .$$

Die Ableitung dieser Funktion ist die Lorentz-Kurve. Die meisten „Regularisierungen“ dieser Art ergeben für $x = 0$ den Wert $1/2$.

6.6 Lineare Abbildungen auf dem Funktionenraum

In den letzten Abschnitten haben wir Distributionen als lineare Abbildungen vom Funktionenraum in die reellen Zahlen kennengelernt. Nun wollen wir lineare Abbildungen vom Funktionenraum in sich selber untersuchen. Zunächst wieder ein paar Beispiele:

- Die Identitätsabbildung:

$$f \;\to\; f \;. \tag{6.16}$$

- Multiplikation mit einer beliebigen Funktion g:

$$f \;\to\; gf \qquad f(x) \to [gf](x) = g(x)f(x) \;. \tag{6.17}$$

- Die Faltung mit einer beliebigen (integrierbaren) Funktion g:

$$f \;\to\; \tilde{f} \qquad \tilde{f}(x) \;=\; \int g(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \;. \tag{6.18}$$

- Die Integration über einen *Integralkern* $L(x,y)$:

$$f \;\to\; Lf \quad Lf(x) \;=\; \int L(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y \;. \tag{6.19}$$

- Die Anwendung eines Ableitungsoperators, beispielsweise:

$$f \;\to\; f'' \;=\; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f \qquad f''(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} \;. \tag{6.20}$$

In allen Fällen ist die Linearität der Abbildungen wiederum leicht nachgewiesen. Das Ergebnis — das Bild — der Abbildung ist diesmal jedoch eine Funktion.

Zunächst erkennen wir, daß Gleichung (6.18) ein Spezialfall von (6.19) ist. Wiederum erinnert (6.19) an eine Verallgemeinerung der Indexschreibweise bei linearen Abbildungen in endlich-dimensionalen Vektorräumen:

$$(L\vec{v})_i \;=\; \sum_j L_{ij}v_j \quad \Leftrightarrow \quad Lf(x) \;=\; \int L(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \;.$$

Tatsächlich können wir uns leicht davon überzeugen, daß sämtliche Beispiele in obiger Liste sich in dieser Form schreiben lassen, vorausgesetzt wir benutzen unsere Definition der Distributionen, die wir jetzt allerdings als Funktion eines weiteren Arguments auffassen. So gilt beispielsweise

$$f(x) \;=\; \int \delta(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \;.$$

Die Identitätsabbildung (6.16) wird also durch die δ-Funktion repräsentiert. Man vergleiche auch hier mit der Intexschreibweise in der linearen Algebra:

$$\delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \delta(x-y) \;.$$

Die Multiplikation mit einer beliebigen Funktion $g(x)$ läßt sich ebenfalls in dieser Form schreiben:

$$(gf)(x) \;=\; g(x)f(x) \;=\; \int g(y)\delta(x-y)\,f(y)\,\mathrm{d}y \;.$$

In diesem Fall hat der Kern die Form $L(x,y) = g(y)\delta(x-y)$. In einem gewissen Sinn ist dies die funktionale Form einer Diagonalmatrix:

$$A \;=\; \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \quad\Rightarrow\quad (A\vec{v})_i = \lambda_i v_i \;.$$

Auch den Ableitungsoperator können wir in dieser Form schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \;=\; \int \delta''(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y \;.$$

Man beachte hierbei, daß bei einer ungeraden Anzahl von Ableitungen genau anzugeben ist, auf welches Argument der δ-Funktion die Ableitung wirkt, beispielsweise ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x-y) \;=\; -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\delta(x-y) \;.$$

Nach unserer Definition der Ableitung der δ-Funktion gilt:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \;=\; \int \delta(x-y)\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y \;=\; -\int \frac{\mathrm{d}\delta(x-y)}{\mathrm{d}y}f(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int \frac{\mathrm{d}\delta(x-y)}{\mathrm{d}x}f(y)\,\mathrm{d}y \;.$$

Der Integrationskern zur Ableitung ist daher:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \;\simeq\; \frac{\mathrm{d}\delta(x-y)}{\mathrm{d}x} \;=\; -\frac{\mathrm{d}\delta(x-y)}{\mathrm{d}y} \;.$$

Im allgemeinen ist es nicht notwendig und auch nicht üblich, die speziellen linearen Abbildungen, die sich als Multiplikation mit einer Funktion (6.17) oder als Ableitungen (6.20) schreiben lassen, in die umständliche Integraldarstellung (6.19) zu bringen. Die bisherigen Überlegungen sollten nur zeigen, daß es prinzipiell möglich ist, lineare Abbildungen unter Zuhilfenahme von Distributionen auch als Integral über einen verallgemeinerten Integralkern zu schreiben. Außerdem wird dadurch die Definition der inversen Abbildung einsichtig.

6.7 Greensche Funktionen

Wir können nun den Formalismus der linearen Abbildungen anwenden und die inversen Abbildungen definieren. Gegeben sei ein Integralkern $L(x,y)$:

$$f \;\to Lf \equiv g \quad \text{mit} \quad g(x) \;=\; \int L(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \;.$$

Gesucht ist die Abbildung L^{-1}, so daß für $g = Lf$ gilt:

$$f \;=\; L^{-1}g \quad \text{mit} \quad f(z) \;=\; \int L^{-1}(z,y)g(y)\,\mathrm{d}y \;.$$

Wenden wir auf diesen Ausdruck die Abbildung L an, so folgt:

$$g(x) \;=\; \int L(x,z)f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int L(x,z)\int L^{-1}(z,y)g(y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \;.$$

Andererseits ist

$$g(x) \;=\; \int \delta(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \;.$$

Also muß gelten:

$$\int L(x,z)L^{-1}(z,y)\,\mathrm{d}z \;=\; \delta(x-y) \;. \tag{6.21}$$

Dies ist die Definitionsgleichung für die inverse Abbildung und gibt somit Gleichung (6.4) einen Sinn. Formal ist also $L \cdot L^{-1}$ — d.h. die Hintereinanderschaltung der Abbildung L^{-1} und L — die Identitätsabbildung. Man vergleiche (6.21) wiederum mit dem entsprechenden Ausdruck bei Matrizen:

$$\sum_k L_{ik}(L^{-1})_{kj} \;=\; \delta_{ij} \;.$$

Selbstverständlich hat $L^{-1}(x,y)$ im allgemeinen nichts mit der Funktion $1/L(x,y)$ zu tun, ebensowenig wie $(L^{-1})_{ij}$ nicht durch das Inverse der Matrixelemente $1/L_{ij}$ gegeben ist. Diese Eigenschaft gilt nur bei Diagonalmatrizen, d.h. in diesem Fall für die einfache Multiplikation mit einer Funktion $g(x)$ (vgl. Gleichung (6.17)).

Bei sogenannten Differential- oder Ableitungsoperatoren vereinfacht sich Gleichung (6.21) noch. Sei $\mathcal{L}_x$ ein allgemeiner Differentialoperator:

$$\mathcal{L}_x \;=\; \sum_n a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \;,$$

dann ist der Integrationskern dazu durch

$$L(x,y) \;=\; \mathcal{L}_x\delta(x-y)$$

gegeben, und (6.21) wird zu:

$$\int L(x,z)G(z,y)\,\mathrm{d}z \;=\; \mathcal{L}_xG(x,y) \;=\; \delta(x-y) \;.$$

Entsprechend der üblichen Notation haben wir den inversen Operator zu einem Differentialoperator — die sogenannte *Greensche Funktion* — mit $G(x,y)$ bezeichnet. Die

Greensche Funktion zu einem Differentialoperator $\mathcal{L}_x$ erfüllt also die Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_x G(x,y) \;\equiv\; \sum_n a_n(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\, G(x,y) \;=\; \delta(x-y)\;. \tag{6.22}$$

Haben wir also eine Differentialgleichung der Form

$$\mathcal{L}_x f(x) \;\equiv\; \sum_n a_n(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\, f(x) \;=\; K(x)$$

gegeben, so lautet die Lösung dieser Differentialgleichung, ausgedrückt durch die Greensche Funktion zum Operator $\mathcal{L}_x$:

$$f(x) \;=\; \int G(x,y) K(y)\, \mathrm{d}y\;.$$

In diesem Sinne kann man Greensche Funktionen als das „Inverse“ eines Differentialoperators auffassen.

Obwohl die bisherigen Überlegungen sich auf Funktionen in einer Variablen bezogen, gelten ganz entsprechende Beziehungen auch für Funktionen in mehreren Variablen und für Differentialoperatoren mit partiellen Ableitungen.

6.8 Die Randbedingungen für Greensche Funktionen

Wir haben uns bisher keine Gedanken darüber gemacht, ob die inverse Abbildung L^{-1} zu einer gegebenen linearen Abbildung L überhaupt existiert. In der linearen Algebra gibt es ein einfaches Kriterium, wann es zu einer Matrix L_{ij} auch die inverse Matrix L^{-1} gibt: Notwendige und hinreichende Bedingung ist, daß die Determinante von Null verschieden ist. Diese Aussage ist äquivalent zu der Aussage, daß das Gleichungssystem

$$L\vec{v} \;=\; 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_j L_{ij} v_j \;=\; 0$$

keine nichttrivialen Lösungen (d.h. mit $\vec{v} \neq 0$) besitzt. Gibt es solche Lösungen, so ist der Rang der Matrix L nicht maximal, d.h. es gibt lineare Unterräume des Vektorraums, die auf die 0 abgebildet werden. Die Abbildung L ist also nicht injektiv, und da es sich um eine lineare Abbildung handelt auch nicht surjektiv. Es gibt daher keine Umkehrabbildung als Abbildung $V \to V$.

Trotzdem können wir Gleichungen der Form

$$L\vec{v} \;=\; \vec{k} \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_j L_{ij} v_j \;=\; k_i$$

unter bestimmten Bedingungen lösen. Voraussetzung ist, daß der Vektor $\vec{k}$ im Bild der Abbildung L liegt. Ist dies der Fall, gibt es nicht nur eine Lösung, sondern jeder Vektor der Form

$$\vec{v}' \;=\; \vec{v} + \vec{v}_0$$

mit

$$L\vec{v} = \vec{k} \quad \text{und} \quad L\vec{v}_0 = 0$$

ist ebenfalls eine Lösung. Zu jeder speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung können wir also eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung addieren.

Überlegen wir uns nun, wie sich die vorherigen Resultate auf Greensche Funktionen übertragen. Wenn wir eine inhomogene Differentialgleichung der Form

$$\mathcal{L}_x f(x) \;=\; K(x)$$

lösen wollen, und

$$\mathcal{L}_x f(x) \;=\; 0$$

Lösungen besitzt, so werden zwei Dinge zu beachten sein:

- Möglicherweise ist nicht jede Funktion $K(x)$ im Bildraum der Abbildung $\mathcal{L}_x$. Zu manchen äußeren Kräfte gibt es daher keine (regulären) Lösungen. Wir werden Beispiele dafür kennenlernen.

- Zu jeder speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir weitere Lösungen, indem wir die Lösungen der homogenen Gleichungen addieren. Sei f_{k} Lösung der inhomogenen Gleichung,

  $$\mathcal{L}_x f_{\mathrm{k}}(x) \;=\; K(x)\ ,$$

  und seien $\{f_i(x)\}$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichungen,

  $$\mathcal{L}_x f_i(x) \;=\; 0\ ,$$

  so ist die allgemeinste Lösung der inhomogenen Gleichung von der Form:

  $$f(x) \;=\; f_{\mathrm{k}}(x) \;\sum_i \alpha_i f_i(x)\ .$$

  Durch die Wahl geeigneter Rand- oder Anfangsbedingungen werden die Koeffizienten α_i festgelegt.

6.9 Zwischenkapitel: Inverse Operatoren zu Abbildungen mit Nullmoden

Sei $L : V \to V$ eine lineare Abbildung auf einem Vektorraum V, V_0 der Kern dieser Abbildung, d.h. $L(V_0) = 0$, und $L(V) = V_1 \subset V$ das Bild von L. Bei endlich dimensionalen Vektorräumen gilt dann $\dim(V_0) + \dim(V_1) = \dim(V)$. Sei weiterhin P ein Projektionsoperator auf den Vektorraum V_1, d.h. $P^2 = P$ und $P(V) = V_1$. Gesucht ist eine Abbildung L^{-1} mit

$$L \circ L^{-1} \;=\; P \; . \tag{6.23}$$

Mehr können wir nicht verlangen, denn da $L(V) = V_1$, kann auch das Bild von $L \circ L^{-1}$ nur V_1 sein. Für Vektoren aus V_1, also in dem Bild von L, soll $L \circ L^{-1}$ die Identitätsabbildung sein.

L^{-1} ist durch diese Bedingung nicht festgelegt, denn jede lineare Abbildung $A : V \to V$ deren Bild gleich dem Kern von L ist, d.h. $A(V) = V_0$, kann zu L^{-1} addiert werden:

$$L_A^{-1} \;=\; L^{-1} + A \; .$$

L_A^{-1} erfüllt ebenfalls die Bedingung (6.23). Außerdem gibt es mehrere Projektionsoperatoren auf den Vektorraum V_1, so daß L^{-1} auch von der Wahl von P abhängt. Wir betrachten hierzu ein einfaches Beispiel.

Für $\lambda \neq 0$ sei

$$L \;=\; \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad V_0 \;=\; \{(0,y)\} \;\text{ und }\; V_1 \;=\; \{(x,0)\} \; .$$

Eine allgemeine Abbildung A mit $A(V) = V_0$ und ein allgemeiner Projektionsoperator P_α auf V_1 sind:

$$P_\alpha \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \; .$$

Zu einem gegebenen P_α ist die allgemeinste Lösung zu $L \circ L^{-1} = P_\alpha$ gegeben durch:

$$L^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{\alpha}{\lambda} \\ a & b \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{\alpha}{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;+\; A \; .$$

Man erkennt die Abhängigkeit von L^{-1} von α wie auch die verbleibende Freiheit der Wahl von a, b. Insbesondere kann L^{-1} durchaus bijektiv sein, obwohl L selber nicht bijektiv ist.

Kapitel 7

Lineare Systeme mit äußeren Kräften

Wir wollen in diesem Kapitel die Theorie der Greenschen Funktionen auf veschiedene Differentialgleichungen anwenden. Im Vordergrund stehen dabei Bewegungsgleichungen für Massenpunkte mit äußeren (ortsunabhängigen) Kräften in der klassischen Mechanik. Ganz allgemein werden wir folgendes „Kochrezept“ anwenden:

Gegeben ist eine Differentialgleichung mit Differentialoperator $\mathcal{L}_t$:

$$\mathcal{L}_t x(t) \;=\; K(t) \;.$$

Wir suchen zunächst die Greensche Funktion zu $\mathcal{L}_t$, d.h.

$$\mathcal{L}_t G(t-t') \;=\; \delta(t-t') \;,$$

und die Lösung ist dann durch

$$x(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} G(t-t')K(t')\,\mathrm{d}t' \;+\; x_0(t)$$

gegeben, wobei $x_0(t)$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

7.1 Differentialgleichung 1. Ordnung

Beginnen wir die Anwendung der Theorie der Greenschen Funktionen mit einem sehr einfachen Beispiel, der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \;=\; g(t) \;.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist bekannt:

$$f(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} g(t')\,\mathrm{d}t' \;+\; f(t_0)\;.$$

Wir wollen nun sehen, wie man diese Lösung mit Hilfe des Formalismus der Greenschen Funktionen erhält. Zunächst haben wir die Greensche Funktion zum Ableitungsoperator zu bestimmen. Diese ist aber bekannt, es ist die Heaviside-Funktion:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta(t-t') \;=\; \delta(t-t')\;.$$

Damit ergibt sich die Lösung der obigen Differentialgleichung zu

$$f(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(t-t')g(t')\,\mathrm{d}t' \;=\; \int_{-\infty}^{t} g(t')\,\mathrm{d}t'\;.$$

Offensichtlich stimmen die beiden Ergebnisse überein, insbesondere wenn man noch berücksichtigt, daß wir eine Konstante (als Lösung der homogenen) Gleichung addieren können.

Man beachte, daß die Heaviside-Funktion außerhalb des Punktes $t = t_0$ konstant ist, also eine Lösung der homogenen Differentialgleichung darstellt. Ganz allgemeine erfüllen Greensche Funktionen außerhalb des singulären Punktes die homogenen Gleichungen. Die δ-Funktion erhält man nach der Ableitung, weil die Heaviside-Funktion am singulären Punkt gerade einen Sprung der Höhe 1 macht. Diese Vorstellung werden wir im folgenden benutzen, um Greensche Funktionen zu anderen Differentialoperatoren „zu erraten“. Außerdem genügt es wegen der Zeittranslationsinvarianz der homogenen Gleichung, allgemein für einen Differentialoperator $\mathcal{L}_x$ die Lösung zu der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_x G(t) \;=\; \delta(t)$$

zu bestimmen. Die allgemeine Greensche Funktion ist dann $G(t,t') = G(t-t')$.

Betrachten wir als nächstes Beispiel die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \alpha\right) f(t) \;=\; g(t)\;. \tag{7.1}$$

Ihre Lösung ist im allgemeinen nicht so leicht zu erraten. Aber nach den obigen Überlegungen können wir die Greensche Funktion, bzw. die Lösung von

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \alpha\right) G(t) \;=\; \delta(t)\;,$$

leicht bstimmen. Für $t \neq 0$ muß $G(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung sein, d.h. ganz allgemein muß gelten:

$$G(t) \;=\; \begin{cases} a\mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{für } t < 0 \\ b\mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{für } t > 0 \end{cases}\;.$$

Die Konstanten a und b sind nun so zu wählen, daß wir bei $t = 0$ gerade einen Sprung der Höhe 1 haben, also $b - a = 1$. Insbesondere können wir $a = 0$ und $b = 1$ wählen und erhalten:

$$G(t,t') \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } t < t' \\ \mathrm{e}^{-\alpha(t-t')} & \text{für } t > t' \end{cases} \quad .$$

Die anderen Fälle ergeben ebenfalls Greensche Funktionen, unterscheiden sich aber von dieser speziellen Wahl für a und b nur um eine Lösung der homogenen Gleichung. Damit finden wir als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (7.1):

$$f(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\alpha(t-t')} g(t')\,\mathrm{d}t' \;=\; \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\alpha t'} g(t')\,\mathrm{d}t' \;.$$

Durch Ableiten dieser Funktion kann man sofort nachprüfen, daß es sich um eine Lösung von (7.1) handelt. Wir haben natürlich weiterhin die Freiheit, eine Lösung der homogenen Gleichung zu addieren.

7.2 Das freie Teilchen mit einer äußeren Kraft

Wir wollen nun die einfachste inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung betrachten:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(t) \;=\; K(t) \;=\; \frac{F(t)}{m} \;.$$

Diese Differentialgleichung können wir interpretieren als die Differentialgleichung eines Teilchens, auf das eine ortsunabhängige Kraft $F(t)$ wirkt. Auch in diesem Fall ist uns die Lösung bekannt: Wir erhalten sie nach zweimaliger Integration von $K(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} K(t')\,\mathrm{d}t' \;+\; v_0 \;,$$

bzw.

$$f(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t'} K(t'')\,\mathrm{d}t'' \;+\; v_0 t \;+\; x_0 \;. \tag{7.2}$$

Überlegen wir uns nun, wie wir dieses Ergebnis aus dem Formalismus der Greenschen Funktionen ableiten können. Zunächst müssen wir die Lösung von

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} G(t) \;=\; \delta(t) \tag{7.3}$$

bestimmen. Auch diese ist uns aber schon bekannt (vgl. Kapitel 6.4, Gleichungen (6.12) und (6.13)):

$$G(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t & \text{für } t > 0 \end{cases} \quad . \tag{7.4}$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung lautet somit:

$$f(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} (t-t')K(t')\,\mathrm{d}t' \;+\; f_0(t)\;,$$

wobei $f_0(t) = at + b$ Lösung der homogenen Gleichung ist. Dies hat noch nicht die Form, die wir in (7.2) gefunden haben. Allerdings zeigt uns eine partielle Integration, bei der $(t - t')$ nach t' abgeleitet, und $K(t')$ integriert wird, daß die beiden Ergebnisse übereinstimmen.

Die Greensche Funktion zur freien Bewegung besitzt ein anschauliche Interpretation. Die δ-Funktion in (7.3) können wir als eine „Kraft“ auffassen, die nur zum Zeitpunkt $t = 0$ wirkt und dem Teilchen einen endlichen Impuls überträgt. Die Greensche Funktion (7.4) beschreibt ein ruhendes freies Teilchen, das bei $t = 0$ einen Stoß bekommt und anschließend mit endlicher Geschwindigkeit ($v = 1$) weiterfliegt.

7.3 Die Greensche Funktion des harmonischen Oszillators

Zur Berechnung der Greenschen Funktion des harmonischen Oszillators haben wir folgende Gleichung zu lösen:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\right) G(t) \;=\; \delta(t)\;.$$

Für $t \neq 0$ ist $G(t)$ Lösung der homogenen Gleichung, d.h.

$$G(t) \;=\; \begin{cases} a_- \sin\omega t + b_- \cos\omega t & \text{für } t < 0 \\ a_+ \sin\omega t + b_+ \cos\omega t & \text{für } t > 0 \end{cases}\;.$$

Bei $t = 0$ erhält der Oszillator einen Stoß, der seine Geschwindigkeit um 1 erhöht, d.h.

$$\lim_{t\to 0^+} G(t) \;=\; \lim_{t\to 0^-} G(t)$$

und

$$\lim_{t\to 0^+} \dot{G}(t) \;=\; \lim_{t\to 0^-} \dot{G}(t) + 1\;.$$

Wir erhalten also für die Koeffizienten $b_- = b_+ \equiv b$ und $\omega a_- + 1 = \omega a_+$. Speziell können wir wieder $a_{=}0 = b$ setzen und finden als Lösung:

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{ret}}(t-t') \;&=\; \begin{cases} \dfrac{\sin\omega(t-t')}{\omega} & \text{für } t > t' \\ 0 & \text{für } t < t' \end{cases} \\ &=\; \Theta(t-t')\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega} \end{aligned}$$

Der Index „ret“ bedeutet *retardierte Greensche Funktion* und bezieht sich auf die spezielle Wahl der Koeffizienten a_- und b. Im nächsten Abschnitt werden wir auf diese Randbedingungen näher eingehen. Die Lösung hat also die physikalische Interpretation, daß der Oszillator (beispielsweise ein Pendel) für $t < t'$ ruht, bei $t = t'$ einen Stoß erhält (mit Energie 1) und von da an mit der entsprechenden Amplitude schwingt.

Für eine Gleichung der Form

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\right) x(t) \;=\; K(t) \tag{7.5}$$

erhalten wir als Lösung:

$$x(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} K(t') \frac{\sin\omega(t-t')}{\omega}\,\mathrm{d}t' \;+\; x_0(t)\;.$$

$x_0(t)$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung und beschreibt das Verhalten der Funktion $x(t)$ für die ferne Vergangenheit $t \to -\infty$, bevor die äußere Kraft $K(t)$ eingesetzt hat. Wir können uns bei dieser Lösung vorstellen, daß zu jedem Zeitpunkt t' ein Stoß$K(t')$ auf den Oszillator übertragen wird, und für die Lösung über diese kontinuierliche Abfolge von Stößen integriert wird. Dabei spielen nur die Stöße eine Rolle, die in der Vergangenheit des Oszillators stattgefunden haben.

7.4 Randbedingungen: Die retardierte und avancierte Greensche Funktion

Da es Lösungen zur homogenen Gleichung des harmonischen Oszillators gibt, ist auch die Greensche Funktion nicht eindeutig. Wir können zur Greenschen Funktion ebenfalls eine homogene Lösung addieren. Das entspricht einer anderen Wahl der Parameter a_- und b. Insbesondere können wir auch $a_+ = 0$ setzen und erhalten:

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{av}}(t-t') \;&=\; \begin{cases} -\dfrac{\sin\omega(t-t')}{\omega} & \text{für } t < t' \\ 0 & \text{für } t > t' \end{cases} \\ &=\; -\Theta(t'-t)\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega} \end{aligned}$$

Der Index „av“ steht hier für *avancierte Greensche Funktion*. Die Interpretation dieser Lösung ist, daß der Oszillator für alle Zeiten $t < t'$ mit der Energie 1 schwingt und zum Zeitpunkt t' durch einen Stoß in Ruhe versetzt wird. Physikalisch ist dieser Prozeß natürlich ebenfalls möglich. Die Differenz zwischen retardierter und avancierter Greenscher Funktion ist eine Lösung der homogenen Gleichung:

$$G_{\mathrm{ret}}(t) \;-\; G_{\mathrm{av}}(t) \;=\; \frac{1}{\omega}\sin\omega t\;.$$

Welche physikalische Interpretation haben aber die Lösungen der Bewegungsgleichung, die wir mit der avancierten Greenschen Funktion berechnen:

$$x(t) \;=\; -\int_t^\infty K(t')\frac{\sin\omega(t-t')}{\omega}\,\mathrm{d}t' \;+\; \hat{x}_0(t)\;.$$

$\hat{x}_0(t)$ ist nun die homogene Lösung, die $x(t)$ in der fernen Zukunft $t \to \infty$ einnehmen wird, nachdem die Kraft $K(t)$ aufgehört hat zu wirken. $x(t)$ beschreibt also eher, wie die Kraft $K(t)$ das System „abdämpft“ bis es schließlich in den Zustand $\hat{x}_0(t)$ gelangt. Für $x(t \to -\infty)$ gibt uns die Lösung an, wie wir das System zu präparieren haben, damit es unter der Einwirkung der Kraft in der fernen Zukunft zu $\hat{x}_0(t)$ wird.

Die Lösungen, die sich aus der retardierten Greenschen Funktion ergeben sind physikalisch naheliegender: Wir kennen den Schwingungszustand des Systems in der Vergangenheit ($x_0(t)$) und wollen wissen, wie sich das System unter der Einwirkung der Kraft entwickelt. Trotzdem gibt es auch Fälle, wo die avancierte Greensche Funktion oder auch andere Kombinationen von Interesse sind.

7.5 Resonanz

7.5.1 Einfache harmonische äußere Kraft

Wir betrachten nun einen harmonischen Oszillator, bei dem die äußere Kraft selber eine harmonische Schwingung darstellt, beispielsweise

$$K(t) \;=\; A\cos\omega_0 t\;.$$

Die Frequenz der äußeren Kraft ω_0 ist zunächst verschieden von der Frequenz des Oszillators ω. Wir können dieses Problem natürlich mit Hilfe der Greenschen Funktion lösen, allerdings nehmen wir dabei zunächst an, daß die Kraft $K(t)$ erst zum Zeitpunkt t_0 einsetzt, und für $t < t_0$ der Oszillator in Ruhe ist:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{A}{\omega}\int_{t_0}^t \sin\omega(t-t')\cos\omega_0 t'\,\mathrm{d}t' \\
&= \frac{A}{2\omega}\int_{t_0}^t \{\sin[\omega t-(\omega-\omega_0)t'] + \sin[\omega t-(\omega+\omega_0)t']\}\,\mathrm{d}t' \\
&= \frac{A}{2\omega}\left[\frac{1}{\omega-\omega_0}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega+\omega_0}\cos(\omega_0 t)\right. \qquad (7.6)\\
&= \qquad \left. -\frac{1}{\omega-\omega_0}\cos[\omega t-(\omega-\omega_0)t_0] - \frac{1}{\omega+\omega_0}\cos[\omega t-(\omega+\omega_0)t_0]\right] \\
&= \frac{A}{\omega^2-\omega_0^2}\cos\omega_0 t \;+\; x_0(t)\;.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $x_0(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung, die vom Startzeitpunkt t_0 abhängt.

In diesem speziellen Fall läßt sich die spezielle Lösung auch aus einem harmonischen Ansatz „erraten“, denn bei einer äußeren Kraft mit der Frequenz ω_0 würden wir aus physikalischer Anschauung bereits erwarten, daß der Oszillator auch mit der Frequenz ω_0 reagiert. Setzen wir den Ansatz

$$x(t) \;=\; a\cos\omega_0 t$$

in die Differentialgleichung für den Oszillator mit der Kraft $K(t)$ ein, so finden wir direkt:

$$a(-\omega_0^2+\omega^2)\cos\omega_0 t \;=\; A\cos\omega_0 t\ ,$$

bzw.

$$a \;=\; \frac{A}{\omega^2-\omega_0^2}\ .$$

Die spezielle Lösung lautet also:

$$x(t) \;=\; \frac{A}{\omega^2-\omega_0^2}\cos\omega_0 t\ ,$$

was wir auch aus dem Formalismus mit der Greenschen Funktion erhalten haben.

Zunächst erkennt man, daß die Lösung für $\omega_0=\omega$ divergent ist. Wenn die äußere Kraft also dieselbe Frequenz hat wie der harmonische Oszillator, gibt es keine Lösung. Physikalisch bedeutet dies, daß der Oszillator durch die äußere Kraft unbegrenzt „aufgeschaukelt“ wird, seine Amplitude also unbegrenzt zunimmt. Vom mathematischen Standpunkt betrachtet ist dies genau der Fall, bei dem $K(t)$ nicht im Bild des Operators des harmonischen Oszillators liegt, es zu diesem speziellen $K(t)$ also keine Lösung gibt.

Das „Aufschaukeln“ erkennt man übrigens besser an der Lösung, die wir mit Hilfe der Greenschen Funktion hergeleitet haben und bei der die äußere Kraft erst zum Zeitpunkt t_0 einsetzt. In dem Grenzfall $\omega\to\omega_0$ erhält man aus (7.6):

$$x(t) \;=\; -\frac{A}{2\omega_0}(t-t_0)\sin\omega_0 t \;+\; \text{ homogene Lösung }.$$

Die Amplitude nimmt also linear mit der Zeit zu.

7.5.2 Äußere Kraft mit mehreren harmonischen Anteilen

Wir nehmen nun an, daß die äußere Kraft mehrere harmonische Anteile besitzt, d.h. von der Form

$$K(t) \;=\; \sum_n A_n\cos\omega_n t$$

ist. Wir erhalten in diesem Fall die spezielle Lösung sofort als entsprechende Summe von harmonischen Anteilen:

$$x(t) \;=\; \sum_n \frac{A_n}{\omega^2 - \omega_n^2} \cos \omega_n t \;.$$

Die Lösung des harmonischen Oszillators enthält also genau dieselben Frequenzanteile, wie die äußere Kraft. Die zugehörige Amplitude hängt dabei nur von der entsprechenden Amplitude der Kraft ab (A_n) und dem Faktor $1/(\omega^2 - \omega_n^2)$, nicht jedoch von den Amplituden zu den anderen Frequenzen. Die einzelnen Frequenzanteile beeinflussen sich also nicht gegenseitig, sondern überlagern sich einfach. Dies ist typisch für den Oszillator und folgt aus der „Linearität“ der Gleichungen.

Wegen des Faktors $1/(\omega^2 - \omega_n^2)$ macht sich bei einer äußeren Kraft die Frequenz am stärksten bemerkbar, die am nächsten zur Frequenz des Oszillators ist. Für $\omega \approx \omega_n$ kann es in diesem Fall zu gewaltigen Amplituden kommen. Ein bekanntes Beispiel ist die Brücke von Tampas (?), wo durch Resonanz mit Winden in der Bucht die Brücke ins Schaukeln geriet und schließlich zerfiel.

7.5.3 Der gedämpfte Oszillator mit äußerer Kraft

Wir hatten gesehen, daß die Lösung des harmonischen Oszillators mit einer Frequenz ω zu einer äußeren Kraft mit derselben Frequenz ω divergiert. In der Realität wird das allerdings meist dadurch verhindert, daß entweder nicht-lineare Beiträge für große Amplituden wesentlich werden, oder aber Dämpfungsbeiträge beispielsweise durch Reibung. Diesen letzteren Fall wollen wir kurz besprechen. Die äußere Kraft sei wieder harmonisch mit einer Frequenz ω_0:

$$\ddot{x}(t) + \kappa \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) \;=\; A\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \;.$$

Der Realteil dieser Gleichung (A sei reell) entspricht einer Kraft $A \cos \omega_0 t$, der Imaginärteil einer Kraft $A \sin \omega_0 t$. Es handelt sich hier lediglich um einen mathematischen Trick, der aber das Rechnen etwas vereinfachen wird, und der uns gleichzeitig beide Lösungen liefert. Der Ansatz

$$x(t) \;=\; a\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{7.7}$$

führt nun auf die Gleichung:

$$a(-\omega_0^2 + \kappa\omega_0 \mathrm{i} + \omega^2) \;=\; A \;,$$

bzw.

$$a \;=\; \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2 + \kappa\omega_0 \mathrm{i}} \;=\; \frac{A}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \kappa^2 \omega_0^2} (\omega^2 - \omega_0^2 - \kappa\omega_0 \mathrm{i}) \;.$$

Zerlegen wir mit diesem Ergebnis für a die Lösung (7.7) nach Real- und Imaginärteil, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{c}}(t) &= \frac{A}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\kappa^2\omega_0^2}\left((\omega^2-\omega_0^2)\cos\omega_0 t+\kappa\omega_0\sin\omega_0 t\right) \\ x_{\mathrm{s}}(t) &= \frac{A}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\kappa^2\omega_0^2}\left((\omega^2-\omega_0^2)\sin\omega_0 t-\kappa\omega_0\cos\omega_0 t\right) \ . \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $x_{\mathrm{c}}(t)$ die Lösung zur äußere Kraft $K(t) = A\cos\omega_0 t$ und $x_{\mathrm{s}}(t)$ die Lösung zu $K(t) = A\sin\omega_0 t$. Wie beim ungedämpften harmonischen Oszillator ist die Responz des Oszillators auf eine äußere Kraft umso stärker, je näher die Frequenz ω_0 an der Oszillatorfrequenz ω ist. Allerdings divergiert die Lösung nun nicht für $\omega = \omega_0$, sondern wir erhalten beispielsweise:

$$x_{\mathrm{c}}(t) = \frac{A}{\kappa\omega_0}\sin\omega_0 t \ . \tag{7.8}$$

Da die homogenen Lösungen in diesem Fall einen Dämpfungsfaktor haben, also für große t gegen Null gehen, stellt sich nach genügend langer Zeit immer das obige Schwingverhalten ein.

Eine wesentliche Eigenschaft des gedämpften harmonischen Oszillators mit äußerer Kraft ist die Phasenverschiedung für die Responz relativ zur Anregung. Diese beträgt bei der Resonanzfrequenz gerade 90° (vgl. (7.8)). Schreiben wir die Amplitude a in Polarkoordinaten:

$$a = R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$$

mit

$$R = \left|\frac{A}{\omega^2-\omega_0^2+\mathrm{i}\kappa\omega_0}\right| = \frac{A}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\kappa^2\omega_0^2}}$$

dem Betrag der Responz und

$$\alpha = \arctan\frac{\kappa\omega_0}{\omega^2-\omega_0^2}$$

als seine Phase, so folgt für die komplexe Lösung:

$$x(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t-\alpha)} \ .$$

α ist also gerade die Phasenverschiebung zwischen der äußeren Kraft und der Anregung des Oszillators. Dies gibt uns gleichzeitig eine andere Interpretation der komplexen Lösung bei Resonanzphänomen: Komplexe Zahlen haben einen Betrag und eine Phase, und die Responz des Oszillators – der Betrag und die Phasenverschiebung — wird gerade durch die entsprechende komplexe Lösung ausgedrückt.

Kapitel 8

Die lineare Kette

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit der sogenannten „linearen Kette“ aus N Massepunkten befassen. Diese Massepunkte (Masse m) seinen untereinander durch eine Feder (Federkonstante D) gekoppelt und können nur longitudinale Schwingungen ausführen. Die Wahl der Randbedingungen, d.h. die Vorgabe der Kopplungen für Teilchen 1 und Teilchen N werden wir später diskutieren. Dieses Modell ist gleich in zweifacher Hinsicht ein „Prototyp“: Einerseits dient eine dreidimensionale Verallgemeinerung dieses Modells als Grundlage für die Beschreibung von Festkörpern, andererseits läßt sich ein sogenannter Kontinuumsgrenzfall betrachten, bei dem die N Teilchen in eine schwingende Seite übergehen. Man erhält so den Übergang zu einer (eindimensionalen) Feldtheorie.

8.1 Die Bewegungsgleichungen

Wir denken uns zunächst Teilchen 1 und Teilchen N mit einer äußeren Wand verbunden. Alle Teilchen haben in der Ruhelage denselben Abstand l voneinander, wobei $l(N+1)$ die gesamte Länge der Kette ist, d.h. der Abstand zwischen den beiden Wänden. $y_i(t)$ sei die Position des Teilchens i zum Zeitpunkt t. Die Ruhelage dieses Teilchens ist also $y_i = il$. Es empfielt sich später, die Variable $x_i(t) = y_i(t) - il$ zu betrachten, die die Abweichung des i-ten Teilchens von seiner Ruhelage bezeichnet.

Die Kraft auf das i-te Teilchen hängt nur von den Positionen der beiden Nachbarteilchen ab, und zwar gilt:

$$F_i \;=\; D(y_{i+1} - y_i) \;-\; D(y_i - y_{i-1}) \;.$$

Der erste Anteil beschreibt die Kraft, die der rechte Nachbar $i+1$ auf Teilchen i ausübt, der zweite Teil die (entgegengesetzte) Kraft des linken Nachbars $i-1$. Ersetzt man die Position $y_i(t)$ durch die Abweichung von der relativen Ruhelage $x_i(t)$, so erhält man:

$$F_i \;=\; D(x_{i+1}(t) - x_i(t) - l) - D(x_i(t) - x_{i-1}(t) - l) \;=\; D(x_{i+1} - x_i) \;-\; D(x_i - x_{i-1}) \;.$$

Die Kraft auf das i-te Teilchen hängt also nur von der Abweichung von der Relativen Ruhelage ab, der Abstand zwischen den Teilchen l fällt heraus.

Es ist ganz instruktiv, die Kraft auf das i-te Teilchen aus einem Potential herzuleiten. Das Potential, das das i-te Teilchen verspürt, ist

$$V_i \;=\; \frac{D}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{D}{2}(x_i - x_{i-1})^2 \;.$$

Daraus ergibt sich natürlich:

$$F_i \;=\; -\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \;=\; D(x_{i+1}-x_i) \;-\; D(x_i - x_{i-1}) \;. \tag{8.1}$$

Wir können nun die Bewegungsgleichung für das i-te Teilchen hinschreiben:

$$\ddot{x}_i(t) \;=\; \frac{D}{m}[x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)] \;. \tag{8.2}$$

Allerdings müssen wir noch genauer untersuchen, was mit dem 1. bzw. N. Teilchen passiert. Da die benachbarte Wand fest sein soll, erhalten wir in diesem Fall für die Kräfte:

$$\begin{aligned} F_1 &= D(x_2 - x_1) - Dx_1 \;=\; D(x_2 - 2x_1) \\ F_N &= D(-x_N) - D(x_N - x_{N-1}) \;=\; D(-2x_N + x_{N-1}) \;. \end{aligned}$$

Wir können diese Kräfte sowie die zugehörigen Bewegungsgleichungen ebenfalls in die Form (8.1) bzw. (8.2) schreiben, wenn wir den Wänden eine „Verschiebung aus der Ruhelage“ x_0 und x_{N+1} zuschreiben, die aber verschwindet:

$$x_0(t) \;=\; x_{N+1}(t) \;\equiv\; 0 \;.$$

Diese Randbedingungen bezeichnet man als *feste Randbedingungen.*

Für das Lösen der Bewegungsgleichungen ist die Sonderstellung der Randteilchen eine Komplikation, die man zunächst durch einen Trick umgeht. Statt der festen Randbedingungen, definieren wir sogenannte *periodische Randbedingungen.* In diesem Fall gilt:

$$x_0(t) \;=\; x_N(t) \qquad \text{und} \qquad x_{N+1}(t) = x_1(t) \;.$$

Wir stellen uns also das 1. und N. Teilchen der Kette wie bei einem Ring verbunden vor. Effektiv gesehen gibt es kein Anfangs- oder Endteilchen mehr, jedes Teilchen der Kette ist physikalisch gleichwertig. Der Preis für diese mathematische Vereinfachung – und wir werden gleich sehen, daß es sich wirklich um eine Vereinfachung handelt – ist ein abgeändertes und physikalisch etwas seltsames System. Wir werden aber sehen, daß die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen mit periodischen Randbedingungen auch die Lösung mit festen Randbedingungen liefert. Die Idee dabei ist, eine periodische

Kette mit $2N+2$ Massepunkten zu betrachten und nur solche Lösungen zuzulassen, bei denen der $N+1$. und der $2N+2$. Massepunkt in Ruhe bleiben. Wir werden sehen, daß man auf diese Weise das Problem mit festen Randbedingungen für N Teilchen lösen kann.

Wir haben also einen Satz von N Bewegungsgleichungen, die untereinander gekoppelt sind:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1(t) &= \frac{D}{m}(x_2(t) - 2x_1(t) + x_N(t)) \\
\ddot{x}_2(t) &= \frac{D}{m}(x_3(t) - 2x_2(t) + x_1(t)) \\
&\vdots \quad\quad \vdots \\
\ddot{x}_i(t) &= \frac{D}{m}(x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)) \\
&\vdots \quad\quad \vdots \\
\ddot{x}_N(t) &= \frac{D}{m}(x_1(t) - 2x_N(t) + x_{N-1}(t)) \ .
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir auch in einer Matrixschreibweise formulieren,

$$\ddot{x}_i(t) \ = \ -\frac{D}{m}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{ij}x_i(t) \ ,$$

bzw. als eine Vektorgleichung schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} \ = \ -\frac{D}{m}\Gamma\vec{x} \ , \tag{8.3}$$

wobei $\vec{x}(t)$ nun ein N-komponentiger Vektor (Komponenten $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$) und Γ die folgende $N \times N$ Matrix ist:

$$\Gamma \ = \ \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \ldots \\
-1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2
\end{pmatrix} \ . \tag{8.4}$$

(Bei festen Randbedingungen wären die beiden Terme mit -1 rechts oben und links unten gleich 0.) In Komponentenschreibweise:

$$\Gamma_{ij} \ = \ 2\delta^N_{ij} \ - \ \delta^N_{i\,j+1} \ - \ \delta^N_{i\,j-1} \qquad \text{mit} \quad \delta^N_{ij} \ = \ \begin{cases} 1 & \text{für } i \equiv j \bmod N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

δ_{ij}^N ist das *periodische Konecker-Symbol*.

Abschließend wollen wir uns noch davon überzeugen, daß die angegebenen Bewegungsgleichungen unverändert auf ein System übertragen werden können, bei dem die einzelnen Massepunkte in einer Ebene liegen und nur transversale Schwingungen ausführen können. Die 1-Koordinate (entlang der Kette) ist für das i-te Teilchen daher immer il. Die 2-Koordinate sei nun x_i. Überlegen wir uns die Kraft, die das Teilchen $i+1$ auf das Teilchen i ausübt, wenn die Differenz ihrer 2-Koordinaten $x_{i+1}-x_i$ ist. Die Gesamtlänge der „Feder“ ist in diesem Fall $L_i = \sqrt{l^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}$, und daher ist der Betrag der rücktreibende Kraft $F = DL_i$. Die Komponente dieser Kraft entlang der 1-Richtung ist aber gerade Dl, die Komponente entlang der 2-Richtung $D(x_{i+1} - x_i)$. Da die Teilchen nur eine transversale Bewegung ausführen sollen ist die (von $i + 1$ ausgeübte) rücktreibende Kraft auf Teilchen i gleich $F_i = D(x_{i+1} - x_i)$, also gleich der oben hergeleiteten longitudinalen Kraft. Oft ist es für die Visualisierung der Bewegung einfacher, transversale Freiheitsgrade zu betrachten.

8.2 Zwischenkapitel: Die lineare Kette mit 2 Massepunkten

Bevor wir die Diagonalisierung von Γ für den allgemeinen Fall mit N Massepunkten durchführen, betrachten wir zunächst die lineare Kette mit 2 Massepunkten, um so eine anschauliche Bedeutung der Begriffe zu erhalten. Die beiden Massepunkte seien dabei mit einer starren Wand verbunden, d.h., die Bewegungsgleichungen lauten:

$$m\ddot{x}_1 \;=\; D(-2x_1 + x_2) \qquad \text{und} \qquad m\ddot{x}_2 \;=\; D(-2x_2 + x_1)$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \;=\; -\frac{D}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} .$$

Dabei können wir unter x_i sowohl die transversale Auslenkung des i-ten Teilchens aus seiner Ruhelage als auch die longitudinale Auslenkung verstehen.

Wenn wir im folgenden die Auslenkungen der beiden Teilchen aus der Ruhelage zu einem Vektor zusammenfassen, so geschieht das aus reiner Bequemlichkeit für die Notation. Es bedeutet nicht, daß dieser Vektor etwas mit Vektoren des 2- oder 3-dimensionalen realen Raums zu tun hat.

Wir beginnen mit der Diagonalisierung der Matrix

$$\Gamma \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte lassen sich aus der charakteristischen Gleichung gewinnen:

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 \\ -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 \;=\; 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind:

$$\lambda_1 \;=\; 1 \;\;\left(\;=\; 4\sin^2\frac{\pi}{6}\;\right) \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 \;=\; 3 \;\;\left(\;=\; 4\sin^2\frac{\pi}{6}2\;\right) .$$

Die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren sind

$$\vec{e}_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Im Hinblick auf die späteren Verallgemeinerungen drücken wir auch diese beiden Eigenwerte durch Sinus-Funktionen aus:

$$\vec{e}_1 \;=\; \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3}2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_2 \;=\; \begin{pmatrix} \sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3}2 \end{pmatrix} .$$

Die beiden Eigenvektoren von Γ sind orthogonal, und wir können jeden beliebigen Vektor als Linearkombination dieser beiden Eigenvektoren schreiben:

$$\vec{x}(t) \;=\; A_1(t)\,\vec{e}_1 \;+\; A_2(t)\,\vec{e}_2 .$$

Wir setzen diese Zerlegung eines allgemeinen Vektors nun in die Bewegungsgleichung ein:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_1(t)\vec{e}_1 \;+\; \ddot{A}_2(t)\vec{e}_2 \;&=\; -\frac{D}{m}\,\Gamma(A_1(t)\,\vec{e}_1 \;+\; A_2(t)\,\vec{e}_2) \\ &=\; -\frac{D}{m}[\lambda_1\,A_1(t)\vec{e}_1 \;+\; \lambda_2\,A_2(t)\vec{e}_2] \\ &=\; -\left(\frac{D}{m}\lambda_1\,A_1(t)\right)\vec{e}_1 - \left(\frac{D}{m}\lambda_2\,A_2(t)\right)\vec{e}_2 . \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muß gelten:

$$\ddot{A}_1(t) \;=\; -\,\omega_1^2 A_1(t) \qquad \text{und} \qquad \ddot{A}_2(t) \;=\; -\,\omega_2^2 A_2(t) ,$$

wobei

$$\begin{aligned} \omega_1 \;&=\; \sqrt{\frac{D}{m}\lambda_1} \;=\; \sqrt{\frac{D}{m}} \\ \text{und} \qquad \omega_2 \;&=\; \sqrt{\frac{D}{m}\lambda_2} \;=\; \sqrt{3\frac{D}{m}} . \end{aligned}$$

Man erkennt nun den Vorteil der Zerlegung eines beliebigen „Vektors“ nach den Eigenvektoren der Matrix Γ: Die Bewegungsgleichungen für die Komponenten in der Basis

der Eigenvektoren – $A_i(t)$ – sind entkoppelt. Wir erhalten also zwei *unabhängige* Differentialgleichungen.

Die bekannten allgemeinen Lösungen dieser Gleichung sind:

$$\begin{aligned} & A_1(t) &=& \; a_1 \cos\omega_1 t \,+\, b_1 \sin\omega_1 t \\ \text{und} \qquad & A_2(t) &=& \; a_2 \cos\omega_2 t \,+\, b_2 \sin\omega_2 t \;. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Problems lautet somit:

$$\vec{x}(t) \;=\; (a_1 \cos\omega_1 t \,+\, b_1 \sin\omega_1 t)\,\vec{e}_1 \;+\; (a_2 \cos\omega_2 t \,+\, b_2 \sin\omega_2 t)\,\vec{e}_2 \;,$$

bzw. in Komponenten:

$$\begin{aligned} x_1(t) &=& \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \cos\omega_1 t \,+\, b_1 \sin\omega_1 t \,+\, a_2 \cos\omega_2 t \,+\, b_2 \sin\omega_2 t) \\ x_2(t) &=& \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \cos\omega_1 t \,+\, b_1 \sin\omega_1 t \,-\, a_2 \cos\omega_2 t \,-\, b_2 \sin\omega_2 t) \;. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Eigenvektoren und Eigenwerte von Γ physikalisch interpretieren:

Der Eigenvektor $\vec{e}_1$ beschreibt eine Auslenkung der beiden Kugeln in dieselbe Richtung und mit demselben Betrag. Beginnt man mit einer solchen Anfangskonfiguration, so bleibt diese Eigenschaft (gleiche Richtung und gleicher Betrag) erhalten, d.h. die Bewegung bleibt immer in der Konfiguration, die durch den Eigenvektor $\vec{e}_1$ vorgegeben wurde. Was sich im Verlaufe der Zeit verändert, ist die Amplitude zu diesem Vektor $A_1(t)$, d.h. die Stärke der Auslenkung. Diese führt eine harmonische Schwingung mit der Frequenz ω_1 aus, d.h. im wesentlichen mit einer Frequenz, die durch den zugehörigen Eigenwert gegeben ist.

Der Eigenvektor $\vec{e}_2$ beschreibt eine Auslenkung der beiden Kugeln in entgegengesetzte Richtungen, aber mit demselben Betrag. Auch diese Anfangskonfiguration bleibt im Verlauf der Zeit erhalten, und ihre Amplitude $A_2(t)$ führt eine harmonische Schwingung mit der diesmal größeren Frequenz ω_2 aus.

Wir können nun auch das Anfangswertproblem für die beiden gekoppelten Massekugeln lösen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ finden wir:

$$\vec{x}(0) \;=\; a_1\,\vec{e}_1 \,+\, a_2\,\vec{e}_2 \qquad \text{und} \qquad \vec{v}(0) \;=\; \omega_1 b_1(0)\,\vec{e}_1 \,+\, \omega_2 b_2(0)\,\vec{e}_2 \;.$$

Wegen der Orthonormalität der beiden Eigenvektoren, d.h.

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 \;=\; \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \;=\; 1 \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \;=\; 0 \;,$$

ist:

$$a_1 \;=\; \vec{x}(0) \cdot \vec{e}_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \vec{x}(0)\cdot\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ b_1 &= \frac{1}{\omega_1}\vec{v}(0)\cdot\vec{e}_1 = \frac{1}{\omega_1}\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2) \\ b_2 &= \frac{1}{\omega_2}\vec{v}(0)\cdot\vec{e}_2 = \frac{1}{\omega_2}\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2)\ . \end{aligned}$$

8.3 Diagonalisierung von Γ

Zur Lösung der Bewegungsgleichung (8.3) müssen wir die Matrix Γ diagonalisieren, d.h. wir benötigen sowohl die Eigenwerte als auch die Eigenvektoren von Γ. Üblicherweise macht man dies wiederum durch einen Exponentialansatz. Allerdings ist in diesem Fall noch unklarer (als bei den linearen Differentialgleichungen), warum der Exponentialansatz zur Lösung führt. Daher wollen wir die algebraischen Eigenschaften der Matrix Γ etwas genauer untersuchen und dabei den Exponentialansatz „herleiten".

Die Matrix Γ besitzt eine auffallende Symmetrie: Entlang der Diagonalen von links-oben nach rechts-unten sind die Matrixelemente immer dieselben, d.h.

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{i+1\,j+1}\ . \tag{8.5}$$

Diese Gleichung gilt auch für die Randelemente, sofern man die Periodizität modulo N berücksichtigt. Diese Symmetrie wollen wir nun ausnutzen, um Γ zu diagonalisieren. Zunächst wollen wir diese Symmetrie durch eine sogenannte Verschiebematrix T ausdrücken. T ist definiert durch die Bedingung:

$$(T\vec{y})_i = y_{i+1} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} \longrightarrow (T\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_N \\ y_1 \end{pmatrix}$$

und realisiert durch die Matrix:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad T_{ij} = \delta^N_{i\,j-1}\ .$$

Offensichtlich gilt für die transponierte Matrix

$$T^T \;=\; T^{N-1} \;=\; T^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

T hat also die Eigenschaft, die Komponenten eines Vektors periodisch um einen Eintrag zu verschieben. Ganz entsprechend können wir für eine Matrix A die Zeilen- und Spaltenkomponenten um einen Eintrag verschieben:

$$(TAT^T)_{ij} \;=\; A_{i+1\,j+1} \; .$$

Offensichtlich ist die obige Symmetrieeigenschaft der Matrix Γ (8.5) äquivalent zu der Eigenschaft:

$$\Gamma \;=\; T^T \Gamma T \qquad \text{bzw.} \qquad T\Gamma \;=\; \Gamma T \; .$$

Außerdem läßt sich *Gamma* auch als Funktion von T schreiben:

$$\Gamma \;=\; 2 \cdot \mathbb{1} \;-\; T \;-\; T^{-1} \; .$$

(Aus der Tatsache, daß Γ eine Funktion von T ist folgt natürlich, daß Γ mit T kommutiert. Umgekehrt folgt auch aus der Tatsache, daß Γ mit T kommutiert – und T ein nicht-entartetes Spektrum hat, was wir gleich sehen werden –, daß Γ eine Funktion von T ist.)

Aus diesen Eigenschaften folgt:

- Γ und T sind gleichzeitig diagonalisierbar. D.d. wenn wir die Eigenvektoren von T kennen (und diese nicht zu einem entarteten Eigenwert gehören), dann sind dies gleichzeitig die Eigenvektoren von Γ.

- Bezeichnen wir mit τ_i $(i = 1, \dots, N)$ die Eigenwerte der Matrix T, dann sind die Eigenwerte von Γ:

$$\lambda_i \;=\; 2 - \tau_i - \tau_i^{-1} \; .$$

Die Überlegungen gelten für jede Matrix A mit $A_{ij} = A_{i+1\,j+1}$, d.h. für jede Matrix der Form:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{N-3} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \;\; A_{ij} \;=\; a_{i-j} \; .$$

A als Funktion von T ist

$$A \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} a_k T^k \;,$$

und die Eigenwerte λ_i^A von A sind:

$$\lambda^A \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} a_k \tau^k \;.$$

Wir wollen nun die Matrix T diagonalisieren, d.h. die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von T bestimmen. Dabei fällt zunächst auf, daß T keine symmetrische Matrix ist (im Gegensatz zu Γ). Allerdings ist T eine sogenannte reelle *normale* Matrix, d.h.

$$T^T T \;=\; T T^T \qquad \text{(reelle normale Matrix)} \;.$$

In diesem Fall weiß man, daß die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind. Bei entarteten Eigenwerten ist die geometrische Entartung (Dimension des Eigenraums) gleich der algebraischen Entartung (Ordnung der Nullstelle der charakteristischen Gleichung), und die Eigenvektoren können orthogonal gewählt werden.

Wir haben oben gesehen, daß die Matrix P die Komponenten eines Vektors um eine Stelle verschiebt. Für einen Eigenvektor muß somit gelten:

$$y_{i+1} \;=\; \tau_i y_i \;, \tag{8.6}$$

außerdem

$$y_{N+1} \;=\; y_1 \quad \Longrightarrow \quad \tau_i^N \;=\; 1 \;. \tag{8.7}$$

Die Eigenwerte der Matrix T sind also die N-ten Einheitswurzeln:

$$\tau_k \;=\; \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1 \;.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind:

$$\vec{y}_k \;=\; \begin{pmatrix} \tau_k \\ \tau_k^2 \\ \tau_k^3 \\ \vdots \\ \tau_k^N = 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \quad (\vec{x}_k)_l \;\propto\; \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{N} k l} \;.$$

(Auf der rechten Seite steht die l. Komponente des k. Eigenvektors.)

Wir haben damit auch gleichzeitig die Eigenwerte von Γ gefunden

$$\begin{aligned}\lambda_k &= 2-\tau_k-\tau_k^{-1} = 2-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}k}-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}k} \\ &= 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{N}k\right) = 4\,\sin^2\frac{\pi}{N}k \qquad k=0,1,\ldots,N-1\ .\end{aligned}$$

Was sind die Eigenvektoren von Γ ? Γ ist eine reelle symmetrische Matrix. Die Eigenwerte müssen also reell sein, was wir gerade überprüft haben. Eine reelle symmetrische Matrix läßt sich aber auch immer durch eine orthogonale Matrix diagonalisieren. Die Eigenvektoren müssen also ebenfalls reelle Komponenten haben. Dies galt nicht für die Matrix T.

Offensichtlich sind die Eigenwerte der Matrix Γ entartet: Es gilt $\lambda_k = \lambda_{N-k}$. (Für $k = 0$ gilt dies zwar nicht, aber in dem Fall ist der Eigenvektor auch reell. Bei geradem N gilt diese Entartung ebenfalls nicht für $k = N/2$, aber auch in dieserm Fall ist der Eigenvektor reell.) Wir können daher auch Linearkombinationen der zugehörigen Eigenvektoren bilden. Die reellen Linearkombinationen sind:

$$\vec{x}_k^{+} = \frac{1}{2}(\vec{y}_k+\vec{y}_{N-k}) = \begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{N}k\\ \cos\frac{2\pi}{N}2k\\ \cos\frac{2\pi}{N}3k\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{x}_k^{-} = \frac{1}{2i}(\vec{y}_k-\vec{y}_{N-k}) = \begin{pmatrix}\sin\frac{2\pi}{N}k\\ \sin\frac{2\pi}{N}2k\\ \sin\frac{2\pi}{N}3k\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},$$

wobei k nun nur noch die Werte $0, 1, \ldots, [N/2]$ annimmt (für N gerade ist $[N/2] = N/2$ und für N ungerade ist $[N/2] = (N-1)/2$). Für $k = 0$ gibt es nur einen Eigenvektor, da $\vec{x}_0^{-} \equiv 0$. Ist N gerade, gibt es zu $k = N/2$ ebenfalls nur einen Eigenvektor (wiederrum ist $\vec{x}_{N/2}^{-}$ identisch Null). Ansonsten gibt es zu jedem k zwei Eigenvektoren, insgesamt also N. Mit jedem Eigenvektor zu einem festen Eigenwert λ_k ist natürlich auch jedes vielfache dieses Eigenvektors ein Eigenvektor. Üblicherweise nutzt man diese Freiheit zu einer Normierung der Eigenvektoren auf den Betrag 1. Wir erhalten so die normierten Eigenvektoren:

$$\vec{e}_0 = \sqrt{\frac{1}{N}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} \qquad \text{und falls } N/2 \text{ gerade } \vec{e}_{N/2} = \sqrt{\frac{1}{N}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{N}k \\ \cos\frac{2\pi}{N}2k \\ \cos\frac{2\pi}{N}3k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{N-1}{2}\right]$$

$$\vec{e}_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \sin\frac{2\pi}{N}k \\ \sin\frac{2\pi}{N}2k \\ \sin\frac{2\pi}{N}3k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } k = N-1, N-2, \ldots, N - \left[\frac{N-1}{2}\right] .$$

Wir können also die Eigenvektoren und Eigenwerte durch $k = 0, 1, \ldots, N-1$ durchnummerieren.

Damit haben wir die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix Γ bestimmt. Ausgangspunkt war dabei die Symmetrie von Gamma und einer gleichzeitigen Verschiebung der Zeilen- und Spaltenkomponenten. Diese Symmetrie führte direkt auf die Gleichung (8.6) für die Eigenvektoren der „Shift"-Matrix P, und diese Gleichung wird nur durch die Exponentialfunktion gelöst. Die Bedingung $P^N = 1$ bzw. Gleichung (8.7) ergab dann die Einschränkungen an die möglichen Exponentialfunktionen zu N-ten Einheitswurzeln. Diese Symmetrie unter Verschiebungen ist also wiederum der Grund, warum der Exponentialansatz zum Ziel führt.

8.4 Die allgemeine Lösung

Betrachten wir nun die Bewegungsgleichung für einen Vektor, der proportional zu einem Eigenvektor von Γ ist,

$$\vec{x}_k(t) = A_k(t)\vec{e}_k ,$$

($A_k(t)$ ist also die Amplitude der Schwingung des k-ten Eigenvektors), so gilt:

$$\ddot{A}_k(t) = -\frac{D}{m} 4 \sin^2 \frac{\pi}{N} k \, A_k(t)$$

bzw. mit

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{D}{m}} \sin\frac{\pi}{N}$$

erhalten wir

$$\ddot{A}_k(t) = -\omega_k^2 \, A_k(t) .$$

Die Amplitude zum k-ten Eigenvektor von Γ erfüllt also eine einfache harmonische Gleichung mit der allgemeinen Lösung:

$$A_k(t) \;=\; a_k \cos\omega_k t \;+\; b_k \sin\omega_k t \;.$$

a_k und b_k sind dabei beliebige Integrationskonstanten, die durch den Wert der entsprechenden Amplitude sowie ihre Änderungsrate (Geschwindigkeit) zum Zeitpunkt $t = 0$ festgelegt sind. Eine Ausnahme bildet jedoch der Eigenvektor zu $k = 0$, für ihn gilt die Bewegungsgleichung

$$\ddot{A}_0(t) \;=\; 0 \qquad \text{bzw.} \quad A_0(t) \;=\; a_0 + b_0 t \;.$$

Dieser Eigenvektor beschreibt offensichtlich die Schwerpunktsbewegung der linearen Kette mit periodischen Randbedingungen. Für alle anderen Werte von k sind die Eigenwerte von Γ von Null verschieden und wie erhalten die obigen harmonischen Gleichungen.

Einen beliebigen Vektor $\vec{x}$ können wir wieder nach den Eigenvektoren von Γ zerlegen:

$$\vec{x}(t) \;=\; \sum_{k=0}^{N-1} A_k(t)\vec{e}_k \;,$$

und wir erhalten als Lösung:

$$\vec{x}(t) \;=\; \sum_{k=1}^{N-1} (a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t)\vec{e}_k \;+\; (a_0 + b_0 t)\vec{e}_0 \;. \tag{8.8}$$

Bevor wir nun diese „Vektoren“ wieder in ihre Komponenten und damit die Bewegungen der einzelnen Massepunkte der linearen Kette zerlegen, wollen wir die Bedeutung der Eigenvektoren zunächst veranschaulichen und ihre Bewegung untersuchen.

$\vec{e}_0$ ist der Eigenvektor zur Schwerpunktsbewegung. Für die einzelnen Teilchen der Kette erhalten wir

$$x_l(t) \;=\; a_0 + b_0 t \;.$$

Jedes Teilchen beschreibt also dieselbe „Bahnkurve“ aus seiner Ruhelage, d.h. die Kette bewegt sich als Ganzes geradlinig und gleichförmig.

Betrachten wir nun den Eigenvektor $\vec{e}_1 = (\cos\frac{2\pi}{N}, \cos\frac{2\pi}{N}2, \cos\frac{2\pi}{N}3, \ldots, 1)$. Die zugehörige Frequenz ist $\omega_1 = 2\sqrt{D/m}\sin\frac{\pi}{N}$ und liegt damit sehr nahe bei Null. Es handelt sich um eine Schwingung der Kette mit zwei Knotenpunkten:

$$x_l(t) \;=\; (a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t)\cos\frac{2\pi}{N} l \;.$$

Für wachsende Werte von k bis $N/2$ nimmt der Wert von ω_k zu (zunächst nahezu linear, später abgeflacht), und die Anzahl der Knotenpunkte $2k$ der Kettenschwingung

nimmt ebenfalls zu. Bei $k = N/2$ schließlich schwingen alle Punkte gegeneinander und die Frequenz hat ihren höchsten Wert erreicht. Mit weiter zunehmenden Werten von k nimmt die Anzahl der Knoten wieder ab. Man erhält zu jedem Wert von k zwei Moden mit derselben Frequenz, die um 90° phasenverschoben sind. Aus Linearkombinationen erhält man die entsprechende Mode für jeden beliebigen „Anfangspunkt".

Betrachten wir nun die l-te Komponente der allgemeinen Lösung (8.8):

$$\begin{aligned} x_l(t) &= \sum_{k=1}^{[N/2]} (a_k^+ \cos\omega_k t + b_k^+ \sin\omega_k t) \cos\frac{2\pi}{N} kl \\ &\quad + \sum_{k=1}^{[N/2]} (a_k^- \cos\omega_k t + b_k^- \sin\omega_k t) \sin\frac{2\pi}{N} kl \ + a_0 + b_0 t \\ &= \sum_{k=1}^{[N/2]} (a_k^+ \cos\frac{2\pi}{N} kl + a_k^- \sin\frac{2\pi}{N} kl) \cos\omega_k t \\ &\quad + \sum_{k=1}^{[N/2]} (b_k^+ \cos\frac{2\pi}{N} kl + b_k^- \sin\frac{2\pi}{N} kl) \sin\omega_k t \ + a_0 + b_0 t \ . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_k^\pm, b_k^\pm$ sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen, beispielsweise aus N Anfangspositionen und N Anfangsgeschwindigkeiten. Die Auflösung der Koeffizienten $\{a_k, b_k\}$ nach $x_l(0)$ und $\dot{x}_l(0)$ soll hier nicht ausgeführt werden. Es handelt sich dabei aber um ein lösbares Problem aus dem Bereich der sogenannten Fourier-Transformationen.

8.5 Die festen Randbedingungen

Die oben hergeleitete Lösung machte entscheidend von der Invarianz der linearen Kette unter Translationen gebrauch. Diese Invarianz gilt nicht mehr, falls die Kette Randteilchen besitzt, also beispielsweise für feste Randbedingungen. Wie schon betont, wird man aus physikalischen Gründen nicht erwarten, daß die wesentlichen Eigenschaften der Lösung bei $N \approx 10^8$ Teilchen von der Wahl der Randbedingungen abhängen. Wir haben aber auch schon angedeutet, daß die allgemeine Lösung der periodischen Randbedingungen auch auf eine allgemeine Lösung mit festen Randbedingungen führt. Dies soll nun gezeigt werden.

Die Matrix Γ^{fest} zu festen Randbedingungen lautet:

$$\Gamma^{\text{fest}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} . \tag{8.9}$$

Diese Matrix ist ebenfalls reell und symmetrisch, d.h. es gibt N reelle Eigenwerte (möglicherweise entartet) sowie N orthogonale Eigenvektoren. Haben wir die Eigenwerte $\vec{e}_k$ und die zugehörigen Eigenvektoren ω_k gefunden, so lautet die allgemeinste Lösung:

$$\vec{x}(t) \;=\; \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t)\vec{e}_k \;. \tag{8.10}$$

Bei festen Randbedingungen werden wir keinen Eigenwert $\omega = 0$ erwarten, da der zugehörige Eigenvektor eine gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes beschrieb.

Die gesuchten Lösungen erhalten wir durch eine Untersuchung der Lösungen der periodischen Randbedingungen. Wählen wir speziell die Eigenvektoren $\vec{e}_{N-l}$ mit den (unnormierten) Komponenten $\sin\frac{2\pi}{N}kl$ und betrachten den Fall N gerade. Sämtliche Schwingungen der Kette zeigen Moden bei $l = 0$ (dies entspricht bei der periodischen Kette dem Teilchen N) sowie bei $l = N/2$. Beschränken wir uns also auf die Teilchen $i = 1, \ldots, \frac{N}{2}-1$, so haben wir den Eindruck, alle Schwingungsmoden mit festgehaltenen Randatomen $i = 0$ und $i = N/2$ gefunden zu haben.

Wählen wir umgekehrt N Atome mit festgehaltenen Rändern bei $i = 0$ und $i = N+1$ und betrachten vergleichen dies mit der linearen Kette mit $2N + 2$ Atomen, wobei wir aber nur die N Moden zulassen, bei denen das Atom $2N + 2$ sowie das Atom $N + 1$ in Ruhe bleiben. Die entsprechenden Eigenwerte der Matrix $\Gamma^{\text{period}}_{2N+2}$ sind:

$$\lambda_k \;=\; 4\sin^2\frac{\pi}{2N+2}k \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

und die zugehörigen (unnormierten) Eigenvektoren sind:

$$\vec{e}_k \;=\; \begin{pmatrix} \sin\frac{\pi}{N+1}k \\ \sin\frac{\pi}{N+1}2k \\ \sin\frac{\pi}{N+1}3k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir können uns nun leicht davon überzeugen, daß diese Vektoren gerade die Eigenvektoren von Γ^{fest} mit den entsprechenden Eigenwerten sind. Damit ist auch das Problem mit festen Randbedingungen exakt gelöst.

Mathematisch haben wir folgendes Verfahren angewandt. Wir haben zunächst die Matrix Γ^{period} für $d = 2N + 2$ Dimensionen gelöst. In diesem $2N + 2$-dimensionalen Raum gibt es einen (unter Γ invarianten) N-dimensionalen Unterraum, auf dem Γ dieselbe Form wie Γ^{fest} annimmt. Diesen Unterraum, die darin liegenden Eigenvektoren und die zugehörigen Eigenwerte haben wir dann bestimmt.

Die Matrix Γ^{period} hat neben der erwähnten Invarianz unter Translationen noch eine Spiegelungsinvarianz $i \to N - i$, realisiert durch die folgende Matrix P:

$$P \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Komponente N bleibt bei dieser Spiegelung immer erhalten, und für N gerade auch die Komponente $N/2$. Es gilt also

$$\Gamma P \;=\; P\Gamma \; .$$

Wählen wir nun N gerade und betrachten den $(N/2)-1$-dimensionalen Teilraum, der unter P ungerade ist, so hat Γ^{period} auf diesem antisymmetrischen Unterraum dieselbe Form wie Γ^{fest}.

Kapitel 9

Die schwingende Saite

Wir wollen in diesem Kapitel den Kontinuumsgrenzfall der linearen Kette mit N harmonisch gekoppelten Massepunkten betrachten. Formal bedeutet dies $N \to \infty$, $l \to 0$ mit $(N+1)l = L$ der Gesamtlänge der Saite. Wir konzentrieren uns dabei nur auf die transversalen Schwingungen der Saite.

9.1 Die Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite können wir durch verschiedene Verfahren ableiten. Einerseits können wir von der linearen Kette mit N Massepunkten ausgehen, und die oben angegebenen Grenzfälle vornehmen. Dies werden wir zunächst untersuchen. Ein weiteres Verfahren besteht darin, die Bewegungsgleichungen direkt aus den Spannungsverhältnissen entlang der Saite abzuleiten. Dies werden wir im Anschluß kurz skizzieren.

Wir bezeichnen die Auslenkung der Kette aus ihrer Ruhelage am i-ten Punkt zunächst durch $\hat{\varphi}_i$. Die Bewegungsgleichung der linearen Kette lautet somit

$$\ddot{\hat{\varphi}}_i \;=\; \frac{D}{m}(\hat{\varphi}_{i+1} - 2\hat{\varphi}_i + \hat{\varphi}_{i-1}) \;.$$

Nun definieren wir eine Variable $\varphi(x)$, wobei x die Koordinate entlang der Kette bezeichnet und $0 \le x \le L$ gilt. Für den i-ten Punkt ist daher

$$x \;=\; \frac{i}{N+1}\,L \;.$$

Statt also die Teilchen mit einer Variablen $i = 1, \ldots, N$ durchzunummerieren, bezeichnen wir sie nun durch ihre Position x entlang der Kette. x nimmt dabei nur die oben angegebenen diskreten Werte an, aber für $N \to \infty$ (und $l \to 0$ mit $(N+1)l = L$) liegen die Positionen der Teilchen immer dichter auf der x-Achse.

Bisher haben wir noch keine Randbedingungen berücksichtigt. Bei einer fest eingespannten linearen Kette können wir wieder eine 0-te Position definieren, die der linken Aufhängung entspricht, und eine $N+1$. Position, die der rechten Aufhängung entspricht. Für die Variable x sind dies die Werte $x = 0$ und $x = L$. Die festen Randbedingungen, bei denen die Saite also am Rand eingespannt ist, bedeuten

$$\varphi(0) \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad \varphi(L) \;=\; 0\;. \tag{9.1}$$

Die Bewegungsgleichung nimmt für die Variable $\varphi(x)$ die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi(x,t) \;=\; \frac{D}{m}(\varphi(x+\epsilon) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\epsilon))$$

mit

$$\epsilon \;=\; \Delta x \;=\; \frac{L}{N+1}\;.$$

Wir definieren nun

$$c^2 \;=\; \frac{D}{m}\epsilon^2 \tag{9.2}$$

und erhalten für die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) \;=\; c^2\,\frac{\varphi(x+\epsilon,t) - 2\varphi(x,t) + \varphi(x-\epsilon,t)}{\epsilon^2}\;.$$

Der Kontinuumslimes läßt sich nun einfach durchführen: Er ist durch $\epsilon \to 0$ gegeben. In diesem Fall wird der Quotient auf der rechten Seite dieser Gleichung zum zweiten Differentialquotienten:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\varphi(x+\epsilon,t) - 2\varphi(x,t) + \varphi(x-\epsilon,t)}{\epsilon^2} \;=\; \frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}\;. \tag{9.3}$$

Wir erhalten als Differentialgleichung für die schwingende Saite:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) \;=\; c^2\,\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial x^2}\;.$$

Wir erkennen nun auch in der Matrix Γ der linearen Kette die diskrete Version der zweiten Ableitung entlang der Kette. Γ ist der zweite Differenzenquotient für einen „Abstand“ 1.

Beachtung verdient noch die Variable c, die in Gleichung (9.2) definiert wurde. Zunächst hat man den Eindruck, daß im Grenzfall $\epsilon \to 0$ auch $c \to 0$. Allerdings müssen wir uns überlegen, was die Größen D und m in diesem Grenzfall bedeuten sollen. m ist die Masse eines einzelnen Punktteilchens entlang der Kette, d.h. Nm ist die Gesamtmasse der Kette. Damit die Gesamtmasse der Saite endlich ist, muß die

Masse der einzelnen Teilchen in diesem Grenzfall gegen Null gehen, d.h. die Teilchen müssen immer leichter werden:

$$m \;=\; \frac{\text{Masse der Saite}}{N} \;\approx\; \frac{\text{Masse der Saite}}{L}\epsilon \;=\; \rho\epsilon \;,$$

wobei ρ die Massendichte der Saite bezeichnet. m ist also proportional zu ϵ.

Für die „Federkonstante“ D können wir eine ähnliche Überlegung anstellen: D ist ein Maß für die Kraft, mit der ein Teilchen i zurückgetrieben wird, wenn die Auslenkung relativ zu seinem Nachbarteilchen

$$\Delta\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_i - \hat{\varphi}_{i-1} \;=\; \varphi(x) - \varphi(x-\epsilon) \;\approx\; \epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

ist. Damit die Kette eine endliche Auslenkung hat, muß die Ableitung von φ endlich bleiben. Die rücktreibende Kraft muß daher immer stärker werden, je mehr Teilchen entlang der Kette sind:

$$D \to \infty \qquad \text{bzw. genauer} \qquad D\epsilon \;=\; \text{const.}\;.$$

Diese Vorstellung stimmt auch damit überein, daß die Federkonstante einer Feder sich verdoppelt, wenn man die Feder (aus gleichem Material) in ihrer Länge halbiert. $1/D$ ist somit ein Maß für die Dehnbarkeit einer Feder der Länge ϵ und führt man eine Dehnbarkeitsdichte $\delta = 1/(D\epsilon)$ ein, so bleibt δ im Grenzfall $\epsilon \to 0$ konstant, d.h. $D\epsilon = 1/\delta$ bleibt konstant.

Aus diesen Überlegungen erkennt man, daß die Variable c endlich bleibt. c ist die einzige Größe, die das Verhalten der schwingenden Saite bestimmt. c hat die Dimension einer Geschwindigkeit und entspricht der Ausbreitung einer Störung entlang der Saite. Die „mikroskopischen Größen“ D (Wechselwirkung zwischen Atomen), m (Masse der einzelnen Atome) und ϵ (Abstand der Atome) bleiben unbeobachtbar. Lediglich die „makroskopischen Größen“ $m/\epsilon = \rho$ (die Massendichte) und $D\epsilon = 1/\delta = c^2\rho$ sind beobachtbar. Die Unabhängigkeit der makroskopischen Saite unter einer gleichzeitigen Transformation der mikroskopischen Variablen

$$\epsilon \to \lambda\epsilon \qquad N \to \frac{1}{\lambda}N \qquad m \to \lambda m \qquad D \to \frac{1}{\lambda}D$$

ist ein Beispiel für eine sogenannte *Renormierungsgruppentransformation.*

Im folgenden ist der Ausgangspunkt unserer Überlegungen also die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t) \;=\; c^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\;. \tag{9.4}$$

Die zweite partielle Ableitung von $\varphi(x,t)$ nach der Koordinate x beschreibt die Krümmung der Saite an der Stelle x. Die obige partielle Differentialgleichung besagt also, daß die Beschleunigung der Auslenkung an der Stelle x proportional zur Krümmung der Saite an der entsprechenden Stelle ist. Über diese Interpretation wird die Bewegungsgleichung der schwingenden Saite auch oft direkt abgeleitet.

9.2 Lösung der Saitengleichung

Gleichung (9.4) ist eine partielle, homogene, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Variablen. Es gibt viele Standardverfahren, eine solche Gleichung zu lösen, und wir wollen an dieser Stelle mehrere dieser Verfahren untersuchen. Bei allgemeineren Differentialgleichungen dieser Art kann je nach konkreter Problemstellung eines der folgenden Verfahren zum Ziel führen.

9.2.1 Lösung durch laufende Wellen

Wir lassen zunächst die Randbedingungen unberücksichtigt und versuchen eine allgemeine Lösung der obigen *Wellengleichung* zu finden. Dabei gehen wir von der physikalischen Anschauung aus.

Wenn wir an einem Ende der Saite (oder eines Seils) eine beliebige Störung auferzwingen, so haben wir den Eindruck, daß sich diese Störung mit einer konstanten Geschwindigkeit (c) entlang der Saite ausbreitet, ohne dabei ihre Form zu verändern. Die Form der Saite $\varphi(x,0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist dieselbe, wie die Form zum Zeitpunkt t, allerdings um ct entlang der x-Achse verschoben:

$$\varphi(x,0) \;=\; \varphi(x-ct,t) \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi(x,t) \;=\; \varphi(x+ct,0)\ .$$

Wir können also die Amplitude der Saite zum Zeitpunkt t durch ihren Anfangswert ausdrücken. Dies gilt für beide Bewegungsrichtungen. Ganz allgemein erwarten wir daher, daß

$$\varphi(x,t) \;=\; f(x+ct) \;+\; g(x-ct) \tag{9.5}$$

eine Lösung von Gleichung (9.4) ist. Diese Lösung läßt sich durch explizites Nachrechnen leicht verifizieren:

$$\frac{\partial f(x+ct)}{\partial x} \;=\; f'(x+ct) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial^2 f(x+ct)}{\partial x^2} \;=\; f''(x+ct)\ ,$$

entsprechend

$$\frac{\partial f(x+ct)}{\partial t} \;=\; cf'(x+ct) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial^2 f(x+ct)}{\partial t^2} \;=\; c^2 f''(x+ct)\ ,$$

also

$$\frac{\partial^2 f(x+ct)}{\partial t^2} \;=\; c^2 f''(x+ct) \;=\; c^2 \frac{\partial^2 f(x+ct)}{\partial x^2}\ .$$

Eine entsprechende Rechnung zeigt, daß auch $g(x-ct)$ Lösung ist. Was hier nicht gezeigt werden soll ist, daß es sich bei (9.5) tatsächlich um die allgemeinste Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung handelt.

Dieses „Raten“ der Lösung erscheint sehr willkürlich und der Erfolg sehr speziell an die schwingende Saite gebunden zu sein. Allerdings lassen sich nach demselben Verfahren auch spezielle Lösungen bestimmter nichtlinearer Wellengleichungen finden (beispielsweise die sogenannten Soliton-Lösungen).

Wir wollen nun die Randbedingungen (9.1) berücksichtigen. Aus $\varphi(x = 0, t) = 0$ folgt zunächst:

$$f(ct) + g(-ct) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(y) = -g(-y) \; .$$

Die allgemeinste Lösung der Wellengleichung mit $\varphi(0, t) = 0$ ist daher

$$\varphi(x, t) = f(x + ct) - f(-x + ct) \; .$$

Nun müssen wir noch verlangen, daß $\varphi(L, t) = 0$. Daraus ergibt sich:

$$f(L + ct) - f(-L + ct) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(y + 2L) = f(y) \; .$$

f ist also eine periodische Funktion mit der Periode $2L$. Die Funktionen mit dieser Eigenschaft sind:

$$f_n(y) = A_n \sin \frac{n\pi}{L} y + B_n \cos \frac{n\pi}{L} y \; ,$$

wobei n eine beliebige (positive) ganze Zahl ist. (Für negative ganze Zahlen erhalten wir keine neuen Lösungen, da diese nur der Ersetzung $A \to -A$ entsprechen.) Die allgemeinste Lösung der Saitengleichung ist daher:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n \sin \frac{n\pi}{L}(x + ct) + B_n \cos \frac{n\pi}{L}(x + ct) \\ &\qquad + A_n \sin \frac{n\pi}{L}(x - ct) - B_n \cos \frac{n\pi}{L}(x - ct) \Big] \qquad (9.6) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n sin\omega_n t + b_n \cos \omega_n t) \sin k_n x \qquad (9.7) \end{aligned}$$

mit $\omega_n = n\pi c/L$ und $k_n = n\pi/L$. ω_n ist die Frequenz zum n-ten Schwingungsmod und k_n ist die sogenannte *Wellenzahl*, aus der sich die Wellenlänge λ_n der entsprechenden Konfiguration ergibt:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} \qquad \text{bzw.} \qquad k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \; .$$

Als Beziehung zwischen der Wellenzahl und der Frequenz finden wir also:

$$\omega_n = k_n c \qquad \text{bzw.} \qquad k_n = \frac{\omega_n}{c} \; .$$

Die Ähnlichkeit von (9.7) mit der linearen Kette ist offensichtlich: $\sin(n\pi x/L)$ beschreibt einen Schwingungsmod mit $n-1$ Knotenpunkten, und ω_n ist die zugehörige Schwingungsfrequenz. Der Unterschied zur linearen Kette ist lediglich, daß die Zahl der Knoten bzw. n nun beliebig groß werden kann. Es gibt also keine obere Schranke für die Wellenlänge. In der Praxis darf aber n nicht größer als die Anzahl der Teilchen sein, bzw. L/n nicht kleiner als der Abstand der Teilchen werden.

9.2.2 Lösung durch Exponentialansätze

Die Schwingungsgleichung der Saite – die sogenannte „(1+1)–dimensionale Wellengleichung“ – hat sowohl eine Translationsinvarianz bezüglich einer Zeitverschiebung, als auch (von den Randbedingungen abgesehen) eine Translationsinvarianz entlang der räumlichen Richtung. Daher wird man erwarten können, daß sowohl ein Exponentialansatz bezüglich der zeitlichen Entwicklung als auch bezüglich der räumlichen Ausdehnung zur Lösung führt. Dies wollen wir nun untersuchen.

Exponentialansatz bezüglich der zeitlichen Entwicklung

Wir machen einen Exponentialansatz bezüglich der Zeitabhängigkeit der Lösungen, da wir harmonische Schwingungen der Saite erwarten:

$$\varphi(x,t) \;=\; A(\omega,x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\;.$$

Setzen wir diesen Ansatz in die Wellengleichung ein, so folgt:

$$-\omega^2 A(\omega,x) \;=\; c^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}A(\omega,x)\;,$$

bzw.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}A(\omega,x) \;=\; -\,\frac{\omega^2}{c^2}A(\omega,x) \;=\; -\,k^2 A(\omega,x)\;.$$

Diese Differentialgleichung ist vom Typ der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators, allerdings bezieht sich die zweite Ableitung nun auf die räumliche Koordinate. Die allgemeinste Lösung ist:

$$A(\omega,x) \;=\; a(\omega)\sin kx \;+\; b(\omega)\cos kx\;.$$

An diese Lösung der Wellengleichung müssen wir nun die Randbedingungen stellen. Aus $A(\omega,0)=0$ folgt $b(\omega)=0$, und aus $A(\omega,L)=0$ folgt

$$\sin kL \;=\; 0 \qquad \text{bzw.} \qquad k_n \;=\; \frac{\pi n}{L}\;, \tag{9.8}$$

wobei n wiederum eine beliebige natürliche Zahl sein kann. Die allgemeine Lösung zu einem gegebenen n ist also:

$$\varphi(x,t) \;=\; a_n \sin k_n x \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$$

wobei a_n noch eine beliebige komplexe Integrationskonstante sein kann. Als reelle Lösung folgt also:

$$\varphi_n(x,t) \;=\; \sin k_n x \, (a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t)$$

und damit als allgemeinste Lösung:

$$\varphi(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \, (a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t) \; .$$

Die Einschränkungen an die Wellenzahlen (9.8) und die Beziehung zwischen Wellenzahl und Frequenz sind dieselben wie bei der vorherigen Lösung. Der Exponentialansatz bezüglich der Zeitentwicklung liefert also dieselben allgemeinen Lösungen.

Exponentialansatz bezüglich der räumlichen Richtung

Wir machen nun einen Exponentialansatz bezüglich der Abhängigkeit von $\varphi(x,t)$ als Funktion von x, da die Wellengleichung auch in dieser Variablen eine Translationsinvarianz besitzt:

$$\varphi(x,t) \;=\; A(k,t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \; .$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert nun:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} A(k,t) \;=\; -\, c^2 k^2 A(k,t) \;=\; -\, \omega^2 A(k,t) \; .$$

Dies ist wieder die Gleichung für einen harmonischen Oszillator mit der Frequenz ω. Die Randbedingungen $\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0$ führen wieder auf $\varphi(x,t) \;=\; A(k,t) \sin kx$ und

$$k_n \;=\; \frac{\pi}{L} n \; .$$

Es folgen dieselben allgemeinen Lösungen wie vorher.

Exponentialansatz bezüglich beider Variablen

Wir können auch direkt einen Exponentialansatz bezüglich der Zeitabhängigkeit *und* der räumlichen Abhängigkeit machen:

$$\varphi(x,t) \;=\; A(k,\omega) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx + \mathrm{i}\omega t} \; . \tag{9.9}$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert die Beziehung:

$$\omega^2 \;=\; c^2k^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \omega \;=\; \pm\, ck \;.$$

Ist diese Beziehung erfüllt, so ist (9.9) immer eine Lösung der Bewegungsgleichung. Wir müssen nun noch die Randbedingungen berücksichtigen, was wiederum die Wellenzahl einschränkt:

$$k_n \;=\; \frac{\pi}{L}n$$

Die Lösungsmenge ist dieselbe wie schon zuvor.

Der Exponentialansatz bezüglich beider Variablen t und x führt daher am schnellsten zum Ziel. Das eigentliche Problem in allen Fällen ist die Einbeziehung der Randbedingungen.

Kapitel 10

Der starre Körper

Der „starre Körper“ ist ein weiteres idealisiertes System der klassischen Mechanik. Während beim Massepunkt nur die Bewegung des Schwerpunktes wesentlich ist und jeglicher Einfluß von Ausdehnung und Form vernachlässigt wurde, ist der starre Körper dadurch definiert, daß alle Abstandsverhältnisse zwischen den Teilen des Körpers erhalten bleiben. Wir können also zunächst annehmen, daß der starre Körper ebenfalls aus Punktteilchen besteht, und daß die relativen Abstände zwischen diesen Punktteilchen konstant sind. In einer Art Kontinuumslimes kann man dann die Anzahl der Teilchen gegen Unendlich gehen lassen und so zu einem idealisierten, kontinuierlichen starren Körper gelangen.

Die Annahme vollkommender Starrheit ist ebenfalls eines Idealisierung, die beispielsweise in einer relativistischen Kinematik nicht mehr aufrecht gehalten werden kann: Es gibt keinen relativistischen starren Körper. Der Grund ist, daß sich in der speziellen Relativitätstheorie Signale (bzw. Energie) nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Erhält ein starrer Körper aber an einem Ende einen Stoß, der ihn in Bewegung versetzt, so kann sich dieses „Signal“ nur mit Lichtgeschwindigkeit entlang des Körpers ausbreiten. Das andere Ende setzt sich also erst später in Bewegung. Während dieser Zeit durchläuft den Körper eine Stoßwelle, die ihn komprimiert bzw. dehnt, was im Widerspruch zur absoluten Starrheit steht. Anders ausgedrück, die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen in einem absolut starren Körper ist unendlich, was der speziellen Relativitätstheorie widerspricht.

Die Dynamik des starren Körpers ist selbst für den kräftefreien Fall schon recht kompliziert und wird Gegenstand der TP-1-Vorlesung sein. Wir wollen uns hier auf die Kinematik des starren Körpers beschränken, d.h. insbesondere die möglichen Konfigurationen, Bewegungsformen sowie Observable, die bei Punktteilchen nicht vorhanden sind. Bei dieser Gelegenheit werden wir die Gruppe der Drehungen – die SO(3) bzw. O(3) (Drehungen plus Raumspiegelungen) – genauer behandeln. Dies wird uns auch zu einer neuen Definition von „Skalar, Vektor, Pseudovektor, Tensor, etc.“ führen. Die-

se Überlegungen werden sich als hilfreich bei der Untersuchung des Trägheitstensors erweisen.

10.1 Konfigurationsraum des starren Körpers

10.1.1 Die Bewegung des Schwerpunktes

Wir haben schon früher bei der Bewegungsgleichung von mehreren Punktteilchen gesehen, daß bei Gültigkeit des dritten Newtonschen Gesetzes (actio=reactio) für die Wechselwirkung zwischen den Teilchen und fehlenden äußeren Kräften der Schwerpunkt eine geradlinig gleichförmige Bewegung ausführt. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist eine Erhaltungsgröße. Stellt man sich den konstanten Abstand zwischen den Massepunkten als Folge einer Wechselwirkung vor, welche die relative Bewegung der Teilchen einfriert und ihre Lage auf einen bestimmten Wert fixiert, so gilt das dritte Newtonsche Gesetz. Der Schwerpunkt von N Massepunkten mit Massen m_i ist gegeben durch:

$$\vec{R} \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i}{\sum_i m_i} \;=\; \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \;.$$

Hierbei ist $\vec{x}_i$ der Ortsvektor dieser Massepunkte bezüglich eines ausgezeichneten Koordinatenursprungs. Der Schwerpunkt selber hängt von diesem Ursprung natürlich nicht ab, sondern nur seine Beschreibung durch einen Vektor $\vec{R}$. Wählen wir einen anderen Koordinatenursprung, so daß der alte Ursprung bezüglich des neuen Systems dem Vektor $\vec{a}$ entspricht, so sind die Positionen der Teilchen im neuen System $\vec{x}_i' = \vec{a}+\vec{x}_i$. Offensichtlich führt dies aber zum neuen Schwerpunktsvektor $\vec{R}' = \vec{a} + \vec{R}$, was demselben Punkt entspricht.

Im Kontinuumsgrenzfall beschreiben wir die Masseverteilung in einem Körper durch eine Massendichte $\rho(\vec{x})$. Die Gesamtmasse ist

$$M \;=\; \int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x}) \;.$$

Das Integral erstreckt sich formal über den gesamten Raum, effektiv jedoch nur über das Volumen des starren Körpers. Im Grenzfall eines Punktteilchens ist für $\rho(\vec{x})$ wieder die (dreidimensionale) δ-Funktion einzusetzen. Für den Schwerpunkt ergibt sich:

$$\vec{R} \;=\; \frac{1}{M}\int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})\, \vec{x} \;.$$

Der Wert dieses Integals ist ein (koordinatenbasisunabhängiger) Vektor. Will man die Komponente entlang einer Richtung – beispielsweise $\vec{e}_1$ – bestimmen, so gilt:

$$R_1 \;=\; \vec{e}_1 \cdot \vec{R} \;=\; \frac{1}{M}\int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})\, \vec{e}_1 \cdot \vec{x} \;=\; \frac{1}{M}\int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})\, x_1 \;.$$

Hierbei handelt es sich um ein gewöhnliches Integral.

Wir hatten schon gesehen, daß ohne äußere Kräfte der Schwerpunkt eine geradlinige, gleichförmige Bewegung ausführt. Aber selbst bei Anwesenheit äußerer Kräfte, wie z.B. der Kreisel im Gravitationsfeld der Erde, ist der Freiheitsgrad der Schwerpunktsbewegung ein Teil des Konfigurationsraumes des Kreisels. Dieser Konfigurationsraum entspricht dem Konfigurationsraum eines Punktteilchens, d.h., es handelt sich um einen $\mathbb{R}^3$.

10.1.2 Der „innere“ Konfigurationsraum des starren Körpers

Wir wählen nun den Schwerpunkt eines starren Körpers als Ursprung eines Bezugssystems und fragen nach den verbleibenden Freiheitsgraden bzw. nach dem Raum der möglichen Konfigurationen des starren Körpers. Dazu definieren wir uns ein orthonormales Koordinatensystem, das mit dem Körper fest verbunden ist, d.h. die relative Lage der Massepunkte des Körpers bezüglich dieses Koordinatensystems bleibt fest. Ein solches orthonormales Koordinatensystem ist eindeutig durch die Vorgabe von drei Massepunkten festgelegt. Umgekehrt, fixieren wir drei (generische) Massepunkte eines starren Körpers, so liegt seine Lage im Raum fest: es gibt keine weiteren Freiheitsgrade. Wir können also den inneren Konfigurationsraum des starren Körpers mit den möglichen Lagen eines orthonormalen Koordinatensystems bei vorgegebenem Ursprung identifizieren.

Besteht der starre Körper nur aus einem Massepunkt, so ist dadurch nur der Ursprung des Bezugssystems festgelegt, aber keine Richtungen der Koordinatenachsen. Besteht der starre Körper aus zwei Massepunkten, so liegt neben dem Ursprung noch eine Koordinatenrichtung fest. Es besteht noch die Freiheit einer Rotation des Koordinatensystems um diese Achse. Der innere Konfigurationsraum von zwei, starr miteinander verbundenen Massepunkten ist also eine „Richtung“ d.h. ein Punkt auf einer Kugeloberfläche.

Je zwei orthonormale Koordinatensysteme lassen sich durch eine Drehung ineinander überführen. Eine *Drehung* ist dabei eine lineare Abbildung im $\mathbb{R}^3$, bei der die Längen von Vektoren und die Winkel zwischen je zwei Vektoren unverändert bleiben. Außerdem verlangen wir von einer Drehung, daß die Orientierung einer Orthonormalbasis erhalten bleibt. Diese Drehungen bilden eine Gruppe, die sogenannte SO(3), die Gruppe der speziellen orthogonalen Transformationen in 3 Dimensionen. Im nächsten Abschnitt werden wir diese Gruppe genauer untersuchen.

Abschließend können wir festhalten, daß der Konfigurationsraum eines starren Körpers durch

$$\text{Konfigurationsraum des starren Körpers} \;\simeq\; \mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$$

gegeben ist. $\mathbb{R}^3$ bezieht sich dabei auf die Bewegung des Schwerpunkts, SO(3) bezeichnet die möglichen inneren Konfigurationen, die in Eins-zu-Eins-Beziehung mit den möglichen Lagen eines (orientierten) orthonormalen Koordinatensystems stehen.

10.2 Die Drehgruppe SO(3)

Die Drehgruppe SO(3) spielt in der Physik in mehrfacher Hinsicht eine besondere Rolle. Der innere Konfigurationsraum des starren Körpers ist nur ein Beispiel. Viele physikalische Systeme sind symmetrisch unter Rotationen, so daß beispielsweise die Lösungsmenge von Differentialgleichungen eine (endlichdimensionale) Darstellung dieser Drehgruppe sein muß, was die Lösungen zu solchen Gleichungen sehr einschränkt. In der Quantenmechanik hängt die Klassifikation der möglichen Darstellungen der Drehgruppe auf dem Raum der Zustände mit den möglichen Spin- und Drehimpulsquantenzahlen zusammen, was wiederum sowohl für die Klassifikation von Teilchen wie auch für die möglichen Zustände in atomaren Systemen von Bedeutung ist.

10.2.1 Gruppen und Darstellungen

Zunächst wiederholen wir kurz die Axiome für eine Gruppe:

Eine Gruppe $(G, \cdot)$ ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$, so daß die folgenden Axiome gelten:

1. Assoziativität: Für alle $g_i \in G$ ist $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$.
2. Existenz eines (eindeutigen) Einselements e: Für alle $g \in G$ ist $g \cdot e = e \cdot g = g$.
3. Existenz eines (eindeutigen) Inversen g^{-1}: Für alle $g \in G$ gibt es ein g^{-1} mit $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$.

Gilt außerdem noch

4. Kommutativität: Für alle $g_i \in G$ ist $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$,

so bezeichnet man die Gruppe als kommutative Gruppe bzw. als *Abelsche Gruppe*. Um keine Verwechslung mit dem Skalarprodukt zu provozieren, lassen wir den Punkt $\cdot$ als Multiplikation von Gruppenelementen im folgenden weg.

Unter einer *linearen Darstellung* einer Gruppe G auf einem Vektorraum V versteht man eine Abbildung $\rho : G \to \mathrm{End}(V)$, so daß $\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2)$. (Strenggenommen müßte man noch Darstellungen bezüglich der Links- bzw. Rechtsmultiplikation in V unterscheiden, was hier aber nicht geschehen soll.) Bei einer linearen Darstellung werden die Gruppenelemente also durch lineare Abbildung auf V („Matrizen“) repräsentiert, und die Gruppenmultiplikation entspricht der normalen Matrixmultiplikation. Wir betrachten im folgenden nur lineare Darstellungen, so daß wir den Zusatz „linear“ in Zukunft weglassen.

Zu jeder Darstellung $g \to \rho(g)$ ist auch $g \to \rho'(g) = R^{-1}\rho(g)R$ (R Endomorphismus auf V) eine Darstellung. Zwei Darstellungen heißen *äquivalent*, wenn sie durch einen solchen Endomorphismus ineinander überführt werden können. Gibt es auf V ein Skalarprodukt und ist R speziell eine unitäre (d.h. skalarproduktserhaltende, s.u.) Transformation, dann heißen die beiden Darstellungen ρ und ρ' *unitär äquivalent*.

10.2.2 Definition der Drehgruppe

Die dreidimensionale Drehgruppe besteht aus allen linearen Transformationen $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren erhalten. Damit sind sowohl die Längen von Vektoren erhalten (Skalarprodukt eines Vektors mit sich selber) wie auch die Winkel zwischen Vektoren (Skalarprodukt zwischen verschiedenen Vektoren). Es soll also gelten:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \;=\; (R\vec{x}) \cdot R\vec{y} \; . \tag{10.1}$$

Die transponierte Matrix A^T zu einer Matrix A ist durch folgende Eigenschaft definiert:

$$(A\vec{x}) \cdot \vec{y} \;=\; \vec{x} \cdot A^T\vec{y} \qquad \forall \;\; \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \; .$$

Damit folgt aus obiger Gleichung

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \;=\; \vec{x} \cdot R^T R\vec{y} \quad \Longrightarrow \quad R^T R \;=\; \mathbb{1} \; . \tag{10.2}$$

Äquivalent können wir auch schreiben:

$$R^T R \;=\; \mathbb{1} \quad \Longrightarrow \quad R^T \;=\; R^{-1} \; .$$

Wegen der Bedeutung dieser Gleichung, wollen wir sie auch noch in Komponentenschreibweise herleiten. Die definierende Eigenschaft einer Drehung (10.1) bedeutet in Komponenten:

$$\sum_i x_i y_i \;=\; \sum_i (R\vec{x})_i (R\vec{y})_i \;=\; \sum_i \sum_{k,l} R_{ik} x_k R_{il} y_l \;=\; \sum_i \sum_{k,l} x_k (R^T)_{ki} R_{il} y_l \; .$$

Für die Gleichheit auf beiden Seiten muß gelten:

$$\sum_i (R^T)_{ki} R_{il} \;=\; \delta_{kl} \; .$$

Dies ist Gleichung (10.2) in Komponentenschreibweise. Die Menge von Matrizen R, die diese Eigenschaft erfüllen, bezeichnet man als *orthogonale* Matrizen. Sie bilden die Gruppe O(3), die orthogonale Gruppe in 3 Dimensionen.

Wir wollen nun untersuchen, was die Erhaltung der Orientierung für R bedeutet. Dazu bilden wir die Determinante von Gleichung (10.2) und berücksichtigen, daß die Determinante einer transponierten Matrix gleich der Determinante der nichttransponierten Matrix ist:

$$\det R^T R \;=\; \det \mathbb{1} \qquad \text{bzw.} \qquad (\det R)^2 \;=\; 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \det R \;=\; \pm 1 \; .$$

Offensichtlich gibt es zwei Arten von winkel- und längenerhaltenden Transformationen: solche mit Determinante 1 – diese sind Drehungen, die die Orientierung des Koordinatensystems erhalten und die stetig mit der Identitätstransformation verbunden werden

können –, und solche mit Determinante -1 – hierbei handelt es sich um Drehungen plus eine orientierungsändernde Transformation, beispielsweise eine Spiegelung der 1-Achse.

Die orthogonalen Matrizen R mit Determinante 1 bilden eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe O(3), die man als *spezielle orthogonale Gruppe* SO(3) bezeichnet. Wir haben ganz allgemein die Gruppe der orthogonalen Transformationen als die Menge der linearen skalarprodukterhaltenden Abbildungen auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert. Dabei handelt es sich natürlich um 3×3–Matrizen, d.h. wir haben gleichzeitig eine Darstellung der Gruppe SO(3). Diese Darstellung bezeichnet man als *fundamentale* Darstellung oder auch als *definierende* Darstellung.

10.2.3 Darstellung der Drehgruppe

Wir wollen nun versuchen, die orthonormalen Matrizen etwas genauer anzugeben bzw. durch Größen zu parametrisieren, die eine direkte Bedeutung haben. Beispielsweise läßt sich jede Drehung durch Angabe einer Drehachse $\vec{v}$ mit $|\vec{v}| = 1$ und eines Drehwinkels $0 \leq \varphi \leq \pi$ charakterisieren. Die Transformationen zu größeren Drehwinkeln $\pi < \varphi < 2\pi$ erhält man auch durch Umkehrung des Vektors $\vec{v}$, d.h. durch eine Drehung um den „negativen“ Winkel.

Wir betrachten einen beliebigen Vektor $\vec{x}$ und sein Bild unter der Drehung um die $\vec{v}$-Achse um den Winkel φ. Zunächst definieren wir uns ein orthonormales Bezugssystem aus den vorhandenen Vektoren:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{v} \\
\vec{e}_2 &= \frac{1}{|\vec{x} \times \vec{v}|}(\vec{v} \times \vec{x}) \\
\vec{e}_3 &= \frac{1}{|\vec{x} \times \vec{v}|}((\vec{v} \times \vec{x}) \times \vec{v}) \;=\; \frac{1}{|\vec{x} \times \vec{v}|}(\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v})
\end{aligned}$$

Der Vektor

$$\vec{x} \;=\; |\vec{x}|\, \vec{e}_3 + (\vec{x} \cdot \vec{v})\, \vec{e}_1$$

wird in den Vektor

$$\vec{x}' \;=\; \cos\varphi\, |\vec{x}|\, \vec{e}_3 + \sin\varphi\, |\vec{x}|\, \vec{e}_2 + (\vec{x} \cdot \vec{v})\, \vec{e}_1$$

transformiert. Ersetzen wir $\vec{e}_i$ wieder durch Linearkombinationen aus $\vec{x}$ und $\vec{v}$ so folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= \cos\varphi\, (\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}) + \sin\varphi\, (\vec{v} \times \vec{x}) + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} \\
&= \vec{x}\, \cos\varphi \;+\; (\vec{v} \times \vec{x})\, \sin\varphi \;+\; \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{x})\, (1 - \cos\varphi)\ .
\end{aligned}$$

In Komponenten bedeutet diese Gleichung:

$$\begin{aligned}
x_i' &= x_i \cos\varphi \;+\; \epsilon_{ikj} v_k x_j \sin\varphi \;+\; v_i(v_j x_j)(1 - \cos\varphi) \\
&= R_{ij} x_j
\end{aligned}$$

mit

$$R_{ij} \;=\; \delta_{ij}\cos\varphi \;+\; \epsilon_{ikj}v_k\sin\varphi \;+\; v_iv_j(1-\cos\varphi)\;. \tag{10.3}$$

Dies ist die Komponentendarstellung einer Drehmatrix, die eine Drehung um den Einheitsvektor $\vec{v}$ mit Winkel φ beschreibt, in der Basis, in der $\vec{v}$ die Komponenten v_i hat. R_{ij} hat offensichtlich einen symmetrischen Anteil (der erste und der dritte Term auf der rechten Seite) und einen antisymmetrischen Anteil (der mittlere Term auf der rechten Seite). Betrachten wir speziell eine Drehung um die 3-Achse, also $\vec{v} = \vec{e}_3$, so erhalten wir:

$$R^3(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein ist

$$R \;=\; \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} + (1-\cos\varphi) \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix}$$

Als Test können wir uns davon überzeugen, daß die inverse Transformation ($\vec{v}$ bleibt dieselbe Rotationsachse, $\varphi \to -\varphi$) gerade die transponierte Matrix liefert.

Dies ist natürlich nur eine Möglichkeit, eine Drehmatrix zu parametrisieren. Es gibt viele andere Standarddarstellungen. Eine bekannte ist die Parametrisierung einer Drehmatrix durch die sogenannten *Euler-Winkel*. Dabei zerlegt man eine allgemeine Drehung in eine Drehung um die 3-Achse (Winkel $0 \le \psi < 2\pi$), um die 1-Achse (Winkel $0 \le \theta \le \pi$) und wieder um die 3-Achse (Winkel $0 \le \varphi < 2\pi$). Die drei Winkel (φ, θ, ψ), die Euler-Winkel, legen die Drehung eineindeutig fest.

Welche Form der Parametrisierung man wählt ist eine Frage der Bequemlichkeit und hängt von der konkreten Problemstellung ab. Wichtig ist, daß jede Drehung durch drei reelle Zahlen gekennzeichnet werden kann, d.h. es handelt sich um eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Gruppen mit der zusätzlichen Eigenschaft, eine Mannigfaltigkeit zu sein, bezeichnet man als *Lie-Gruppen*. Die Gruppe der Drehungen im $\mathbb{R}^3$ ist also eine Lie-Gruppe.

10.3 Skalare, Vektoren, Tensoren etc.

Oft ist es hilfreich, physikalische Größen nach ihrem Transformationsverhalten unter bestimmten Gruppen zu klassifizieren. Besonders häufig handelt es sich dabei um die skalarprodukterhaltenden Gruppen des Ortsraumes, d.h. die SO(3) bzw. die O(3). Generell sollte man zunächst zwischen passiven und aktiven Transformationen unterscheiden:

- Passive Transformationen R bestehen aus einer Transformation der Basisvektoren, d.h. $(V, \{\vec{e}_i\})$ geht über in $(V, \{\vec{e}'_i = R_{ij}\vec{e}_j)$. Die physikalischen Größen, beispielsweise Vektoren $\vec{x}$, bleiben dabei unverändert, ihre Koordinaten bezüglich der Basisvektoren ($\{x_i\}$ bzw. $\{x'_i\}$) verändern sich jedoch. Solche Transformationen hatten wir im Zusammenhang mit Basistransformationen untersucht und dabei gesehen, daß sich die Komponenten von Vektoren umgekehrt transformieren wie die Basisvektoren.

- Aktive Transformationen R bestehen aus Transformationen des Ortsraums selber, d.h. $R : V \to V$. Ein Vektor $\vec{x}$ wird in einen neuen Vektor $\vec{x}' = R\vec{x}$ überführt. Es handelt sich ganz allgemein um eine lineare Abbildung des Vektorraums auf sich, die unabhängig von irgendeiner Wahl von Basisvektoren ist. Ist eine Basis gegeben, so werden die Basisvektoren wie jeder Vektor im allgemeinen mittransformiert, so daß die Komponenten des Vektors $\vec{x}$ in der alten Basis x_i gleich den Komponenten von $\vec{x}'$ in der neuen Basis sind, also unveränder bleiben.

Aktive oder passive Transformationen unterscheiden sich oft nur in einer Ersetzung von R durch R^{-1}. Passive Transformationen beziehen sich immer nur auf die Komponenten von Vektoren bzw. die Basisvektoren selber, wohingegen aktive Transformationen physikalische Veränderungen bedeuten können.

Wir betrachten zunächst einige Beispiele, wobei wir uns auf das Verhalten unter aktiven Transformationen beziehen.

- Der Betrag eines Vektors $|\vec{x}|$ oder auch das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x} \cdot \vec{y}$ verändern sich offensichtlich bei einer Drehung bzw. Spiegelung nicht. Solche Größen bezeichnet man als *Skalare*. Physikalische Beispiele für skalare Größen sind die Temperatur, die kinetische Energie, der Betrag der Geschwindigkeit.

- Ein *Pseudoskalar* ist eine Größe, die sich unter Drehungen nicht verändert, unter orientierungsverändernden Transformationen jedoch das Vorzeichen umkehrt. D.h. unter der Gruppe SO(3) verhält sich ein Pseudoskalar wie ein Skalar, unter der Paritätstransformation $\vec{x} \to -\vec{x}$ geht ein Pseudoskalar jedoch in sein Negatives über.

  Ein Beispiel für ein Pseudoskalar ist das Spatprodukt von drei Vektoren

  $$v \;=\; \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \;=\; \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k \;.$$

  $|v|$ ist das Volumen des Parallelepipeds, das von $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ aufgespannt wird. v ist positiv, wenn die drei Vektoren in der genannten Reihenfolge ein rechtshändiges Koordinatensystem aufspannen, anderenfalls ist v negativ. Unter einer Drehung verändert sich v nicht, unter einer Spiegelung verändert v jedoch sein Vorzeichen.

- Eine Größe, die sich unter Drehungen und Spiegelungen wie ein gewöhnlicher Ortsvektor transformiert, bezeichnet man als *Vektor*. Insbesondere dreht ein Vektor (im $\mathbb{R}^3$) unter einer Spiegelung sein Vorzeichen um. Beispiele für Vektoren sind das elektrische Feld $\vec{E}$, der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor $\vec{v}$ und $\vec{a}$, der Impuls $\vec{p}$.

- Wenn sich eine Größe unter Drehungen, also Elementen von SO(3), wie ein Vektor transformiert, unter Spiegelungen aber sein Vorzeichen *nicht* verändert, so spricht man von einem *Pseudo-Vektor*. Ein Beispiel für einen Pseudo-Vektor ist das Kreuzprodukt zweier Vektoren:

  $$\vec{z} \;=\; \vec{x} \times \vec{y} \;.$$

  Unter Drehungen verhält sich $\vec{z}$ wie ein gewöhnlicher Vektor, unter Spiegelungen verändert $\vec{z}$ aber sein Vorzeichen nicht. Physikalische Beispiele sind der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ und das Magnetfeld $\vec{B}$. (Die Richtungs des Magnetfeldes ergibt sich aus dem Kreuzprodukt von Stromfluß und Radiusvektor.)

- Abschließend soll noch kurz der Begriff des *Tensors* erläutert werden. Dazu zunächst ein physikalisches Beispiel: Der Zusammenhang zwischen einem elektrischen Feld $\vec{E}$ und dem in einem leitenden Material induzierten Strom $\vec{j}$ ist (für nicht zu große Felder) durch

  $$\vec{j} \;=\; \sigma\vec{E}$$

  gegeben. Für isotrope – d.h. richtungsunabhängige – Materialien ist σ einfach eine Zahl, und der Strom $\vec{j}$ hat dieselbe Richtung wie das angelegte elektrische Feld $\vec{E}$. σ bezeichnet man als die Leitfähigkeit des Materials. Für manche Materialien beobachtet man jedoch eine Richtungsabhängigkeit, und $\vec{j}$ hat nicht notwendigerweise dieselbe Richtung wie $\vec{E}$. In diesem Fall wird σ zu einer Matrix, d.h. in Komponenten:

  $$j_i \;=\; \sum_j \sigma_{ij} E_j \;.$$

  Nach einer Drehung des Ortsraumes ist $\vec{E}' = R\vec{E}$ und $\vec{j}' = R\vec{j}$. Entsprechend wird es auch ein transformiertes $\sigma' = \sigma^R$ geben, wobei sich der physikalische Zusammenhang zwischen den Größen nach der Transformation natürlich nicht geändert hat, d.h.

  $$\vec{j}' \;=\; \sigma'\vec{E}' \qquad \text{bzw.} \qquad R\vec{j} \;=\; \sigma^R\, R\vec{E} \;.$$

  Da $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ gilt, folgt

  $$R\sigma \;=\; \sigma^R\, R \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma^R \;=\; R\sigma\, R^T \;.$$

In Komponenten:

$$(\sigma^R)_{ij} \;=\; R_{ik}\sigma_{kl}(R^T)_{lj} \;=\; R_{ik}R_{jl}\sigma_{kl}\ .$$

Dieses Transformationsverhalten charakterisiert einen *Tensor*. Ganz allgemeine müßten wir noch Tensoren verschiedener Stufe unterscheiden – in Komponenten handelt es sich um Objekte mit verschiedener Anzahl von Indizes. Die „Anzahl" der Matrizen R, die das Transformationsverhalten bestimmen, gibt die Stufe des Tensors an.

Ganz allgemein charakterisiert man physikalische Größen also durch ihr Transformationsverhalten unter der Gruppe O(3). Damit teilt man die Größen in Darstellungen dieser Gruppe ein. Die Begriffe Skalar, Vektor, Pseudo-Vektor, Tensor etc. kennzeichnen die Darstellung, bezüglich der sich die jeweilige Größe transformiert.

Streng genommen müßte man noch zwischen ko- und kontravarianten Darstellungen unterscheiden, d.h. ob die Transformation durch R oder durch R^T gegeben ist (im einen Fall handelt es sich um eine Darstellung bezüglich Linksmultiplikation, im anderen Fall um eine Darstellung bezüglich Rechtsmultiplikation). Oft kennzeichnet man dies dadurch, daß die Indizes nach oben (kontravariantes Transformationsverhalten) bzw. nach unten schreibt. Bei anderen Gruppen muß möglicherweise noch zwischen weiteren Darstellungen unterschieden werden, beispielsweise komplex-konjugierten Darstellungen.

Außerdem kann man noch untersuchen, welche der Darstellungen irreduzibel sind. Unter der Drehgruppe beispielsweise läßt sich ein Tensor noch in seinen antisymmetrischen und symmetrischen Anteil zerlegen. Außerdem zerfällt der symmetrische Anteil in die Spur der Matrix und einen spurfreien symmetrischen Anteil. Diese sind dann irreduzible Darstellungen unter der Drehgruppe. Mann spricht auch manchmal von *sphärischen Tensoren*. Meint man allgemeiner das Transformationsverhalten unter Basistransformationen, so spricht man von *kartesichen Tensoren*. Wir werden diese Zerlegung weiter unten noch genauer untersuchen.

Der Begriff des *Vektors* hat also in diesem Fall eine Doppelbedeutung. Einerseits versteht man unter einem Vektor allgemein ein Element eines Vektorraums. Vektoren lassen sich also addieren und mit Elementen eines Zahlkörpers multiplizieren. Dies gilt allerdings für Matrizen ebenfalls. Andererseits versteht man konkreter unter einem (kovarianten) Vektor ein Element des Vektorraums V in der definierenden (fundamentalen) Darstellung einer Gruppe G. Damit ist aber auch eine Darstellung von G auf V^* (dem dualen Vektorraum) gegeben, so daß man die Elemente in V^* als kontravariante Vektoren bezeichnet. Elemente der trivialen Darstellung der Gruppe ($\rho(g) = 1$) bezeichnet man als Skalare. Ist ein Vektorraum V gegeben, so lassen sich auch beliebige Tensorprodukte $V \otimes V$, $V \otimes V^*$ etc. definieren, auf denen (nicht notwendigerweise irreduzible) Darstellungen der Gruppe G induziert sind. Die Elemente dieser Tensorprodukte bezeichnet man als *Tensoren* bezüglich der Gruppe G.

10.4 Zerlegung eines Tensors unter Drehungen – Invariante

Wir wollen das Verhalten eines Tensors 2. Stufe T_{ij} unter Drehungen noch genauer untersuchen. Dabei wollen wir zunächst sogenannte Invariante finden, d.h. Ausdrücke,

die sich aus T berechnen lassen, und die sich unter einer Drehung nicht verändern. Von solchen Größen wir man eine eigentliche physikalische Bedeutung erwarten, wohingegen nicht-invariante Anteile eines Tensors von der Wahl der Koordinatenbasis abhängen. Anschließend wollen wir untersuchen, inwieweit sich die einzelnen Komponenten des Tensors noch weiter in Klassen einteilen lassen, die sich bei Drehungen nur untereinander transformieren.

10.4.1 Invariante eines Tensors 2. Stufe

Wir wissen, daß die Eigenwerte einer Matrix sich unter orthogonalen Transformationen nicht verändern. Die Eigenwerte scheinen also eine besondere Bedeutung zu haben. Allerdings lassen sich die Eigenwerte oftmals nur schwer bestimmen, und für die Verallgemeinerungen in höheren Dimensionen ist es meist überhaupt nicht mehr möglich, die Eigenwerte analytisch zu berechnen. Daher ist es sinnvoll, andere Größen aus T zu berechnen, die unter Drehungen invariant sind, die sich aber algorithmisch bestimmen lassen.

Zwei bekannte Beispiele von Invarianten einer Matrix sind die Spur und die Determinante der Matrix:

$$t_1 \;=\; \mathrm{Sp}\; T \;=\; \sum_i T_{ii} \qquad \text{und} \qquad t_3 \;=\; \det T \;.$$

Im ersten Fall ist die Zyklizität der Spur der Grund für die Invarianz, d.h., es gilt allgemein

$$\mathrm{Sp}\; A\,B \;=\; \mathrm{Sp}\; B\,A$$

und daher wegen $R^T\,R = \mathbb{1}$:

$$\mathrm{Sp}\; (R^T\,T\,R) \;=\; \mathrm{Sp}\; (R\,R^T\,T) \;=\; \mathrm{Sp}\; T \;.$$

Die Invarianz der Determinante folgt aus dem Determinantenmultiplikationssatz:

$$\det\,(A\,B) \;=\; (\det\,A)\;(\det\,B)$$

und daher wegen $\det\,R = \det R^T = 1$:

$$\det\,(R^T\,T\,R) \;=\; (\det\,R^T)\;(\det\,T)\;(\det\,R) \;=\; \det\,T \;.$$

Sowohl die Spur als auch die Determinante lassen sich durch die Eigenwerte $\{\lambda_i\}$ der Matrix T ausdrücken:

$$t_1 \;=\; \sum_i \lambda_i \qquad \text{und} \qquad t_3 \;=\; \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \;.$$

Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß alle Koeffizienten im sogenannten charakteristischen Polynom einer Matrix ebenfalls Invariante sind. Allgemein ist das charakteristische Polynom einer Matrix T definiert durch:

$$P(\lambda, T) \;=\; \det\,(T - \lambda \mathbb{1}) \;=\; \sum_{p=0}^{N} (-1)^p \lambda^p t_{N-p} \qquad \text{mit } t_0 = (-1)^N \;.$$

Es gilt:

$$P(\lambda, R^T T R) \;=\; \det\,(R^T T R - \lambda \mathbb{1}) \;=\; \det\,(R^T (T - \lambda \mathbb{1}) R) \;=\; \det\,(T - \lambda \mathbb{1}) \;=\; P(\lambda, T)\;.$$

Diese Invarianz ist gleichbedeutend mit der Invarianz der Eigenwerte von T, da die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms die Eigenwerte festlegen und umgekehrt. Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung $P(\lambda, T) = 0$, d.h.

$$P(\lambda, T) \;=\; \prod_{i=1}^{N} (\lambda_i - \lambda)\;.$$

Während sich aber die Eigenwerte oft nicht explizit berechnen lassen, kann man die Koeffizienten t_p relativ leicht bestimmen. Ausgedrückt durch die Eigenwerte gilt offensichtlich:

$$t_p \;=\; (-1)^{N-p} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_p}\;.$$

Damit folgt, daß t_p die Summe über alle Unterdeterminanten ist, die man erhält, wenn man $N - p$ Zeilen und die zugehörigen Spalten aus der Matrix T herausnimmt.

Für 3×3-Matrizen bedeutet dies, daß wir neben der Determinante und der Spur noch eine weitere unabhängige Invariante haben:

$$\begin{aligned} t_2 \;&=\; \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} \\ &=\; (T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}) \;+\; (T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32}) \;+\; (T_{11}T_{33} - T_{13}T_{31}) \\ &=\; \lambda_1\lambda_2 \;+\; \lambda_1\lambda_3 \;+\; \lambda_2\lambda_3\;. \end{aligned}$$

t_2 bezeichnet man als die quadratische Invariante der Matrix T. t_1 ist entsprechend die lineare Invariante und t_3 die kubische.

Natürlich ist jede Funktion der Eigenwerte bzw. jede Funktion von t_1, t_2, t_3 ebenfalls eine Invariante. Man erhält allerdings so keine neuen unabhängigen Invarianten. Insbesondere sind natürlich auch die Spur von T^2 oder T^3 Invarianten, die sich durch die andere Invarianten ausdrücken lassen müssen. Folgende Relationen lassen sich leicht zeigen:

$$\text{Sp}\; T^2 \;=\; t_1^2 - 2t_2 \qquad \text{und} \qquad \text{Sp}\; T^3 \;=\; t_1^3 - 3t_2t_1 - 6t_3\;.$$

10.4.2 Zerlegung einer Matrix nach Darstellungen der Drehgruppe

Wir haben oben gesehen, daß die Spur einer Matrix eine (lineare) Invariante unter Drehungen ist, d.h.

$$T_{11} + T_{22} + T_{33} = T'_{11} + T'_{22} + T'_{33} ,$$

wobei $T' = R^T T R$ die transformierte Matrix ist. Wir könne also jede Matrix zerlegen in einen Anteil, der ihrer Spur entspricht, und einen spurfreien Anteil:

$$T = \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\, T \; \mathbb{1} + \left(T - \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\, T \; \mathbb{1}\right) ,$$

bzw.

$$T_{ij} = \frac{t_1}{3}\delta_{ij} + \left(T_{ij} - \frac{t_1}{3}\delta_{ij}\right) .$$

Der erste Teil ist proportional zur Identitätsmatrix und hat dieselbe Spur wie T. Der zeite Anteil ist eine spurfreie Matrix. Wir wissen, daß sich unter Drehungen diese beiden Anteile nicht mischen.

Es erhebt sich daher die Frage, ob sich der spurfreie Anteil einer Matrix T noch weiter zerlegen läßt, so daß die einzelnen Bestandteile sich unter einer Drehung unabhängig transformieren, sich also nicht mischen.

Dazu stellen wir zunächst fest, daß sich jede Matrix T in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen läßt:

$$T = \frac{1}{2}(T + T^T) + \frac{1}{2}(T - T^T) = S + A .$$

Symmetrische bzw. antisymmetrische Matrizen werden unter Drehungen aber wieder in symmetrische und antisymmetrische Matrizen abgebildet:

$$(R^T S R)^T = R^T S^T R = R^T S R \qquad \text{bzw.} \qquad (R^T A R)^T = R^T A^T R = -R^T A R .$$

Antisymmetrische Matrizen bilden ebenso wie symmetrische Matrizen einen Vektorraum, d.h. die Summe und das Vielfache von (anti)-symmetrischen Matrizen sind wieder (anti)-symmetrische Matrizen. Damit haben wir gezeigt, daß sich der 9-dimensionale Vektorraum der 3×3-Matrizen in drei Anteile zerlegen läßt, die unter den gewöhnlichen Transformationen zu 3-dimensionalen Drehungen jeweils in sich selber überführt werden: Ein 1-dimensionaler Unterraum (zur Spur einer Matrix), ein 3-dimensionaler Unterraum (zum antisymmetrischen Anteil einer Matrix) und ein 5-dimensionaler Unterraum (zum symmetrischen, spurfreien Anteil einer Matrix). Die folgende Zerlegung einer Matrix wird daher oft verwendet:

$$T = \frac{1}{3}\mathrm{Sp}\, T \; \mathbb{1} + \frac{1}{2}(T - T^T) + \frac{1}{2}\left(T + T^T - \frac{2}{3}\mathrm{Sp}\, \mathrm{T}\mathbb{1}\right) .$$

In mathematischer Sprechweise haben wir die 9-dimensionale Darstellung der Drehgruppe auf dem Raum der 3×3-Matrizen in irreduzible Darstellungen zerlegt.

Wir wollen den antisymmetrischen Anteil einer Matrix noch genauer untersuchen: Eine beliebige antisymmetrische 3×3-Matrix hat die Form

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_2 & 0 \end{pmatrix} \;.$$

Die Komponenten einer antisymmetrischen Matrix lassen sich also zu den Komponenten eines Vektors zusammenfassen:

$$v_i \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}A_{jk} \qquad \text{bzw.} \qquad A_{ij} \;=\; \epsilon_{ijk}v_k \;.$$

Das Transformationsverhalten vn A unter orientierungserhaltenden Drehungen ($A \to RAR^T$) entspricht der Transformation des zugehörigen Vektors ($\vec{v} \to R\vec{v}$). Diese Gleichheit folgt aus einer Identität für orthogonale Matrizen:

$$R_{mn} \;=\; \frac{1}{2}\epsilon_{mil}\epsilon_{jkn}R^T_{ij}R_{kl} \;.$$

Diese Identität läßt sich durch explizites Nachrechnen aus der bekannten Darstellung für R beweisen, was hier jedoch nicht geschehen soll.

Das Transformationsverhalten der antisymmetrischen Matrix A unterscheidet sich aber unter Spiegelungen von dem eines gewöhnlichen Vektors: A änder das Vorzeichen nicht bei einer Speigelung, d.h. der zugehörige Vektor ändert sein Vorzeichen ebenfalls nicht. Der Vektor zu einer antisymmetrischen Matrix ist daher ein Pseudo-Vektor. Umgekehrt lassen sich Pseudo-Vektoren auch als antisymmetrische Matrizen. interpretieren.

10.5 Observable des starren Körpers

Observable hatten wir allgemein definiert als Funktionen über dem Phasenraum. Bis auf den Faktor m können wir auch von Funktionen über dem „Tangentialraum des Konfigurationsraums“ sprechen, d.h. Funktionen von Koordinaten der Konfigurationen sowie der zugehörigen Geschwindigkeiten.

Im Fall des starren Körpers begegnen wir erstmals einem System, bei dem der Konfigurationsraum kein N-dimensionaler Vektorraum ist, sondern allgemein eine Mannigfaltigkeit. Da wir die Schwerpunktsbewegung immer getrennt behandeln können, handelt es sich beim Konfigurationsraum um die Mannigfaltigkeit der Gruppe SO(3). Auf dieser können wir zunächst Koordinaten definieren, beispielsweise die drei Euler-Winkel (φ, θ, ψ) oder einen Einheitsvektor und einen Winkel $(\vec{v}, \varphi)$, wobei die Menge

der Einheitsvektoren einer Kugeloberfläche entspricht, die wiederum durch zwei Winkel parametrisiert werden kann. Oft faßt man den Einheitsvektor $\vec{v}$ und den Winkel φ zu einem Vektor $\vec{\varphi} = \varphi\vec{v}$ zusammen. Die Länge dieses Vektors ist allerdings auf Werte zwischen $0 \leq |\vec{\varphi}| \leq \pi$ beschränkt. Diese Definition ist sinnvoll, da für $\varphi = 0$ die Drehmatrix *unabhängig von der Richtung von* $\vec{v}$ die Identitätsmatrix ist. Ander „Oberfläche dieser Kugel“ müssen wir jedoch die Punkte $(\vec{v}, \pi)$ und $(-\vec{v}, \pi$ identifizieren. Daher hat die Mannigfaltigkeit der SO(3) auch keinen Rand. Eine genauere Analyse zeigt, daß die Mannigfaltigkeit zu SO(3) einer 3-dimensionalen Sphäre (also einer Kugeloberfläche im 4-dimensionalen Raum) entspricht, auf der Antipoden identifiziert werden, d.h. $\mathrm{SO}(3) \simeq S^3/Z_2$.

Die genaue Form der Mannigfaltigkeit der SO(3) sowie des zugehörigen Tangentialraumes soll uns hier nicht weiter interessieren, allerdings wollen wir zwei Observable genauer untersuchen: Den Gesamtdrehimpuls und die kinetische Energie für eine Drehung um eine Achse $\vec{v}$.

10.5.1 Der Drehimpuls

Wir betrachten die Drehung eines starren Körpers um eine Achse $\vec{v}$. Der Drehimpuls ergibt sich als Summe der Drehimpulse der einzelnen Masseteilchen:

$$\vec{L} \;=\; \sum_i \vec{L}_i \;=\; \sum_i m_i(\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i) \;.$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich der Massepunkt i bewegt, ist

$$\dot{\vec{x}}_i \;=\; (\vec{\omega} \times \vec{x}) \;=\; (\vec{v} \times \vec{x})\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \;.$$

Hierbei haben wir die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ als Vektoreingeführt, mit

$$\vec{\omega} \;=\; \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} \qquad \text{d.h.} \qquad |\vec{\omega}| \;=\; \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \;.$$

Wir können dieses Ergebnis auch formal aus der Darstellung der Rotationsmatrix (10.3) ableiten. Zunächst gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t)\vec{x} \;=\; \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t)\right)R^{-1}(t)\right]R(t)\vec{x} \;=\; \;=\; \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t)\right)R^{-1}(t)\right]\vec{x}(t) \;.$$

Wir wählen nun das Koordinatensystem so, daß $R(t) = \mathbb{1}$ und der Vektor $\vec{v}$ die Drehung zum infinitesimal späteren Zeitpunkt $R(t + \mathrm{d}t)$ beschreibt. Das Koordinatensystem ist das mitbewegte System $\{\vec{e}_i(t)\}$. In diesem Fall ist:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(\varphi(t))\right)R(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}R(\varphi)\Big|_{\varphi=0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \;.$$

Nach (10.3) gilt aber:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} R_{ij}\Big|_{\varphi=0} \;=\; \epsilon_{ikj} v_k \;.$$

Also folgt wieder unser obiges Ergebnis:

$$\dot{x}_i \;=\; \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R(t)\right) R^{-1}(t)\right]_{ij} x_j \;=\; \epsilon_{ikj} v_k x_j \;=\; (\vec{v}\times\vec{x})_i \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} \;.$$

Für den Drehimpuls erhalten wir somit

$$\vec{L} \;=\; \sum_i m_i [\vec{x}_i \times (\vec{\omega}\times\vec{x}_i)] \;=\; \sum_i m_i [(\vec{x}_i\cdot\vec{x}_i)\vec{\omega} - (\vec{x}_i\cdot\vec{\omega})\vec{x}_i]$$

(der Index i bezieht sich hier nicht auf Komponenten, sondern numeriert die Teilchen) bzw. für ein kontinuierliches Medium:

$$\vec{L} \;=\; \int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x}) [|\vec{x}|^2\vec{\omega} - (\vec{x}\cdot\vec{\omega})\vec{x}] \;.$$

In Komponenten können wir auch schreiben:

$$L_k \;=\; \int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x}) [|\vec{x}|^2 \delta_{kl}\omega_l - x_l\omega_l x_k] \;=\; \Theta_{kl}\omega_l \;,$$

mit dem sogenannten *Trägheitstensor*:

$$\Theta_{kl} \;=\; \int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x}) [|\vec{x}|^2 \delta_{kl} - x_k x_l] \;.$$

Bei den letzten beiden Gleichungen sollten wir jedoch berücksichtigen, daß sich die Komponenten L_k, ω_l und Θ_{kl} auf die mit dem starren Körper mitbewegte Koordinatenbasis beziehen. Der Vektor $\vec{L}$ bzw. $\vec{\omega}$ ist jeweils:

$$\vec{L} \;=\; L_i \vec{e}_i(t) \qquad \text{und} \qquad \vec{\omega} \;=\; \omega_i \vec{e}_i(t) \;.$$

Insbesondere sind die Komponenten $L_i(t)$ zeitabhängig, auch wenn – wie im kräftefreien Fall – $\vec{L}$ zeitlich erhalten ist. Die Bewgungsgleichung des kräftefreien starren Körpers ist gleichbedeutend mit der Drehimpulserhaltung (und der Erhaltung des Gesamtimpulses). Da

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} \;&=\; \Theta_{ij}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_j\right)\vec{e}_i \;+\; \Theta_{ij}\omega_j\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_i) \\ &=\; N_i\vec{e}_i(t) \;, \end{aligned}$$

mit den Komponenten des äußeren Drehmoment-Vektors

$$N_i \;=\; \Theta_{ij}\dot{\omega}_j \;+\; \Theta_{kj}\omega_j\omega_l\epsilon_{ilk} \;,$$

folgt als Bewegungsgleichung:

$$\Theta_{ij}\dot{\omega}_j \;=\; \epsilon_{ikl}\Theta_{kj}\omega_j\omega_l \;.$$

Wählt man für das mitbewegte Bezugssystem die Koordinatenachse so, daß T_{kl} diagonal wird – mit den Eigenwerten I_i – so erhält man die drei gekoppelten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}\omega_2\omega_3 \\
\dot{\omega}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_2}\omega_3\omega_1 \\
\dot{\omega}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2 \;.
\end{aligned}$$

Es handelt sich um ein nicht-lineares Gleichungssystem, das sich allgemein durch elliptische Funktionen lösen läßt, was hier jedoch nicht geschehen soll.

10.5.2 Die kinetische Energie

Die kinetische Energie ist ebenfalls die Summe der kinetischen Energien der einzelnen Massepunkte:

$$T \;=\; \sum_i T_i \;=\; \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{x}}_i)^2 \;.$$

Mit der obigen Formel für die Geschwindigkeit folgt:

$$(\dot{\vec{x}}_i)^2 \;=\; (\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot (\omega \times \vec{x}) \;.$$

Zur Auswertung dieses Skalarproduktes von zwei Kreuzprodukten benutzen wir eine Identität für die ϵ-Symbole:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} \;=\; \delta_{jl}\delta_{km} \;-\; \delta_{jl}\delta_{km} \;.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot (\omega \times \vec{x}) &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\omega_j x_k \omega_l x_m \\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} \;-\; \delta_{jl}\delta_{km})\omega_j x_k \omega_l x_m \\
&= \omega_j\omega_j x_k x_k - \omega_j x_j \omega_k x_k \\
&= |\vec{\omega}|^2 |\vec{x}|^2 \;-\; (\vec{\omega} \cdot \vec{x})^2 \;.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die kinetische Energie bilinear in $\vec{\omega}$:

$$T \;=\; \sum_i \frac{1}{2} m_i (|\vec{\omega}|^2 |\vec{x}_i|^2 \;-\; (\vec{\omega} \cdot \vec{x}_i)^2) \;,$$

bzw.

$$T \;=\; \int \mathrm{d}^3x\; \rho(\vec{x})\; (|\vec{\omega}|^2|\vec{x}|^2 \;-\; (\vec{\omega}\cdot\vec{x})^2)\;.$$

Wir können auch schreiben:

$$T \;=\; \sum_{kl} \omega_k \Theta_{kl} \omega_l$$

wobei Θ wieder der oben eingeführte Trägheitstensor ist.

T ist eine skalare Größe und somit unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems, während sich die angegebenen Komponenten von ω_l wiederum auf das körpereigene, mitbewegte System beziehen. Da ohne äußere Kräfte die kinetische Energie gleich der Gesamtenergie ist und somit erhalten sein muß, ist die zeitliche Entwicklung der $\omega_k(t)$-Komponenten auf den sogenannten *Trägheitsellipsoid* eingeschränkt:

$$T \;=\; \sum_{kl} \omega_k(t)\, \Theta_{kl}\, \omega_l(t) \;\equiv\; \text{const.}$$

Die Hauptachsen dieses Ellipsoids entsprechen den Hauptachsen von Θ, und ihre relativen Längen sind durch die Eigenwerte von Θ gegeben.

10.6 Trägheitstensor und Symmetrien

Aus allgemeinen Überlegungen wissen wir, daß sich jede symmetrische Matrix – und der Trägheitstensor Θ ist symmetrisch – durch eine orthogonale Transformation (bzw. eine geeignete Wahl der Basis) diagonalisieren läßt, daß die Eigenwerte reell sind und die zugehörigen Eigenvektoren senkrecht aufeinander gewählt werden können. Bei nichtentarteten Eigenwerten liegen die Eigenvektoren fest.

Statt nun für einen gegebenen starren Körper den Trägheitstensor zu diagonalisieren ist es oft hilfreich, auf die Lage der Hauptachsen aufgrund von Symmetrieüberlegungen zu schließen. Drückt man dann den Trägheitstensor bezüglich der entsprechenden Hauptachsenbasis aus, so ist er diagonal und seine Diagonalelemente sind gleichzeitig die Eigenwerte. Wir betrachten dazu zwei Beispiele: Die Invarianz des Trägheitstensors unter Spiegelung an einer Ebene und unter einer (diskreten) Rotation um eine Achse. Zuvor wollen wir noch ein Theorem zu 2-dimensionalen Rotationen beweisen:

Die Eigenwerte einer 2-dimensionalen Rotationsmatrix, die eine Drehung um einen Winkel φ beschreibt, sind $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi}$. Reelle Eigenwerte und damit reelle Eigenvektoren existieren nur für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$.

Zum Beweis berechnen wir das charakteristische Polynom einer Drehmatrix:

$$\det \begin{vmatrix} (\cos\varphi - \lambda) & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & (\cos\varphi - \lambda) \end{vmatrix} \;=\; \lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1\;.$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und damit die Eigenwerte der Drehmatrix sind:

$$\lambda_{1/2} \;=\; \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} \;=\; \cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi \;=\; \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} \;.$$

Reelle Eigenvektoren gibt es nur für $\sin\varphi = 0$, also für $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$. Im ersten Fall erhält man die Identitätsmatrix, im zweiten Fall (-1)-mal die Identitätsmatrix, d.h. eine Rotation um 180°.

Eine Folgerung aus diesem Resultat ist, daß eine (reelle) 2×2-Matrix, die mit einer Drehmatrix ($\varphi \neq 0, \pi$) kommutiert, ein Vielfaches der Einheitsmatrix sein muß.

10.6.1 Invarianz unter Spiegelung

Wir nehmen an, der starre Körper sei invariant unter einer Spiegelung an einer Ebene. Wir wählen nun das Koordinatensystem so, daß diese Ebene der 1-2-Ebene entspricht, die Spiegelung also durch eine Transformation $x_3 \to -x_3$ bzw.

$$S \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Die Invarianz des starren Körpers unter dieser Transformation bedeutet für den Trägheitstensor:

$$\Theta' \;=\; S^T \Theta\, S \;=\; \Theta \;. \tag{10.4}$$

Diese Gleichung bedeutet in Komponenten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & -\Theta_{13} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & -\Theta_{23} \\ -\Theta_{31} & -\Theta_{32} & \Theta_{33} \end{pmatrix} .$$

Damit Θ diese Gleichung erfüllt, muß es die folgende Form haben:

$$\Theta \;=\; \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{33} \end{pmatrix} .$$

Die Achse senkrecht zur Spiegelebene ist somit eine der Hauptachsen und Θ_{33} ist gleichzeitig der Eigenwert von Θ bezüglich dieser Hauptachse. Dieses Ergebnis hätten wir auch ohne explizite Rechnung erhalten können: Gleichung (10.4) besagt, daß Θ mit der Matrix S kommutieren muß d.h. im nichtentarteten Fall gemeinsame Eigenvektoren haben muß. Da der Eigenwert -1 von S (bezüglich der 3-Achse) nicht entartet ist, muß die 3-Achse auch gleichzeitig Hauptachse von Θ sein.

Findet man zwei Spiegelebenen, die senkrecht aufeinander stehen, so hat man alle Hauptachsen gefunden: die beiden Achsen senkrecht zu den Spiegelebenen und die dritte Achse senkrecht zu diesen beiden. Die Eigenwerte sind die Matrixelemente von Θ in dieser Basis. Die Eigenwerte können verschieden sein.

Gibt es zwei Spiegelebenen, die nicht senkrechte aufeinander stehen (und nicht parallel sind), so ist die Ebene senkrecht zu beiden Spiegelebenen (aufgespannt von den beiden Vektoren senkrecht zu den Spiegelebenen) „Eigenebene“. Die Matrix Θ ist nicht nur diagonal sondern zwei der Eigenwerte müssen auch entartet sein.

10.6.2 Invarinaz unter Drehungen

Wir nehmen nun an, der starre Körper sei invariant unter einer Drehung um eine Achse, wobei diese Drehung nicht einem Winkel von 0 oder 180° entsprechen soll. 0° ist die Identitätsmatrix, die keine einschränkenden Bedingungen an Θ liefert. 180° entspricht der Matrix

$$-S \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

liefert also dieselben Einschränkungen wie eine Spiegelungan an einer Ebene, wie wir sie oben betrachtet haben.

In einer Basis, bei der die Drehachse der 3-Richtung entspricht, hat eine Drehung um den Winkel φ die Darstellung

$$R(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Invarianz des starren Körpers unter einer Drehung bedeutet:

$$\Theta' \;=\; R^T \,\Theta\, R \;=\; \Theta \; .$$

Für $\varphi \neq 0$ bedeutet dies

$$\Theta \;=\; \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & 0 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{33} \end{pmatrix} ,$$

und falls zusätzlich $\varphi \neq \pi$ folgt:

$$\Theta \;=\; \begin{pmatrix} \Theta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{33} \end{pmatrix} .$$

Bei einer Invarianz unter einer Drehung von 60°, 90° oder 120° beispielsweise ist Θ diagonal in jeder Basis, in der die Drehachse eine Koordinatenachse darstellt, und zwei der Eigenwerte von Θ sind entartet. Diese beiden Eigenwerte entsprechen den Hauptachsen, die in der Drehebene liegen.

Wir erkennen also, daß schon relativ einfache Symmetrieeigenschaften eines starren Körpers zu wesentlichen Einschränkungen hinsichtlich der Lage der Hauptachsen sowie einer möglichen Entartung der Eigenwerte führen können.

Kapitel 11

Nicht-Inertialsysteme

Wir hatten bereits bei der Beschreibung starrer Körper gesehen, daß es sinnvoll sein kann, physikalische Vorgänge auch in Nicht-Inertialsystemen zu betrachten. Beim starren Körper hatten wir ein körperfestes, mitbewegtes Bezugssystem definiert, so daß die Massepunkte des Körpers in Bezug auf dieses Bezugssystem ihre Lage beibehielten.

Wir wollen nun ganz allgemein untersuchen, wie sich die Bewegung von Massepunkten in einem Nicht-Inertialsystem beschreiben läßt. Die Bewegungsgleichungen sind in diesem Fall abzuändern und es treten Zusatzterme auf, die sich als sogenannte *Scheinkräfte* interpretieren lassen.

11.1 Bewegungsgleichungen in einem Nicht-Inertialsystem

Im folgenden bezeichne $(0_B, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ immer den Bezugspunkt und die Basis in einem Nicht-Inertialsystem und $(O, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ das Bezugssystem (Bezugspunkt und Basis) eines Inertialsystems. Die Basisvektoren des Nicht-Inertialsystems lassen sich zu jedem Zeitpunkt aus den Basisvektoren des Inertialsystems durch eine Rotation $R(t)$ erhalten:

$$\vec{e}_i \;=\; R(t)_{ij}\, \vec{n}_j \;.$$

Einen gegebenen Punkt p des $\mathbb{R}^3$ beschreiben wir bezüglich des Inertialsystems durch den Vektor $\vec{r}$ und bezüglich des Nicht-Inertialsystems durch den Vektor $\vec{b}$. Ein Beobachter im Inertialsystem beschreibt diesen Punkt durch die Koordinaten:

$$r_i \;=\; \vec{r} \cdot \vec{n}_i \;.$$

Entsprechend beschreibt ein Beobachter im Nicht-Inertialsystem diesen Punkt durch die Koordinaten:

$$b_i \;=\; \vec{b} \cdot \vec{e}_i \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{b} \;=\; b_i\, \vec{e}_i \;.$$

Zunächst gilt basisunabhängig:

$$\vec{r} \;=\; \vec{R} + \vec{b}\,.$$

Hierbei ist $\vec{R} \;\simeq\; OO_B$ der Vektor, durch den der Bezugspunkt O_B des Nicht-Inertialsystems im Inertialsystem beschrieben wird. Alle drei Vektoren können nun zeitabhängig sein.

Im Fall des starren Körpers war $\vec{R}$ die Schwerpunktskoordinate des starren Körpers, $\vec{b}$ der Vektor, der einen Massepunkt des starren Körpers im mitbewegten Koordinatensystem beschreibt. Daher war in diesem Fall $\vec{b}$ nicht zeitabhängig, wohl aber die Basisvektoren $\{\vec{e}_i\}$ des mitbewegten Bezugssystems.

Wir wollen nun die Geschwindigkeit und die Beschleunigung von $\vec{r}$ berechnen, also die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes p, wie ein Beobachter im Inertialsystem sie wahrnimmt. Diese wollen wir in Beziehung setzen mit der Geschwindigkeit und Beschleunigung, wie ein Beobachter im System B sie wahrnimmt. Zunächst gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{R} \;+\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}\,.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b} \;&=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b_i(t)\,\vec{e}_i(t)) \;=\; \dot{b}_i(t)\,\vec{e}_i(t) \;+\; b_i\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_i(t)\\ &=\; \vec{v}(t) \;+\; b_i\,(\vec{\omega}(t)\times\vec{e}_i(t))\\ &=\; \vec{v}(t) \;+\; (\vec{\omega}(t)\times\vec{b}(t))\,.\end{aligned}$$

$\vec{v}(t)$ ist die Geschwindigkeit des Punktes p, wie der Beobachter im Nicht-Inertialsystem sie wahrnimmt, und

$$(\vec{\omega}\times\vec{e}_i(t)) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_i(t) \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t)\right)R^{-1}(t)\vec{e}_i(t)$$

beschreibt die zeitliche Veränderung der Basisvektoren des Nicht-Inertialsystems.

Falls die Bezugspunkte der beiden Systeme übereinstimmen, das Nicht-Inertialsystem also lediglich eine (zeitabhängige) Rotation relativ zum dem Inertialsystem ausführt, so erhalten wir für die beiden Geschwindigkeiten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} \;=\; \vec{v}(t) \;+\; (\vec{\omega}(t)\times\vec{b}(t))\,.$$

$\dot{\vec{r}}$ ist die Geschwindigkeit, die ein Beobachter im Inertialsystem für den Punkt p beobachtet, $\vec{v}(t)$ ist die Geschwindigkeit, mit der ein Beobachter im Nichtinertialsystem denselben Punkt p beobachtet. $\vec{b}(t)$ ist der Vektor, mit dem der Beobachter im Nicht-Inertialsystem den Punkt p beschreibt, und $\vec{\omega}$ ist die (momentane) Winkelgeschwindigkeit des Nicht-Inertialsystems.

Nun berechnen wir die Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r} &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{b}_i(t)\vec{e}_i(t) + b_i(t)(\vec{\omega}(t)\times\vec{e}_i(t))\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R} + \ddot{b}_i\vec{e}_i + 2\dot{b}_i(\vec{\omega}\times\vec{e}_i) + b_i(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{e}_i) + b_i(\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{e}_i))\ ,\end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{R} + \vec{a} + 2(\vec{\omega}\times\vec{v}) + (\dot{\vec{\omega}}\times\vec{b}) + (\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{b}))\ . \tag{11.1}$$

$\ddot{\vec{R}}$ ist die Beschleunigung der beiden Bezugspunkte relativ zueinander. $\vec{a}$ ist die Beschleunigung des Punktes p, wie sie von einem Beobachter im Nicht-Inertialsystem gemessen wird. $\dot{\vec{\omega}} = (\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3)$ ist die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit, schließt also sowohl eine Änderung der Rotationsachse, als auch eine Änderung des Betrags der Winkelgeschwindigkeit ein.

Neben den Kräften, die ein Beobachter im Inertialsystem wahrnimmt, findet ein Beobachter im Nicht-Inertialsystem also noch weitere Beiträge, die zur Beschleunigung $\vec{a}$ eines Massepunktes in seinem Bezugssystem beitragen, die er als *Scheinkräfte* interpretiert. Wir wollen die einzelnen Terme in (11.1) besprechen:

1. $\ddot{\vec{R}}$

   Dies ist die Beschleunigung der beiden Bezugspunkte relativ zueinander. Falls keine relative Rotation erfolgt, ist dies der einzige Beitrag zu den Scheinkräften. Sie entspricht dem Negativen der Kraft, die aufgewandt werden muß, um das Nicht-Inertialsystem zu beschleunigen.

   Da keiner der verbleibenden Terme von $\vec{R}$ abhängt, setzen wir $\vec{R} = 0$ für die verbleibende Diskussion. Alle anderen Scheinkräfte beziehen sich also auf die relative Rotation der beiden Bezugssysteme.

2. $(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{b})$

   Dieser Beitrag tritt nur auf, wenn sich die Winkelgeschwindigkeit des Nicht-Inertialsystems (relativ zum Inertialsystem) zeitlich verändert. Er entspricht also einer „Winkelbeschleunigung“. Man bezeichnet diesen Beitrag (multipliziert mit der Masse) auch manchmal als „Trägheitskraft der Rotation“.

   Für die meisten relevanten Bezugssysteme (beispielsweise ortsgebundene Systeme auf der Erde) ist die zeitliche Veränderung der Winkelgeschwindigkeit vernachlässigbar.

3. $(\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{b}))$

Die zugehörige Scheinkraft

$$F_z \;=\; -M[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{b})] \;=\; -M[(\vec{\omega}\cdot\vec{b})\,\vec{\omega} \;-\; (\vec{\omega}^2)\,\vec{b}]$$

ist die *Zentrifugalkraft*. Die Richtung ist senkrecht zu $\vec{\omega}$ und senkrecht zu $\vec{\omega}\times\vec{b}$. Für $\vec{b}$ senkrecht zu $\vec{\omega}$ erhält man den bekannten Term $M|\omega|^2\vec{b}$. Ein Punkt, der im Nicht-Inertialsystem ruht – für den $\vec{b}$ also zeitlich konstant ist –, wird im Inertialsystem eine Kreisbewegung ausführen, die durch eine andere Kraft (die Zentripetalkraft) kompensiert werden muß. Diese Zentripetalkraft wird der Beobachter im Nicht-Inertialsystem auch wahrnehmen, da der Massepunkt in seinem System jedoch ruht, schließt er auf eine weitere, nach Außen gerichtete Kraft – die Zentrifugalkraft.

4. $2(\vec{\omega}\times\vec{v})$

   Die zugehörige Kraft

$$F_C \;=\; -2M(\vec{\omega}\times\vec{v}) \;=\; 2M(\vec{v}\times\vec{\omega})$$

   bezeichnet man als *Coriolis-Kraft*. Sie tritt nur auf, wenn sich der Massepunkt p im Nicht-Inertialsystem bewegt ($\vec{v}\neq 0$). Ihre Wirkung läßt sich am einfachsten veranschaulichen, wenn man sich eine geradlinige (kräftefreie) Bewegung im Inertialsystem vorstellt, die beispielsweise radial nach Außen verläuft ($\vec{v}$ senkrecht auf $\vec{\omega}$). Im rotierenden System erhält man eine Spiralkurve, und die zugehörige (Schein-)Kraft ist gerade die Coriolis-Kraft.

   Auf der Erde wird diese Kraft am Foucault'schen Pendel deutlich. Ein ortsfestes Bezugssystem auf der Erde stellt ein rotierendes System dar. Für die Kraft auf das Pendel ist nur die Komponente der Winkelgeschwindigkeit senkrecht zur Pendelbewegung wichtig. Am Nordpol dreht sich die Erde in 24 Stunden „unter dem Pendel hinweg“, d.h. in einem erdfesten Bezugssystem hat es den Anschein, als ob das Pendel seine Schwingungsebene in 24 Stunden um 360° dreht, d.h. $T_F = 24$ Stunden. Am Äquator findet keine Drehung statt – $T_F = \infty$. In einem ortsfesten System bei einem geographischen Breitengrad φ ist $T_F = 1\,\text{Tag}/\sin\varphi$.

11.2 Das Foucaultsche Pendel

Als Anwendung der obigen Formeln soll kurz das Foucault-Pendel behandelt werden. Wir betrachten dazu ein erdfestes Bezugssystem. Der Ursprung sei ein Punkt auf der Erdoberfläche bei einem geographischen Breitengrad φ. Die 3-Achse des Bezugssystems sei senkrecht zur Erdoberfläche, d.h. zeige radial vom Erdmittelpunkt weg. Die 1-Achse zeigt nach Osten, die 2-Achse nach Norden.

In diesem Bezugssystem befinde sich ein harmonischer Oszillator, dessen Bewegung nur in der 1-2-Ebene verlaufen kann und dessen Zentrum der Ursprung des Bezugssystems sei. Wir vernachlässigen alle Einflüsse der nicht-inertialen Bewegung des Bezugssystems mit Ausnahme der Coriolis-Kraft. Die Bewegungsgleichung lautet dann:

$$\ddot{\vec{b}} \;=\; -\,\omega^2\vec{b} - 2(\vec{v}\times\vec{\Omega})\;.$$

(ω bezeichnet hier die Eigenfrequenz des Oszillators und $\vec{\Omega}$ den Drehvektor.) Im erdfesten Bezugssystem hat $\vec{\Omega}$ die Zerlegung

$$\vec{\Omega} \;=\; (\sin\varphi\,\vec{e}_3 \;+\; \cos\varphi\,\vec{e}_2)\,\dot{\varphi}\;,$$

und $\vec{v}$ ist die Geschwindigkeit des Oszillators, wie sie im erdfesten Bezugssystem gemessen wird:

$$\vec{v} \;=\; \dot{b}_1\,\vec{e}_1 \;+\; \dot{b}_2\,\vec{e}_2\;.$$

Sei $\alpha := \sin\varphi\,\dot{\varphi}$ so lautet die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}\ddot{b}_1 &= -\omega^2\,b_1 - 2\dot{b}_2\alpha\\ \ddot{b}_2 &= -\omega^2\,b_2 + 2\dot{b}_1\alpha\;.\end{aligned}$$

Zur Lösung dieser Bewegungsgleichung führen wir zunächst die komplexe Variable $z = b_1 + \mathrm{i}b_2$ ein. Es gilt dann

$$\ddot{z} \;=\; -\,\omega^2\,z + 2\mathrm{i}\dot{z}\alpha\;.$$

Der Exponentialansatz

$$z(t) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\omega}t}$$

führt auf die Gleichung:

$$-\hat{\omega}^2 \;=\; -\,\omega^2 - 2\alpha\hat{\omega}\;,$$

mit der Lösung:

$$\hat{\omega}_{1/2} \;=\; -\,\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+\omega^2}\;.$$

Die allgemeinse Lösung lautet somit:

$$z(t) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha t}(a\cos\sqrt{\alpha^2+\omega^2}t \;+\; b\sin\sqrt{\alpha^2+\omega^2}t)\;.$$

Die Anfangsbedingungen führen auf die Gleichungen

$$z(0) \;=\; a \qquad \text{und} \qquad \dot{z}(0) \;=\; \mathrm{i}\alpha\,z(0) + \sqrt{\omega^2+\alpha^2}\,b\;,$$

wobei zu beachten ist, daß $z(0) = x(0) + \mathrm{i}y(0)$ und $\dot{z}(0) = \dot{x}(0) + \mathrm{i}\dot{y}(0)$ einen Real- und Imaginärteil haben.

Wir nehmen nun an, daß $\alpha \ll \omega$. Dies ist sicherlich immer erfüllt, wenn die Frequenz der Erdrotation sehr viel kleiner als die Eigenfrequenz des Oszillators ist. Dann

gilt $\sqrt{\omega^2 + \alpha^2} \approx \omega$. Die Bewegung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Es gibt einen schnell veränderlichen harmonischen Anteil mit der Frequenz ω, der die Schwingung des Oszillators beschreibt, und der die beiden Komponenten nicht vermischt. Außerdem gibt es einen langsamveränderlichen Anteil mit der Frequenz $\alpha = 2\pi \sin\varphi/\text{Tag}$ – d.h. mit der Periode $\text{Tag}/\sin\varphi$ –, der die Drehung der Schwingungsrichtung beschreibt. Diese Periode ist bei $\varphi = 0$ (d.h. am Äquator) unendlich, dort dreht sich also die Schwingungsebene nicht. Am Nordpol ist die Periode 1 Tag, und man kann sich vorstellen, daß die Erde sich dort „unter dem Oszillator hinwegdreht“.

Kapitel 12

Elementare Vektoranalysis

Wir wollen uns in den nächsen Kapiteln mit Feldern beschäftigen. Nach ihrem Transformationsverhalten unter einem (aktiven oder passiven) Koordinatenwechsel unterscheidet man skalare Felder, Vektorfelder, Pseudo-Vektorfelder, Tensorfelder, etc. Wir werden zunächst dieses Transformationsverhalten nochmals genauer untersuchen. Anschließend werden wir einige Grundlagen der Vektoranalysis wiederholen, dazu zählen die Begriffe „Gradient, Rotation, Divergenz“, die Wiederholung des Linienintegrals sowie Flächen- und Volumenintegrale und die wichtigen Integralsätze: der Stokessche Satz und der Gaußsche Satz.

12.1 Tensorfelder

Ganz allgemein kann man Felder als Abbildungen des Raums M (die Zeitabhängigkeit vernachlässigen wir zunächst) in eine Menge auffassen, die oft ein Vektorraum V ist. M muß dabei nicht notwendigerweise der $\mathbb{R}^3$ sein, insbesondere handelt es sich auch in der Newtonschen Mechanik nicht um den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ (die Menge aller 3-Tupel reeller Zahlen), sondern um den affinen Raum $\mathbb{R}^3$. Wählt man auf M ein Bezugssystem und eine (orthonormale) Basis, so entspricht das einer bijektiven Abbildung $\phi : M \to \mathbb{R}^3$. Wir sollten daher zwischen dem Feld über M

$$\varphi \ : \ M \ \longrightarrow \ V \qquad p \in M \ \longrightarrow \ \varphi(p) \in V$$

und dem Feld in einer Koordinatenbasis

$$\varphi_\phi \ := \ \varphi \circ \phi^{-1} \ : \ \mathbb{R}^3 \ \longrightarrow \ V \qquad (x_1, x_2, x_3) \ \longrightarrow \ \varphi_\phi(x_1, x_2, x_3)$$

unterscheiden. Ein Wechsel des Bezugssystems in M kann allgemein als Translation um einen Vektor $\vec{a}$ und eine Rotation des (orthonormalen) Koordinatensystems $\{\vec{e}_i\}$ verstanden werden. Sei $\phi' : M \to \mathbb{R}^3$ ein anderes Bezugssystem, so ist $\phi' \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

eine affine Abbildung auf dem $\mathbb{R}^3$, also im allgemeinen die Kombination aus einer Rotation und einer Translation. Wir beschränken uns im folgenden auf Rotationen und halten den Bezugspunkt des Basissystems fest. Je nachdem, inwieweit eine Transformation des Urbildraumes $\mathbb{R}^3$ eine Transformation im Bildraum V des Feldes impliziert, unterscheidet man unterschiedliches Transformationsverhalten der Felder.

12.1.1 Skalare Felder

Wir betrachten zunächst ein Feld, das als Abbildung vom Raum M in die reellen Zahlen definiert ist:

$$\varphi \; : \; \mathbb{R}^3 \; \longrightarrow \; \mathbb{R} \qquad \vec{x} \; \longrightarrow \; \varphi(\vec{x}) \; .$$

Beispiele sind (auf nicht zu kleinen Skalen) das Temperaturfeld und das Dichtefeld in der Meterologie, das Energiefeld von elektrischen bzw. magnetischen Feldern (also $|\vec{E}(\vec{x})|^2$ und $|\vec{B}(\vec{x})|^2$) oder der Betrag des Geschwindigkeitsfeldes in der Hydrodynamik ($|\vec{v}(\vec{x})|$). Man erkennt daran auch, daß das Bild der Abbildung φ nicht gesamte $\mathbb{R}$ sein muß. Insofern ist es auch nicht wesentlich, daß bei einem skalaren Feld der Bildraum einen Vektorraum darstellt.

Bei einem skalaren Feld wird somit einem bestimmten Raumpunkt p ein fester Wert zugeordnet. Dieser Zahlenwert hängt nicht davon ab, in welchem Bezugssystem man den Punkt p durch einen Vektor $\vec{x} = Op$ ausdrückt, bzw. in welcher Basis man die Komponenten $\{x_i\}$ dieses Punktes schreibt. Der Bildraum ($\mathbb{R}$) ist von der Wahl eines Koordinatensystems für den Punkt p unabhängig.

Wenn wir ein ausgezeichnetes Koordinatensystem gewählt haben, wird das skalare Feld zu einer Funktion von drei Parametern $\{x_i\}$. Wählen wir eine andere Basis, d.h. ordnen demselben Vektor $\vec{x}$ andere Koordinaten $\{x'_i\}$ zu, so wird sich die funktionale Abhängigkeit des skalaren Feldes von diesen drei Koordinaten ändern, wobei für die neue Funktion φ' gelten soll

$$\varphi_{\phi'}(x'_1, x'_2, x'_3) \; = \; \varphi(p) \; = \; \varphi_\phi(x_1, x_2, x_3) \; . \tag{12.1}$$

Im vorliegenden Fall haben wir ein passive Basistransformation betrachtet. Wir können aber auch aktive Transformationen untersuchen, d.h. der Punkt p wird in einen Punkt $p' = Rp$ überführt, der aus p durch eine Rotation R des Raums um den Bezugspunkt hervorgeht. In diesem Fall wird die Situation durch ein neues skalares Feld φ' beschrieben. Damit physikalisch dieselbe Aussage gemacht wird, muß der Wert von φ' an dem neuen Punkt p' gleich dem Wert des alten skalaren Feldes an dem alten Punkt p sein:

$$\varphi'(p') \; = \; \varphi(p) \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi'(Rp) \; = \; \varphi(p) \qquad \text{bzw.} \qquad \varphi'(p) \; = \; \varphi(R^{-1}p) \; .$$

Diese Gleichung definiert das Transformationsverhalten eines skalaren Feldes unter aktiven Transformationen des Raumes.

12.1.2 Vektor- und Tensorfelder

Vektorfelder sind Abbildungen vom Konfigurationsraum M in den dreidimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{F} \; : \; M \; \longrightarrow \; \mathbb{R}^3 \qquad p \; \longrightarrow \; \vec{F}(p) \; .$$

In diesem Fall wird sich bei einer aktiven Transformation (Rotation) des Raumes auch das Vektorfeld mittransformieren, d.h. wir erhalten ein neues Feld $\vec{F}'$, das durch die Bedingung

$$\vec{F}'(p) \; = \; R\vec{F}(R^{-1}p)$$

definiert ist. Ein Feld, dessen Komponenten $\{F_i\}$ sich unter einer Transformation des Raumes nach obiger Formel transformieren, heißt *Vektorfeld*. Beispiele sind das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ in der Elektrodynamik und das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ in der Hydrodynamik.

Ein Vektorfeld ändert bei einer Punktspiegelung (orthogonale Transformation mit Determinante -1) auch sein Vorzeichen. Ein Pseudo-Vektorfeld hingegen ändert bei einer Punktspiegelung sein Vorzeichen nicht; Beispiel ist das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$.

Ganz allgemein kann man auch Tensorfelder betrachten. Ein Tensorfeld 2. Stufe beispielsweise ist durch folgendes Transformationsverhalten definiert:

$$\sigma'(p) \; = \; R\,\sigma(R^{-1}p)\,R^T \; .$$

Im Gegensatz zu den Tensorgrößen, die wir bereits früher besprochen haben, ist das Feld eine Funktion des Raumpunktes und bei der Formulierung des Transformationsverhaltens muß diese Abhängigkeit berücksichtigt werden. So kann in einem nicht-homogenen Material die Leitfähigkeit σ vom Ort abhängen und transformiert sich unter einer aktiven Rotation des Materials nach obiger Formel.

12.2 Linienintegrale – Gradient

Wir haben schon im Zusammenhang mit Kraftfeldern das Linienintegral definiert, so daß wir diese Begriffe hier nur kurz wiederholen wollen. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung eines Weges im $\mathbb{R}^3$. Das Linienintegral über ein skalares Feld ist dann:

$$\int_\gamma \varphi(\vec{x})\mathrm{d}x \; = \; \int_0^1 \varphi(\vec{x}(t)) \left| \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t \; .$$

Interessanter ist der Fall eines Vektorfeldes, das auf den Tangentenvektor des Weges projiziert und über den Weg integriert wird:

$$\int_\gamma \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} \; = \; \int_0^1 \left(\vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t \; .$$

Handelt es sich bei $\vec{F}$ um ein Gradientenfeld, d.h. $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$, so hängt das Integral nicht vom Weg γ ab, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ und $\vec{x}(1) = \vec{x}_1$:

$$\int_\gamma -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{x} \;=\; \int_0^1 \left(-\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{x}(t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \;=\; \Phi(\vec{x}_0) - \Phi(\vec{x}_1)\,.$$

Wir hatten im Zusammenhang mit konservativen Kräftefeldern (Kap. 3.1.3, S. 33) folgendes Theorem bewiesen: Sei $\vec{F}(\vec{x})$ ein Vektorfeld, für das jedes Wegintegral unabhängig von der Form des Weges nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt; dann ist $\vec{F}$ ein Gradientenfeld. Wir hatten das zugehörige skalare Feld explizit über ein Wegintegral konstruiert:

$$\Phi(\vec{x}) \;=\; -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}\,.$$

Φ ist bis auf eine Integrationskonstante (die durch die Wahl des Anfangspunktes des Weges festgelegt werden kann) eindeutig.

Schließlich hatten wir auch noch bewiesen, daß die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi \;=\; 0\,.$$

In einem einfach zusammenhängenden Raumgebiet läßt sich jedes Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, als Gradientenfeld schreiben. Diesen Satz werden wir weiter unten beweisen.

12.3 Flächenintegrale, Rotation, Stokesscher Satz

12.3.1 Beschreibung von Flächen im $\mathbb{R}^3$ und das Flächenintegral

Wir wollen nun beschreiben, wir man ein Skalarfeld bzw. ein Vektorfeld über eine Fläche $\mathcal{F}$ integriert. Zunächst müssen wir die Fläche $\mathcal{F}$ im $\mathbb{R}^3$ beschreiben. Dazu wählen wir eine Abbildung $(u, v) \ni U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, deren Bild gerade die Fläche beschreibt. (u, v) bezeichnet man als Parameter der Fläche $\vec{x}(u, v)$. Der Einfachheit halber sei der Wertebereich U von (u, v) das Quadrat $0 \le u, v \le 1$.

Als nächsten Schritt benötigen wir ein Maß auf der Fläche, d.h. das Flächenelement $\mathrm{d}\vec{f}$. $\mathrm{d}\vec{f}$ sollte senkrecht auf der Fläche stehen und der Betrag sollte proportional zum Flächeninhalt sein. Es gilt:

$$\mathrm{d}\vec{f} \;=\; \left(\frac{\partial\vec{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}(u,v)}{\partial v}\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Offensichtlich ist

$$\mathrm{d}\vec{x}_u \;=\; \frac{\partial\vec{x}(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u$$

die Wegstrecke entlang der Linie $\vec{x}(u, v = \text{const.})$, die mit der Geschwindigkeit $\partial\vec{x}(u,v)/\partial u$ für die „Zeit“ $\mathrm{d}u$ durchlaufen wird. Entsprechend ist

$$\mathrm{d}\vec{x}_v \;=\; \frac{\partial\vec{x}(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}v$$

die Wegstrecke entlang der Linie $\vec{x}(u = \text{const.}, v)$, die mit der Geschwindigkeit $\partial\vec{x}(u,v)/\partial v$ für die „Zeit“ $\mathrm{d}v$ durchlaufen wird. $\mathrm{d}\vec{x}_u$ und $\mathrm{d}\vec{x}_v$ spannen ein Parallelogramm auf, dessen Fläche durch

$$|\mathrm{d}\vec{f}| \;=\; |\mathrm{d}\vec{x}_u \times \mathrm{d}\vec{x}_v|$$

gegeben ist. Der Vektor $\mathrm{d}\vec{f}$ steht senkrecht auf diesem Parallelogramm und zeigt (bei geeigneter Wahl der Reihenfolge von u und v) nach außen. Im Grenzfall $\mathrm{d}u$ und $\mathrm{d}v$ gegen Null nähert sich die Fläche des Parallelogramms immer mehr dem Flächeninhalt auf der Bild der Fläche $(u, v), (u, v + \mathrm{d}v), (u + \mathrm{d}u, v), (u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v)$, die zwischen den Punkten $\vec{x}(u, v), \vec{x}(u + \mathrm{d}u, v), \vec{x}(u, v + \mathrm{d}v), \vec{x}(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v)$ liegt. Daher ist $\mathrm{d}\vec{f}$ unser gesuchtes Flächenelement.

Wir definieren nun das Flächenintegral über ein skalares Feld über die Fläche $\mathcal{F}$ als

$$\int_{\mathcal{F}} \Phi(\vec{x})|\mathrm{d}\vec{f}| \;:=\; \int_0^1\int_0^1 \Phi(\vec{x}(u,v)) \left|\frac{\partial\vec{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}(u,v)}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \;.$$

Nun handelt es sich um ein gewöhnliches Integral über zwei Variable u und v.

Entsprechend definierten wir den *Fluß* eines Vektorfeldes $\vec{F}$ durch eine Fläche $\mathcal{F}$ als

$$\int_{\mathcal{F}} \vec{F}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} \;:=\; \int_0^1\int_0^1 \left[\vec{F}(\vec{x}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\vec{x}(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}(u,v)}{\partial v}\right)\right] \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \;.$$

Wir projizieren also an jedem Punkt der Fläche den Vektor $\vec{F}$ auf das Flächenelement $\mathrm{d}\vec{f}$ und bilden anschließend das Integral über u und v.

12.3.2 Beispiel: Die Kugeloberfläche

Als Beispiel betrachten wir die Oberfläche einer Kugel vom Radius R. Als Parametrisierung wählen wir die beiden Winkel $\theta :\in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. θ ist dabei der Winkel zwischen einem Vektor und der 3-Achse und φ ist der Winkel zwischen der Projektion des Vektors auf die 1-2-Ebene und der 1-Achse.

Die Kugeloberfläche wird durch folgende Abbildung beschrieben:

$$(\theta, \varphi) \;\to\; \vec{x}(\theta, \varphi) \;=\; R(\cos\varphi\,\sin\theta, \sin\varphi\,\sin\theta, \cos\theta) \;.$$

Wir berechnen nun das Flächenelement an einem Punkt $\vec{x}(\theta, \varphi)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} &= R(\cos\varphi\,\cos\theta, \sin\varphi\,\cos\theta, -\sin\theta) \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} &= R(-\sin\varphi\,\sin\theta, \cos\varphi\,\sin\theta, 0) \\ \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right) &= R^2(\cos\varphi \sin^2\theta, \sin\varphi \sin^2\theta, \sin\theta\cos\theta) \\ &= R^2 \sin\theta\;\vec{n} \qquad \text{mit } \; \vec{n} \;=\; \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\;. \end{aligned}$$

Am Punkt $\vec{x}(\theta, \varphi)$ ist $\vec{n}$ ist ein Einheitsvektor, der radial nach außen zeigt, und das Flächenelement ist somit:

$$\mathrm{d}\vec{f}(\theta, \varphi) \;=\; R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\;\vec{n}\;.$$

12.3.3 Rotation und Stokesscher Satz

Wir hatten die Rotation eines Vektorfeldes bereits durch folgende Vorschrift definiert:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_i \;=\; \epsilon_{ijk}\partial_j F_k\;,$$

bzw.

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \;\simeq\; \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}\;,$$

mit $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Man bezeichnet die Rotation eines Vektorfeldes auch als seine *Wirbeldichte*. Um diese Bezeichnung zu rechtfertigen, wollen wir zunächst den Stokesschen Satz beweisen.

Satz von Stokes: Sei $\vec{F}$ ein (stetig differenzierbares) Vektorfeld, $\mathcal{F}$ eine (differenzierbare) Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Rand $\partial\mathcal{F}$, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} \;=\; \int_{\partial\mathcal{F}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x}\;.$$

Das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes ist also gleich dem Integral des Vektorfeldes über den Rand der Fläche.

Zum Beweis benutzen wir folgende Relation:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right) \;-\; \frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\right)\;.$$

Wir beweisen zunächst diese Relation:

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right) &= \epsilon_{ijk}(\partial_j F_k)\,\epsilon_{ilm}\,\frac{\partial x_l}{\partial u}\,\frac{\partial x_m}{\partial v}\\
&= (\delta_{jl}\delta_{km}\;-\;\delta_{jm}\delta_{kl})(\partial_j F_k)\,\frac{\partial x_l}{\partial u}\,\frac{\partial x_m}{\partial v}\\
&= (\partial_j F_k)\,\frac{\partial x_j}{\partial u}\,\frac{\partial x_k}{\partial v}\;-\;(\partial_j F_k)\,\frac{\partial x_k}{\partial u}\,\frac{\partial x_j}{\partial v}\\
&= \frac{\partial F_k}{\partial u}\,\frac{\partial x_k}{\partial v}\;-\;\frac{\partial F_k}{\partial v}\,\frac{\partial x_k}{\partial u}\\
&= \frac{\partial}{\partial u}\left(F_k\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)\;-\;\frac{\partial}{\partial v}\left(F_k\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)\;.
\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt heben sich die Terme mit zweifachen Ableitungen von $\vec{x}$ gerade weg.

Mit diesem Satz und der Definition des Flächenintegrals erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}}(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\mathrm{d}\vec{f} &= \int_0^1\!\!\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right)\;-\;\frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\right)\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&= \int_0^1\left(\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right)\Big|_{u=0}^{u=1}\mathrm{d}v\;-\;\int_0^1\left(\vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\right)\Big|_{v=0}^{v=1}\mathrm{d}u\;.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht nun aber ein Integral über den Rand des Rechtecks, das den Wertebereich von (u,v) bildet. Dieses Rechteck wird auf den Rand der Fläche $(\partial\mathcal{F})$ abgebildet. Daher steht auf der rechten Seite gerade ein Linienintegral über die Funktion $\vec{F}$ über den Rand der Fläche $\mathcal{F}$. Somit ist der Stokessche Satz bewiesen.

Wir wollen nun die Vorstellung von der Rotation eines Vektorfeldes als eine Wirbeldichte konkretisieren. Das Integral eines Vektorfeldes um einen geschlossenen Weg γ entspricht der Wirbelstärke dieses Vektorfeldes entlang dieses Weges. Wir wählen nun diesen Weg in einer Fläche senkrecht zu einem Normalenvektor $\vec{n}$. Außerdem sei dieser Weg sehr kurz und umschließe eine Fläche mit Flächeninhalt $\mathrm{d}f$. Dann gilt nach dem Stokesschen Satz:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n} \;=\; \lim_{\mathrm{d}f\to 0}\frac{\int_\gamma\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}f}\;,$$

d.h. die Rotation, projiziert auf den Einheitsvektor $\vec{n}$, ist gleich der Wirbelstärke entlang des Weges γ dividiert durch die Fläche, die von γ umrandet wird, im Grenzfall verschwindender Fläche – also gleich der Wirbeldichte. Man beachte, daß es sich hierbei um eine *Flächendichte* handelt, d.h. das Integral über eine Fläche von $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ ergibt die Wirbelstärke.

12.4 Volumenintegrale, Divergenz, Satz von Gauß

12.4.1 Parametrisierung eines Volumens, Volumenelement

Während ein Linienelement $\mathrm{d}\vec{x}$ und ein Flächenelement $\mathrm{d}\vec{f}$ im $\mathbb{R}^3$ gerichtete (vektorielle) Größen sind, ist ein Volumenelement eine (pseudo-) skalare Größe. Daher betrachten wir auch nur Volumenintegrale über Skalarfelder. Bildet man das Volumenintegral über ein Vektorfeld, so erhält man einen Vektor, d.h. das Integral ist für jede Komponente gesondert zu bilden.

Das Volumenelement im $\mathbb{R}^3$ ist $\mathrm{d}^3x = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$. Will man jedoch über ein Volumen $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^3$ integrieren, so ist es oft schwierig, die Integrationsgrenzen an $\{x_i\}$ zu berücksichtigen, da – mit Ausnahme der Integration über einen Quader – die Integrationsgrenzen von den Integrationsvariablen abhängen.

Daher ist es meist sinnvoll, eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zu finden, die einen Quader $(u_1, u_2, u_3) \in [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ auf das Volumen $\mathcal{V}$ abbildet, wobei der Rand des Quaders auf den Rand des Volumens – d.h. die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ – abgebildet wird. Der Übergang von den Variablen $\{x_i\}$ zu den neuen Variablen $\{u_i\}$ beinhaltet die Jakobi-Determinante:

$$J \;=\; \left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right| \;=\; \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_3} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} \;=\; \det\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_1}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_2}, \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_3}\right) .$$

Wir erhalten also:

$$\int_{\mathcal{V}} \Phi(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x \;=\; \int_0^a \int_0^b \int_0^c \Phi(\vec{x}(u_1,u_2,u_3))\,J\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3 .$$

Der Vorteil einer solchen Transformation $\vec{x} \to \vec{u}$ besteht darin, daß nun die Integrationsgrenzen unabhängig von den Integrationsparametern sind.

Die Jakobi-Determinante läßt sich auch leicht als Volumen eines Parallelepipeds deuten, das von den drei infinitesimalen Vektoren

$$\mathrm{d}\vec{x}_{u_i} \;=\; \frac{\partial\vec{x}(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_i}\,\mathrm{d}u_i$$

aufgespannt wird:

$$J \;=\; \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_1} \cdot \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_2} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_3}\right) .$$

12.4.2 Beispiel: Die Kugel vom Radius R

Wir betrachten als Beispiel die Integration über das Volumen einer Kugel vom Radius R. Als Parameter wählen wir den Betrag eines Vektors $r \in [0, R]$, sowie die beiden Winkel $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$, die wir schon bei der Beschreibung der Kugeloberfläche benutzt haben. Wir erhalten somit als Parametrisierung der Kugel:

$$(r, \theta, \varphi) \;\longrightarrow\; \vec{x}(r, \theta, \varphi) \;=\; r(\cos\varphi\,\sin\theta, \sin\varphi\,\sin\theta, \cos\theta)$$

mit den angegebenen Bereichsgrenzen. Das neue Volumenelement bzw. die Jakobi-Determinante J läßt sich leicht berechnen, wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} \;=\; \vec{n} \;=\; (\cos\varphi\,\sin\theta, \sin\varphi\,\sin\theta, \cos\theta)$$

ist, und

$$\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}\right) \;=\; r^2 \sin\theta\;\vec{n}\;.$$

Damit folgt

$$J \;=\; \vec{n}\cdot(r^2\sin\theta)\,\vec{n} \;=\; r^2\sin\theta\;.$$

Wir erhalten somit als neues Volumenelement

$$\mathrm{d}V \;=\; r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\;.$$

12.4.3 Der Satz von Gauß – Divergenz

Der Gaußsche Satz besagt, daß das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes gleich dem Integral über die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ über das Vektorfeld selber ist:

$$\int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\,\mathrm{d}^3x \;=\; \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{f}\;.$$

Der Beweis erfolgt ähnlich, wie der Beweis des Stokesschen Satzes. Wir gehen von folgender Identität aus, die hier nicht bewiesen werden soll, aber durch direktes Nachrechnen leicht überprüfbar ist:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{x}(u_1,u_2,u_3))\;\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_1}\cdot\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_2}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_3}\right) \;&=\; \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\vec{F}\cdot\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_2}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_3}\right)\right] \;+\\ &+\;\frac{\partial}{\partial u_2}\left[\vec{F}\cdot\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_3}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_1}\right)\right] \;+\; \frac{\partial}{\partial u_3}\left[\vec{F}\cdot\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_1}\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_2}\right)\right]\;.\end{aligned}$$

Nun setzen wir diese Identität in das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes ein und erhalten ein Oberflächenintegral, parametrisiert durch den Rand des Quaders von (u_1, u_2, u_3), über das Vektorfeld.

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes können wir der Divergenz eines Vektorfeldes auch die Interpretation einer sogenannten *Quellendichte* geben. Es gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \;=\; \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, \mathrm{d}V \;=\; \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{f} \; .$$

Das Integral über die geschlossene Oberfläche eines Volumens über ein Vektorfeld ergibt aber gerade den Gesamtfluß dieses Vektorfeldes durch diese Oberfläche, d.h. die „Gesamtzahl der Quellen“ des Vektorfeldes innerhalb des Volumens. Die Divergenz ist daher die Quellendichte. In diesem Fall handelt es sich um eine Volumendichte.

12.5 Die Kontinuitätsgleichung

Die angegebenen Integralsätze ermöglichen oft den Übergang zwischen einer lokalen Aussage, die an jedem Raumpunkt erfüllt sein muß, und einer globalen Aussage, die für beliebige Volumina oder Flächen erfüllt sein muß. Als Beispiel betrachten wir die Kontinuitätsgleichung für elektrische Ladungen.

$\rho(\vec{x}, t)$ beschreibe eine elektrische Ladungsdichte bzw. eine Ladungsverteilung zum Zeitpunkt t. D.h.

$$Q_{\mathcal{V}}(t) \;=\; \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{x}, t) \; \mathrm{d}^3 x$$

ist die Gesamtladung in einem Volumen $\mathcal{V}$ zum Zeitpunkt t. Wir fragen uns nun nach der Ladungsänderung in diesem Volumen, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_{\mathcal{V}}(t) \;=\; \int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\vec{x}, t) \; \mathrm{d}^3 x \; .$$

Es ist jedoch kein Prozeß in der Natur bekannt, der die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems verändert, d.h. Ladung ist eine Erhaltungsgröße. Die Ladungsänderung in einem Volumen muß mit einem Ladungsfluß durch die Oberfläche des Volumens verbunden sein. Ladungsfluß drücken wir durch die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ aus. Die Stromdichte zu einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$, die sich am Punkte $\vec{x}$ mit der Geschwindigkeit $\vec{x}$ bewegt, ist

$$\vec{j}(\vec{x}) \;=\; \vec{v}(\vec{x}) \rho(\vec{x}) \; .$$

Der Fluß an Ladung durch eine geschlossene Oberfläche $\partial \mathcal{V}$ pro Zeiteinheit ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_{\mathcal{V}}(t) \;=\; - \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{j}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{f} \; .$$

Das negative Vorzeichen gibt an, daß $\dot{Q}$ die Änderung der Ladungsmenge in $\mathcal{V}$ ist. Fließt beispielsweise Ladung aus $\mathcal{V}$ ab, so ist $\dot{Q}$ negaviv. Der Strom ist nach Außen gerichtet, d.h. das Integral über die Stromdichte gibt die nach außen abfließende Ladungsmenge

an, die gleich dem negativen der Ladungsänderung im Inneren ist. Wir erhalten also die Aussage:

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\vec{x},t)\ \mathrm{d}^3x \ = \ - \ \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{f}\ .$$

Das Volumenintegral über die zeitliche Änderung von ρ ist gleich dem Oberflächenintegral über den Strom. Diese Aussage gilt für jedes Volumen $\mathcal{V}$. Nach dem Gaußschen Satz gilt aber auch

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{\rho}(\vec{x},t)\ \mathrm{d}^3x \ = \ - \ \int_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}))\ \mathrm{d}\vec{f}\ .$$

Da auch diese Aussage für jedes Volumen $\mathcal{V}$ gilt, können wir $\mathcal{V}$ beliebig um einen Punkt konzentrieren und gelangen so zu er *lokalen* Aussage:

$$\dot{\rho}(\vec{x},t) \ = \ - \ \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x})\ .$$

Die Gleichung bezeichnet man als *Kontinuitätsgleichung*. Abgeleitet haben wir sie aus einer Art Bilanzgleichung (für die Ladung) in einem beliebigen Volumen $\mathcal{V}$. Ganz ähnliche Bilanzgleichungen (in diesem Fall für den Impuls und die Energie) nutzt man in der Hydrodynamik zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung bzw. der Navier-Stokes-Gleichung.

Wir können die Kontinuitätsgleichung direkt an der Ladungsverteilung und der Stromdichte von N Punktteilchen überprüfen. Das i-te Punktteilchen bewege sich auf der Bahnkurve $\vec{x}_i(t)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x},t) &= e\sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \\
\vec{j}(\vec{x},t) &= e\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{x}_i(t)}{\mathrm{d}t}\ \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\ .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir explizit:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\rho(\vec{x},t)}{\mathrm{d}t} &= -e\sum_{i=1}^{N} (\vec{\nabla}\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))) \cdot \dot{\vec{x}}_i(t) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x},t) &= e\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\vec{x}_i(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\nabla}\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))\ .
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung ist offensichtlich.

Kapitel 13

Partielle Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir einige partielle, homogene, lineare Differentialgleichungen untersuchen, die in den verschiedensten physikalischen Systemen, deren Freiheitsgrade durch Felder beschrieben werden, auftreten. Ganz konkret handelt es sich um:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta\right)\Phi(\vec{x},t) &= 0 && \text{Diffusionsgleichung}\\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\right)\Phi(\vec{x},t) &= 0 && \text{Wellengleichung}\\
\Delta\Phi(\vec{x}) &= 0 && \text{Laplace-Gleichung}\\
(\Delta + k^2)\Phi(\vec{x}) &= 0 && \text{Helmholtz-Gleichung .}
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen beschreiben die Zeitabhängigkeit von Feldern, die letzten beiden Gleichungen beschreiben statische Zustände. Die Helmholtz-Gleichung wird hauptsächlich als Zwischenschritt zur Lösung der ersten beiden Gleichungen auftreten. Die Laplace-Gleichung spielt, außer beispielsweise bei statischen Lösungen der Diffusionsgleichung, in der Elektrostatik eine wichtige Rolle.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Diffusionsgleichung und der Wellengleichung ist die Ordnung der Zeitableitung. Ist $\Phi(t,\vec{x})$ eine Lösung der Wellengleichung, so ist $\tilde{\Phi}(t,\vec{x}) := \Phi(-t,\vec{x})$ ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung. Diese Eigenschaft bezeichnet man als *Zeitumkehrinvarianz*. Die Diffusionsgleichung besitzt diese Invarianz nicht, sie zeichnet eine bestimmte Zeitrichtung aus. Wie der Name andeutet, beschreibt die Diffusionsgleichung unterschiedliche Diffusionsvorgänge: die Diffusion von Wärme, die Diffusion von Materie in einer Flüssigkeit (beispielsweise Tinte in Wasser) oder in Gasen etc. Diese Vorgänge sind makroskopische Erscheinungen von Systemen mit sehr vielen mikroskopischen Bestandteilen. Die Auszeichnung der Zeitrichtung spiegelt dabei die Zunahme der Entropie bei solchen Prozessen wider.

Die unterschliedliche Ordnung der Zeitableitung hat noch eine weitere Konsequenz: Das Cauchy-Problem (d.h. die Entwicklung der Lösung bei Vorgabe von Anfangsbedingungen zu einem bestimmten Zeitpunkt) verlangt bei der Diffusionsgleichung nur die Vorgabe der Anfangskonfiguration, wohingegen bei der Wellengleichung zur eindeutigen Festlegung der Lösung neben der Anfangskonfiguration auch noch ein Geschwindigkeitsfeld vorgegeben werden muß. Anschaulich ist diese Unterscheidung einsichtig: Die Vorgabe einer Temperaturverteilung zu einem bestimmten Zeitpunkt legt die weitere Wärmediffusion fest. Bei einer schwingenden Saite hingegen (diese wird durch eine eindimensionale Wellengleichung beschrieben) müssen wir neben einer Startkonfiguration (der Stärke der Moden) auch angeben, mit welcher Geschwindigkeit sich die Moden bewegen.

Wir werden zunächst einige physikalische Systeme beschreiben, bei denen die obigen Differentialgleichungen auftreten. Außerdem werden wir spezielle Lösungen untersuchen, die sich aufgrund physikalischer Überlegungen bzw. aus der physikalischen Anschauung „erraten“ lassen. Anschließend werden wir uns mit allgemeinen Methoden zur Lösung der obigen Differentialgleichungen beschäftigen.

13.1 Die Diffusionsgleichung

Die Diffusionsgleichung beschreibt phänomenologisch die Ausbreitung von Wärme oder Materie in einem ruhenden Medium. Dabei handelt es sich um eine statistische Mittelung über eine große Anzahl mikroskopischer Prozesse, meist Stoßprozesse, über die die Ausbreitung erfolgt bzw. die der Ausbreitung im Wege stehen. Die Dynamik einzelner mikroskopischer Teilchen spielt dabei keine Rolle, sondern nur der makroskopische Effekt, der sich im Mittel ergibt. Daher kann dieselbe Gleichung zur Diffusion vollkommen verschiedener Größen in vollkommen verschiedenen Medien herangezogen werden. Die einzige makroskopisch beobachtbare Größe ist der Diffusionskoeffizient D, der etwas über die Zeitskala besagt, mit der die räumliche Ausbreitung erfolgt. D hat allerdings nicht die Dimension einer Geschwindigkeit, sondern die Dimension [Länge^2/Zeit]. Die physikalische Bedeutung gerade dieser Kombination werden wir noch sehen.

13.1.1 Der eindimensionale Zufallsweg

Es gibt viele heuristische Begründungen der Diffusionsgleichung. Wir wollen hier die Diffusionsgleichung als Grenzfall eines mikroskopischen *Zufallsweges* herleiten. Man spricht in diesem Fall auch oft von dem „Weg eines Betrunkenen“. Wir betrachten zunächst den eindimensionalen Fall.

Gegeben sei ein Punkt (ein „Betrunkener“), der sich entlang der x-Achse nur in Schritten der Länge 1 fortbewegen kann, wobei er pro Zeiteinheit genau einen Schritt macht. Jeder Schritt erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach rechts oder nach links,

unabhängig von den vorherigen Schritten. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit $P(N,l)$, daß sich der „Betrunkene“ nach N Schritten am Punkte l befindet. Dazu stellen wir eine rekursive Gleichung für $P(N,l)$ auf. Angenommen, $P(N,l)$ sei für einen bestimmten Wert N bekannt, dann gilt:

$$P(N+1,l) \;=\; \frac{1}{2}[P(N,l+1)+P(N,l-1)]\;. \tag{13.1}$$

Diese Gleichung beschreibt folgendes: Um nach $N+1$ Schritten am Punkte l zu sein, muß der Punkt vorher – d.h. nach N Schritten – an einem der Nachbarpunkte $l\pm 1$ gewesen sein. Von jedem dieser Nachbarpunkte gelangt er in einem Schritt mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ zum Punkt l. Ist $P(N,l)$ also für einen Wert von N bekannt – beispielsweise für $N=0$ als Startkonfiguration – dann läßt sich die Funktion $P(N,l)$ für alle weiteren N rekursiv nach obiger Formel berechnen.

Bevor wir die Gleichung weiter behandeln betrachten wir ein einfaches Beispiel. Der Startpunkt sei $l=0$, d.h. es gilt:

$$P(0,l) \;=\; \delta_{l,0}\;.$$

Nach einem Schritt kann sich der Punkt nur an den Punkten ± 1 befinden, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$:

$$P(1,l) \;=\; \frac{1}{2}(\delta_{l,1}\,+\,\delta_{l,-1})\;.$$

Dieses Resultat folgt auch aus obiger Gleichung, wenn wir $P(0,l)$ einsetzen. Nach zwei Schritten ist der Punkt mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ bei $l=\pm 2$ und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ bei $l=0$:

$$P(2,l) \;=\; \frac{1}{4}(\delta_{l,2}\,+\,2\,\delta_{l,0}\,+\,\delta_{l,-2})\;.$$

Dieses Beispiel werden wir im nächsen Abschnitt noch ausführlicher untersuchen.

Wir wollen nun von obiger Rekursionsformel zu einer Differentialgleichung gelangen. Dazu betrachten wir folgende Ersetzungen: Statt einer diskreten Schrittzahl N führen wir eine Zeit t und eine Schrittzeit δt ein. Zwischen je zwei Schritten vergeht also eine Zeit δt, und $t=N\delta t$ ist die nach N Schritten vergangene Zeit. Außerdem sei die Länge eines Schritts δx, d.h. der Entfernung l entspricht nun eine Entfernung $x=l\delta x$. (Wir bezeichnen die Schrittzeit und Schrittlänge mit δt bzw. δx – und nicht dem üblichen Differenzensymbol Δt bzw. Δx –, um Verwechslungen zu vermeiden, da Δ in diesem Abschnitt oft als Symbol für den Laplace-Operator auftritt.) Wir definieren nun eine Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t,x)$ durch:

$$p(t,x) \;=\; \frac{1}{\delta x}P\left(\frac{t}{\delta t},\frac{x}{\delta x}\right)\;. \tag{13.2}$$

Die Division durch Δx macht $p(t,x)$ zu einer Wahrscheinlichkeits*dichte*, d.h.

$$W(t,[a,b]) \;=\; \int_a^b p(t,x)\,\mathrm{d}x$$

ist die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt t den Punkt im Intervall $[a,b]$ anzutreffen. Insbesondere ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t,x)\,\mathrm{d}x \;=\; 1\ . \tag{13.3}$$

Für die Funktion $p(t,x)$ erhalten wir folgende Gleichung:

$$p(t+\delta t,x) \;=\; \frac{1}{2}[p(t,x+\delta x)+p(t,x-\delta x)]\ .$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung subtrahieren wir $p(t,x)$ und erweitern beide Seiten um $1/\delta t$ bzw. $1/(\delta x)^2$:

$$\frac{p(t+\delta t,x)-p(t,x)}{\delta t} \;=\; \frac{(\delta x)^2}{2\delta t}\,\frac{[p(t,x+\delta x)-2p(t,x)+p(t,x-\delta x)]}{\delta x^2}\ .$$

Nun betrachten wir die Verteilung nach einer sehr großen Anzahl von Schritten $N = t/\delta t \gg 1$. $p(t,x)$ sollte in diesem Fall zu einer glatten Funktion von t werden, so daß wir die linke Seite durch einen Differentialquotienten ersetzen dürfen. Außerdem erwarten wir, daß sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine glatte Funktion in der Variablen x beschreiben läßt, so daß wir auch die rechte Seite der Gleichung durch einen Differentialquotienten (den zweiten Differentialquotienten, d.h. die zweite Ableitung) annähern können. (Ein solcher Grenzfall ist strenggenommen nur im distributiven Sinne zu verstehen, d.h. beide Seiten von (13.2) sind über eine Testfunktion zu verschmieren.) Daß die rechte Seite gerade dem zweiten Differentenquotienten entspricht, haben wir schon bei dem Übergang von der N-Teilchen-Kette zur schwingenden Saite gesehen (vgl. Kap. 9.1, Gl. (9.3)). Wir erhalten somit:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x) \;=\; D\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(t,x)\ , \tag{13.4}$$

mit dem Diffusionskoeffizienten

$$D \;\simeq\; \frac{(\delta x)^2}{2\delta t}\ .$$

Wir haben hier die (1-dimensionale) Diffusionsgleichung als „makroskopischen Grenzfall“ eines sehr speziellen Systems hergeleitet. Es zeigt sich jedoch, daß eine große Anzahl von mikroskopischen Ausbreitungsprozeßen zu derselben Differentialgleichung führt. Lediglich die Konstante D gewinnt eine andere mikroskopische Bedeutung. Im vorliegenden Fall enthält D zwar die Information über die mittlere Schrittdauer δt (typischerweise die mittlere Stoßzeit) und die mittlere Schrittgröße δx (die mittlere

zurückgelegte Wegstrecke zwischen zwei Stößen), aber makroskopisch beobachtbar ist nur das angegebene Verhältnis. Eine genauere Analyse dieses Diffusionskoeffizienten im Rahmen der kinetischen Gastheorie stammt von Einstein, der so die Brownsche Bewegung als Effekt molekularer Stöße erklären konnte. Bei der Bewegung von Pollen sieht man jedoch nicht die einzelnen Stöße, sondern die mittleren Schwankungen einer sehr großen Anzahl von Stößen.

13.1.2 Binomische Koeffizienten und der Zufallsweg

Wir haben oben den Fall betrachtet, daß der „Betrunkene“ sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt $l = 0$ befindet. Wir erhalten für die ersten Schritte folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

$P(N,l) \simeq$

N	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	1				1				
1	$\frac{1}{2}$			1		1			
2	$\frac{1}{2^2}$		1		2		1		
3	$\frac{1}{2^3}$		1		3		3		1
4	$\frac{1}{2^4}$	1		4		6		4		1
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$				

Man erkennt in dem (Pascalschen) Dreieck die binomischen Koeffizienten wieder. Dies ist kein Zufall, wie folgende Überlegung zeigt: Wir definieren die Koeffizienten

$$b(N,k) \;=\; 2^N P(N, 2k-N) \qquad\qquad (k = 0, 1, \ldots, N) \;.$$

Man überzeuge sich, daß der hier angegebene Bereich für k gerade den möglichen Positionen für l nach N Schritten entspricht. Die Rekursionsformel für $P(N,l)$ bedeutet für diese Koeffizienten

$$b(N+1,k) \;=\; b(N,k-1) \;+\; b(N,k) \;.$$

$b(N,k)$ hat anschaulich die Bedeutung der Anzahl der Wege der Länge N, die von 0 zum Punkt $l = 2k - N$ führen. Die Wahrscheinlichkeit $P(N,l)$, nach N Schritten am Punkte l zu sein, ergibt sich aus der Anzahl der Wege von 0 nach l dividiert durch die Gesamtzahl aller Wege der Länge N, also 2^N. Die obige Rekursionsformel ist aber gerade die Rekursionsformel für binomische Koeffizienten. Außerdem führen sie zu der Anfangsbedingung:

$$P(N=0,l) \;=\; \delta_{l,0} \begin{cases} 1 & \text{für } l = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

13.1.3 Die Gauß-Funktion als Ausbreitungskern

Es ist bekannt, daß sich die Binomialkoeffizienten für sehr große Werte von N und l einer Gauß-Verteilung mit Zentrum bei $l = N/2$ annähern. Wir wollen diesen Grenzfall hier nicht nachrechnen, sondern statt dessen überprüfen, daß die Diffusionsgleichung (13.4) mit der Anfangsbedingung $p(0, x) = \delta(x)$ (d.h. das Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Sicherheit am Punkt $x = 0$) tatsächlich die Gauß-Funktion als Lösung hat. Wir werden später zeigen, daß es Standardverfahren gibt (die sogenannte Fourier-Zerlegung einer Funktion), diese Lösung zu finden.

Sei

$$p(t, x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -\frac{x^2}{4Dt} \;.$$

Für die Ableitung nach t erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) \;=\; \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4Dt^2} \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -\frac{x^2}{4Dt} \;.$$

Die erste Ableitung nach x ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial x} p(t, x) \;=\; \left(-\frac{x}{2Dt} \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -\frac{x^2}{4Dt} \;,$$

und für die zweite Ableitung nach x folgt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, x) \;=\; \left(\frac{x^2}{4D^2t^2} - \frac{1}{2Dt} \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp -\frac{x^2}{4Dt} \;.$$

Offensichtlich erfüllt $p(t, x)$ also die Diffusionsgleichung. Die spezielle Wahl des Normierungsfaktors ergibt sich aus der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t, x) \, \mathrm{d}x \;=\; 1 \;,$$

die sich mit der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \, \mathrm{d}x \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

leicht nachprüfen läßt. Diese Normierungsbedingung macht $p(t, x)$ zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, d.h. zu jedem Zeitpunkt t ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen *irgendwo* zu finden, gleich 1. Für kleine Werte von t ist die Gauß-Funktion immer schärfer um den 0-Punkt konzentriert, und im Grenzfall $t \to 0^+$ wird die Gauß-Verteilung zur δ-Funktion (vgl. Gl. (6.15 in Kap. 6.5).

Wir haben damit eine ganz spezielle Lösung der (1-dimensionalen) Diffusionsgleichung gefunden, nämlich zu einer Anfangsverteilung, die im 0-Punkt konzentriert ist. $p(t, x)$ ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1. $p(t,x)$ ist Lösung der Diffusionsgleichung.
2. $p(t,x)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (positiv und normiert).
3. $p(t,x) \stackrel{t\to 0^+}{\longrightarrow} \delta(x)$ ist die Anfangsverteilung.

Etwas allgemeiner können wir sagen, daß $p(t,x-y)$ eine Lösung der Diffusionsgleichung ist zu einer Anfangsbedingung, die zum Zeitpunkt $t=0$ um $x=y$ konzentriert ist.

Die Normierungseigenschaft ist aus der Interpretation von $p(t,x)$ als Wahrscheinlichkeitsverteilung selbstverständlich, andererseits liegt die Lösung der Diffusionsgleichung bei Vorgabe der Anfangsbedingungen fest. Es ist also zunächst nicht einsichtig, daß eine Lösung, deren Integral zu einem Zeitpunkt t auf 1 normiert ist, zu einem spätere Zeitpunkt immer noch derselben Bedingung genügt. Wir wollen daher beweisen, daß das Raum-Integral über eine Lösung der Diffusionsgleichung eine Erhaltungsgröße ist, also zeitlich konstant ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} p(t,x)\,\mathrm{d}x \;=\; D\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,p(t,x)\,\mathrm{d}x \;=\; D\,\frac{\partial}{\partial x}p(t,x)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} \;=\; 0\;.$$

Die Voraussetzung ist somit, daß die räumliche Ableitung von $p(t,x)$ bei $x=\pm\infty$ verschwindet.

Wir wollen nun zeigen, daß wir mit dieser speziellen Lösung das Anfangswertproblem ganz allgemein gelöst haben. Sei $f(x)$ irgendeine Verteilungsfunktion, die der Verteilung zum Zeitpunkt $t=0$ entsprechen soll. Wir wollen nun wissen, wie sich diese Verteilung nach der Diffusionsgleichung zeitlich entwickelt. Wir behaupten, daß

$$F(t,x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} p(t,x-y)\,f(y)\,\mathrm{d}y \tag{13.5}$$

Lösung der Diffusionsgleichung mit der Anfangsbedingung $F(0,x)=f(x)$ ist, also der gesuchten Lösung entspricht. Da $p(t,x-y)$ (als Funktion von t und x) Lösung der Diffusionsgleichung ist, ist $F(t,x)$ offensichtlich ebenfalls Lösung der Diffusionsgleichung. Und da $p(0,x-y)=\delta(x-y)$, ist $F(0,x)=f(x)$. In einem gewissen Sinne ist $F(t,x)$ also eine Superposition von Lösungen mit δ-förmigen Anfangsbedingungen, die jeweils mit $f(y)$ – also der Anfangsverteilung – gewichtet sind. Da die Diffusionsgleichung eine lineare Differentialgleichung ist, sind Superpositionen von Lösungen natürlich ebenfalls Lösungen.

13.1.4 Die 3-dimensionale Diffusionsgleichung

Wir haben uns bisher nur mit der 1-dimensionalen Diffusionsgleichung beschäftigt. Diese hatten wir als „Kontinuumslimes“ eines 1-dimensionalen Zufallsweges erhalten. Ganz entsprechend erhält man die 3-dimensionale Diffusionsgleichung als Kontinuumslimes

eines 3-dimensionalen Zufallsweges. Der „Betrunkene“ kann nun in drei Dimensionen in jeweils zwei gegenüberliegende Richtungen laufen. Es gibt also an jedem Punkt (l_1, l_2, l_3) sechs Möglichkeiten, so daß wir als Rekursionsformel für $P(N, \vec{l})$ nun erhalten:

$$\begin{aligned} P(N+1,\vec{l}) &= \frac{1}{6}[P(N,l_1+1,l_2,l_3)+P(N,l_1-1,l_2,l_3)+P(N,l_1,l_2+1,l_3) \\ &\quad +P(N,l_1,l_2-1,l_3)+P(N,l_1,l_2,l_3+1)+P(N,l_1,l_2,l_3-1)] \ , \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} P(N+1,\vec{l})-P(N,\vec{l}) &= \frac{1}{6}[P(N,l_1+1,l_2,l_3)-2P(N,\vec{l})+P(N,l_1-1,l_2,l_3)] \\ &\quad + \frac{1}{6}[P(N,l_1,l_2+1,l_3)-2P(N,\vec{l})+P(N,l_1,l_2-1,l_3)] \\ &\quad + \frac{1}{6}[P(N,l_1,l_2,l_3+1)-2P(N,\vec{l})+P(N,l_1,l_2,l_3-1)] \ . \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite erkennen wir den zweiten Differenzenquotienten für jede der drei Richtungen, dementsprechend erwarten wir im Kontinuumslimes eine Gleichung der Form:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,\vec{x}) \ = \ D\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)p(t,\vec{x}) \ = \ D\Delta p(t,\vec{x}) \ ,$$

mit

$$D \ = \ \frac{1}{6}\frac{(\delta x)^2}{\delta t} \ .$$

Als Lösung erhalten wir das Produkt von drei Gauß-Funktionen zu jeder Richtung:

$$p(t,\vec{x}) \ = \ \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\exp -\frac{|\vec{x}|^2}{4Dt} \ .$$

Man beachte, daß die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zum Zeitpunkt t am Punkte $\vec{x} = 0$ zu finden, nun wie $t^{-3/2}$ abfällt. Im eindimensionalen Fall war das Verhalten proportional zu $t^{-1/2}$. Ganz allgemein gilt in d Dimensionen ein Abfallverhalten der Form $t^{-d/2}$. (Bei manchen Diffusionsprozessen in porösen Medien mißt man einen nicht-ganzzahligen Wert für d. In diesem Fall spricht man von einer „anormalen“ Diffusionsdimension.)

Für $t \to 0^+$ wird $p(t,\vec{x})$ wieder zur δ-Funktion (allerdings in 3 Dimensionen: $\delta(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$). Mit dieser speziellen Lösung haben wir auch wiederum das Anfangswertproblem allgemein gelöst. Zu einer Anfangsverteilung $f(\vec{x})$ ist

$$F(t,\vec{x}) \ = \ \int_{\mathbb{R}^3} p(t,\vec{x}-\vec{y})\, f(\vec{y})\, \mathrm{d}^3y \tag{13.6}$$

die Lösung der Diffusionsgleichung.

Man beachte die Ähnlichkeit der allgemeinen Lösungen der Diffusionsgleichung (13.5) und (13.6) mit den Lösungen von inhomogenen Gleichungen als Faltung des Quellterms mit der Greenschen Funktion. Allerdings beachte man auch den wesentlichen Unterschied: Die Greensche Funktion war Lösung der *inhomogenen* Gleichung mit einer δ-förmigen *Quelle* und führte zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung. $p(t, \vec{x})$ ist Lösung der *homogenen* Gleichung zu einer δ-förmigen *Anfangsbedingung* und führt zur allgemeinen Lösung der Anfangswertproblems der homogenen Gleichung.

13.1.5 Physikalische Interpretation der Gauß-Lösung

Wir haben bisher $p(t, \vec{x})$ als eine *Wahrscheinlichkeitsverteilung* interpretiert. Ausgangspunkt war ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\vec{x} = 0$ befindet, und $p(t, \vec{x})\,\mathrm{d}^3x$ war die *Wahrscheinlichkeit*, dieses Teilchen zum Zeitpunkt t in einem Volumen d^3x um den Punkt $\vec{x}$ zu finden. Im Fall einer Materiediffusion in einem Lösungsmittel (beispielsweise Tinte in Wasser) haben wir jedoch folgende Situation: Sehr viele Teilchen ($\approx 10^{17}$) befinden sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in einem sehr kleinen Raumgebiet ($\approx 1\,\mathrm{mm}^3$) und $p(t, \vec{x})$ ist proportional zur *Dichteverteilung* dieser Teilchen zum Zeitpunkt t, d.h. $p(t, \vec{x})\,\mathrm{d}^3x$ ist proportional zur *Anzahl* der Teilchen in einem Raumvolumen d^3x um den Punkt $\vec{x}$. Die physikalische Vorstellung bei dieser Uminterpretation von $p(t, \vec{x})$ von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zu einer Dichteverteilung ist, daß jedes Teilchen unabhängig von den anderen Teilchen einem zufälligen Ausbreitungsprozeß unterliegt. Wichtig ist die Unabhängigkeit von den anderen Teilchen: Falls die Tintenmoleküle „aneinanderkleben“ wird es nicht zu einer unabhängigen Diffusion der einzelnen Moleküle kommen, und das Diffusionsgesetz kann daher von der Gaußverteilung abweichen.

Bei der Wärme bzw. Temperaturdiffusion handelt es sich eigentlich um die Diffusion von Energie. Die sehr hohe kinetische Energie einiger Moleküle in der Nähe von $\vec{x} = 0$ zum Anfangszeitpunkt (induziert beispielsweise durch eine elektrische Entladung) verteilt sich durch Stoßprozesse mit den Nachbarmolekülen auf einen immer größeren Bereich. Die kinetische Energie der „schnellen“ Moleküle nimmt bei diesen Stoßprozessen im Mittel ab, während die kinetische Energie der „langsamen“ Moleküle in der Umgebung entsprechend zunimmt, bis es nach langer Zeit zu einem Ausgleich gekommen ist, bei dem sich die kinetische Energie aller Moleküle in einem Behälter (und damit die Temperatur) etwas erhöht hat.

Zum Abschluß dieser dynamischen Betrachtungen wollen wir die Ausbreitungsgeschwindigkeiten bei Diffusionsprozeßen untersuchen. Dazu betrachten wir den Erwartungswert von x^2 bezüglich der Verteilung $p(t, x)$:

$$R(t)^2 \;:=\; \langle x^2 \rangle_t \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, p(t, x)\, \mathrm{d}x \;.$$

Aus den allgemeinen Integralformeln für Gauß-Verteilungen folgt:

$$R(t)^2 \;=\; 2Dt \qquad \text{bzw. in } d \text{ Dimensionen} \qquad R(t)^2 \;=\; 2dDt \;.$$

Wir erhalten somit folgende Relation

$$R(t) \;\propto\; \sqrt{t} \;. \tag{13.7}$$

$R(t)$ ist der mittlere Abstand vom Ursprung, den ein Teilchen bei einem Diffusionsprozeß zum Zeitpunkt t erreicht hat. (Dies ist *nicht* die mittlere Wegstrecke, die das Teilchen dabei zurückgelegt hat. Da das Teilchen eine Wegstrecke auch wieder zurücklaufen kann, ist der mittlere Abstand vom Ursprung erheblich kleiner als die zurückgelegte Wegstrecke, die beim Zufallsweg $t\delta x/\delta t$ betragen würde.) $R(t)$ ist somit ein Maß für die Ausbreitung des Diffusionsprozesses zum Zeitpunkt t, und $\dot{R}(t) \propto 1/\sqrt{t}$ wäre ein Maß für die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Für sehr kleine Zeiten breitet sich die Diffusion daher sehr schnell aus, wenn jedoch die Zeit sehr viel größer als Stoßzeit δt wird, dann nimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit rasch ab. Um eine Vorstellung von den teilweise extrem langsamen Diffusionsausbreitungen zu erhalten, betrachten wir ein Photon, das im Zentrum der Sonne erzeugt wird, und das durch Stoß prozesse mit den Protonen und Elektronen im Sonnenplasma langsam zur Sonnenoberfläche diffundiert. Da es nur um eine Abschätzung der Größenordnung geht, spielen Details dieses Prozesses keine Rolle.

Die Geschwindigkeit des Photons ist die Lichtgeschwindigkeit c. Bei einem Sonnenradius von $\approx 700\,000\,\text{km}$ bräuchte das Photon etwas mehr als 2 Sekunden vom Sonnenzentrum zum Sonnenrand, falls es im Inneren der Sonne nicht gestreut würde. Bei Zugrundelegung des naiven Zufallsweges, den wir oben betrachtet haben, ergibt sich zwischen der Zeitdauer t, dem mittleren Abstand zu diesem Zeitpunkt $R(t)$, der Stoßzeit δt und der mittleren freien Weglänge δx folgende Relation:

$$\frac{R(t)^2}{t} \;=\; \frac{(\delta x)^2}{\delta t} \;=\; c\,\delta x \;,$$

bzw.

$$t \;=\; \frac{R^2}{c\,\delta x} \;.$$

Setzen wir für δx eine mittlere freie Wegstrecke von $10^{-3}\,\text{cm}$ an, so erhalten wir für die Zeit, bis das Photon an den Rand der Sonne diffundiert ist $t \approx 5\,\text{Millionen Jahre}$. Ebenfalls sehr große Zeiten (Monate bis Jahre) findet man, wenn man die Diffusion von Wärme in einem Zimmer berechnet. Die Wärmeausbreitung erfolgt daher – abgesehen von den ersten Minuten – in erster Linie durch konvektive Mechanismen und nicht durch Diffusion. Eine Vorstellung von der Dauer von Diffusionsprozessen gewinnt man auch, wenn man einen Tropfen Tinte vorsichtig in Wasser bringt, ohne im Wasser eine Bewegung zu erzeugen. Auch in diesem Fall liegen die Zeiten der Diffusion im Bereich von Tagen.

13.1.6 Statische Lösungen mit Randbedingungen

Die Diffusionsgleichung beschreibt die Zeitabhängigkeit von Verteilungen. Bisher haben wir eine bestimmte Anfangsverteilung vorgegeben und anschließend die zeitliche Entwicklung dieser Anfangsverteilung berechnet. Nach sehr langer Zeit $t \to \infty$ wird man erwarten, daß sich ein statischer Zustand einstellt, d.h., daß sich die Verteilungsfunktion nicht mehr verändert. Eine statische Verteilung genügt (per definitionem) der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) \;=\; 0 \;,$$

d.h., die statischen Verteilungen werden Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) \;=\; 0$$

sein.

Untersuchen wir die Gauß-Verteilung für große Zeiten $t \to 0$, so verflacht die Funktion immer mehr und nähert sich schließlich der 0-Funktion. Dies entspricht einer Materiediffusion in einem unendlich ausgedehnten Lösungsmittel oder einer Temperaturdiffusion in einem unendlich ausgedehnten Material. Physikalisch wird es diese „unendlich ausgedehnten“ Systeme nicht geben, so daß der Diffusionsprozeß nur solange durch die Gauß-Verteilung beschrieben wird, bis Randeffekte wichtig werden, d.h. bis die Gauß-Funktion an den Rändern des Systems wesentlich von Null verschieden ist. Wir haben also bisher nur eine „Startsituation“ beschrieben.

Offensichtlich ist die Funktion $\Phi(\vec{x}) = \text{const.}$ eine Lösung der Laplace-Gleichung, d.h. die konstante Verteilung (innerhalb eines berandeten Gebietes) ist eine statische Lösung der Diffusionsgleichung, die sich im allgemeinen auch einstellen wird, wenn durch besondere Randbedingungen keine andere Verteilung erzwungen wird. Als Beispiel für solche besonderen Randbedingungen betrachten wir die Temperaturverteilung zwischen zwei (unendlich ausgedehnen, parallelen) Platten im Abstand L, die auf unterschiedliche Temperaturen T_1 und T_2 aufgeheizt werden. Dabei vernachlässigen wir zunächst alle Konvektionsprobleme, d.h. die Tatsache, daß heißere Materie leichter wird und dadurch einen Auftrieb erhält.

Die statische Verteilung, die sich nun einstellen wird, muß den Randbedingungen genügen, d.h. beispielsweise für $x = 0$ die Temperatur T_1 haben und für $x = L$ die Temperatur T_2. Die Lösung ist:

$$\Phi(x) \;=\; T_1 \;+\; \frac{x}{L}(T_2 - T_1) \;.$$

Die zweite Ableitung von Φ ist offensichtlich Null, d.h. Φ erfüllt die Laplace-Gleichung, und an den Rändern hat Φ die vorgegebenen Temperaturen. Das Temperaturgefälle, das sich bei diesen Randbedingungen nach sehr langer Zeit einstellt, ist linear.

Wir werden auf Lösungen der Laplace-Gleichung zu vorgegebenen Randbedingungen noch eingehen, so daß wir die Diskussion der Diffusionsgleichung an dieser Stelle abschließen.

13.2 Die Wellengleichung

13.2.1 Physikalische Anwendungen

Auch die Wellengleichung tritt in verschiedenen Bereichen der theoretischen Physik auf, und auch sie kann als 1-, 2- oder 3-dimensionale Gleichung vorliegen. Der 1-dimensionalen Wellengleichung,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x) \;=\; c^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x)\;,$$

sind wir schon bei der Untersuchung der schwingenden Saite begegnet. In diesem Fall war $\Phi(t,x)$ die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt t am Punkte x. Ganz entsprechend beschreibt die 2-dimensionale Wellengleichung,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x,y) \;=\; c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x,y) \;+\; \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,x,y)\right)\;,$$

die Schwingungen einer Membran (für kleine Auslenkungen), und die 3-dimensionale Wellengleichung tritt bei der Beschreibung von Wellen in Festkörpern auf. Außerdem erhält man die Wellengleichung aus den Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik im Vakuum, d.h. ohne äußere Ladungen oder Ströme. Die Maxwell-Gleichungen lauten in diesem Fall:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x},t) \;+\; \frac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} &= 0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x},t) &= 0\end{aligned}$$

(gelten immer) und

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x},t) \;-\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial\vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t} &= 0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x},t) &= 0\end{aligned}$$

(gelten nur für $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$). Bilden wir von der ersten Gleichung nochmals die Rotation und setzen durch Eliminierung von $\vec{B}$ die dritte Gleichung ein, so folgt:

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x},t)) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{x},t) \;=\; 0\;.$$

Mit der allgemein gültigen Relation

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{x},t)) \;=\; \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x},t)) \;-\; \Delta\vec{E}(\vec{x},t)$$

und der zweiten Maxwell-Gleichung ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$) erhalten wir schließlich:

$$\Delta\vec{E}(\vec{x},t) \;-\; \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{E}(\vec{x},t) \;=\; 0\;.$$

Eine ganz entsprechende Gleichung findet man auch für das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x},t)$. Jede Lösung für das elektrische Feld und das Magnetfeld im Vakuum muß daher die Wellengleichung erfüllen. Andererseits ist jedoch nicht jede Lösung der Wellengleichung automatisch Lösung der Vakuum-Maxwell-Gleichungen. (Bei der Bildung der Rotation haben wir Information über die Lösungen der Maxwell-Gleichungen verloren.) Beispielsweise gelten die Wellengleichungen für alle drei Komponenten des elektromagnetischen Feldes. Die beiden „Divergenz"-Gleichungen – $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ – schränken jedoch die möglichen Lösungen auf sogenannte *transversale* Schwingungen ein. Es gibt keine longitudinalen Schwingungsmoden des elektromagnetischen Feldes, d.h. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

Eine weitere Einschränkung ergibt sich daraus, daß das elektrische und das magnetische Feld über die Maxwell-Gleichungen miteinander gekoppelt sind, wohingegen die Wellengleichungen zunächst für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ unabhängig sind. Die Lösung des elektrischen Feldes legt jedoch die Lösung für das magnetische Feld fest. Ziel dieses Abschnittes ist jedoch nicht, die Vakuum-Maxwell-Gleichungen zu lösen, sondern allgemeiner Lösungen der Wellengleichung zu untersuchen.

13.2.2 Ebene Wellen

Eine in der Anwendung wichtige Klasse von Lösungen der Wellengleichung sind die sogenannten ebenen Wellen. Als Spezialfall dieses Typs von Lösungen betrachten wir ein Feld $\Phi(t,\vec{x})$, das von zwei Koordinaten – beispielsweise x_2 und x_3 – nicht abhängen soll, also

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi(t,\vec{x}) \;=\; \frac{\partial}{\partial x_3}\Phi(t,\vec{x}) \;=\; 0\;.$$

Unter dieser Annahme wird die 3-dimensionale Wellengleichung zur 1-dimensionalen Wellengleichung, deren Lösungen wir schon bestimmt haben. Ohne die Berücksichtigung eventueller Randbedingungen war

$$\Phi(t,x_1) \;=\; f(x_1+ct) \;+\; g(x_1-ct)$$

die allgemeinste Lösung der 1-dimensionalen Wellengleichung. Als spezielle Lösungen mit einer bestimmten Wellenzahl k, d.h. einer bestimmten Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ war

$$\Phi_k(t,x_1) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1 \pm ct)}$$

Lösung der Wellengleichung. Die Ausbreitungsrichtung dieser ebenen Welle ist entlang der 1-Achse, das Profil ändert sich nicht, allerdings verschiebt es sich mit der Geschwindigkeit c. Die beiden Vorzeichen unterscheiden „left- and right-movers“.

Wir haben in diesem Fall die 1-Richtung besonders ausgezeichnet und dabei eine spezielle Klasse von Lösungen erhalten. Der Laplace-Operator zeichnet jedoch keine Richtung aus – er ist rotationsinvariant –, so daß es zu jeder Richtung $\vec{n}$ (Einheitsvektor) ebene Wellen geben sollte. Wir wollen nun zeigen, daß

$$f(\vec{n}\cdot\vec{x}+ct) \qquad \text{und} \qquad g(\vec{n}\cdot\vec{x}-ct)$$

für jede Funktion f und g und jede Richtung $\vec{n}$ Lösungen der Wellengleichungen sind. Für die zweite Ableitung nach der Zeit gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct) \;=\; c^2 f''(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct)\;.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
& & \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct) &= n_i f'(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct) \\
\text{und} & & \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct) &= n_i^2 f''(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct) \\
\text{bzw.} & & \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct) &= \sum_{i=1}^{3} n_i^2 f''(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct) \\
& & &= f''(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct)\;.
\end{aligned}$$

Somit sind

$$\Phi_+(t,\vec{x}) \;=\; f(\vec{n}\cdot\vec{x}+ct)$$

und

$$\Phi_-(t,\vec{x}) \;=\; g(\vec{n}\cdot\vec{x}-ct)$$

Lösungen der Wellengleichung. In der Ebene senkrecht zu $\vec{n}$ variieren diese Lösung räumlich nicht, außerdem ändern sich die Profile der beiden Lösungen nicht, sondern verschieben sich mit der Geschwindigkeit $\pm c$ entlang der $\vec{n}$-Achse.

13.2.3 Zeitlicher Exponentialansatz

Der Exponentialansatz hat schon bei der eindimensionalen Wellengleichung zur Lösung geführt, daher wollen wir ihn auch hier anwenden. Wir untersuchen zunächst den zeitlichen Exponentialansatz, d.h.

$$\Phi(t,\vec{x}) \;=\; A(\omega,\vec{x})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\;.$$

Er führt auf folgende Gleichung:

$$-\omega^2 A(\omega,\vec{x}) \;=\; c^2 \Delta A(\omega,\vec{x}) \;,$$

in der wir die Helmholtz-Gleichung wiedererkennen:

$$(k^2+\Delta)A(\omega,\vec{x}) \;=\; 0 \qquad\qquad \text{mit} \quad \omega^2 = c^2 k^2 \;.$$

Zu jeder Lösung der Helmholtz-Gleichung mit einem bestimmten Wert von k haben wir daher auch Lösungen der Wellengleichung gefunden.

Zu jedem Wert von k, zu dem es eine Lösung der Helmholtz-Gleichung gibt, existieren daher zwei Lösungen der Wellengleichung ($\omega = \pm ck$). Die allgemeinste Lösung der Wellengleichung lautet daher:

$$\Phi(t,\vec{x}) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \; A(\omega,\vec{x}) \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \;,$$

wobei $A(\omega,\vec{x})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung sein muß. Nun ist eine physikalische Welle immer reell, so daß wir die Koeffizientenfunktionen nicht beliebig wählen dürfen, sondern es muß gelten:

$$\begin{aligned} \Phi(t,\vec{x}) &= \Phi(t,\vec{x})^* \\ \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \; A(\omega,\vec{x}) \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \; A^*(\omega,\vec{x}) \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \; A^*(-\omega,\vec{x}) \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \;. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir die Integrationsvariable ω durch $-\omega$ ersetzt. (Die beiden Vorzeichen vom Variablenwechsel und dem Wechsel der Integrationsgrenzen heben sich gegeneinander auf.) Damit erhalten wir die sogenannte *Realitätsbedingung*:

$$A^*(\omega,\vec{x}) \;=\; A(-\omega,\vec{x}) \;.$$

Die allgemeinste reelle Lösung hat mit $A = \frac{1}{2}(a - \mathrm{i}b)$ dann die Form:

$$\Phi(t,\vec{x}) \;=\; \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \;\; [a(\omega,\vec{x}) \, \cos\omega t \;+\; b(\omega,\vec{x}) \, \sin\omega t] \;.$$

$a(\omega,\vec{x})$ und $b(\omega,\vec{x})$ sind dabei reelle Lösungen der Helmholtz-Gleichung zu $\omega = +ck$.

13.2.4 Allgemeiner Exponentialansatz

Wir können nun sowohl bezüglich der räumlichen Komponenten wie auch der zeitlichen Entwicklung einen Exponentialansatz machen:

$$\Phi(\vec{x},t) \;=\; A(\vec{k},\omega) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x} + \mathrm{i}\omega t} \;.$$

Dieser Ansatz führt auf die Gleichung:

$$\omega^2 \;=\; c^2(\vec{k}^2) \;=\; c^2(k_1^2+k_2^2+k_3^2)\;.$$

Wir erhalten also eine Beziehung zwischen der Frequenz ω der Welle und dem sogenannten *Wellenvektor* $\vec{k}$. Für $\omega(\vec{k})$ definieren wir im folgenden die positive Wurzel dieser Gleichung als sogenannte Dispersionsrelation der Welle:

$$\omega(\vec{k}) \;=\; c|\vec{k}|\;.$$

Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung erhalten wir somit aus der Überlagerung von solchen Exponentialfunktionen. Da wir zunächst keinerlei Einschränkungen durch Randbedingungen an $\vec{k}$ haben, finden wir als allgemeine Lösung der Wellengleichung:

$$\Phi(t,\vec{x}) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3\;\left(a_+(\vec{k})\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega(\vec{k})t)} \;+\; a_-(\vec{k})\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}\right)\;. \tag{13.8}$$

Die Koeffizientenfunktionen $a_+(\vec{k}) = A(\vec{k},\omega(\vec{k})$ und $a_-(\vec{k}) = A(\vec{k},-\omega(\vec{k}))$ sind dabei beliebige (integrable) Funktionen des Wellenzahlvektors.

Man beachte, daß die Kombination der Terme in der Exponentialfunktion

$$\vec{k}\cdot\vec{x}\pm|\vec{k}|ct \;=\; |\vec{k}|(\vec{n}\cdot\vec{x}\pm ct) \qquad \text{mit} \quad \vec{n} \;=\; \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

gerade dem Argument bei ebenen Wellen entspricht. Die Richtung von $\vec{k}$ definiert somit die Ausbreitungsrichtung und der Betrag die Wellenlänge: $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$. Die Zerlegung der allgemeinen Lösung (13.8) entspricht daher einer Zerlegung nach ebenen Wellen, wobei Superpositionen von allen Richtungen und allen Wellenlängen auftreten.

Auch von der Lösung (13.8) ist aus physikalischen Gründen Realität zu fordern, d.h.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3\;\left(a_+(\vec{k})\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega(\vec{k})t)} \;+\; a_-(\vec{k})\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}\right)\\
&\quad=\; \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3\;\left(a_+^*(\vec{k})\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega(\vec{k})t)} \;+\; a_-^*(\vec{k})\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}\right)\\
&\quad=\; \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3\;\left(a_+^*(-\vec{k})\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} \;+\; a_-^*(-\vec{k})\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{x}+\omega(\vec{k})t)}\right)\;.
\end{aligned}$$

Dies führt auf die Realitätsbedingung:

$$a_+^*(-\vec{k}) \;=\; a_-(\vec{k}) \qquad \text{und} \qquad a_-^*(-\vec{k}) \;=\; a_+(\vec{k})\;.$$

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 1

26. 4. 1996

1. Spiralförmige Bahnkurve

Betrachten Sie die folgende Bahnkurve:

$$\vec{x}(t) \;=\; (R\sin\omega t, R\cos\omega t, at)$$

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskurve und Beschleunigungskurve.
2. Zeigen Sie, daß der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist. Beweisen Sie, daß für Geschwindigkeiten von konstantem Betrag die Beschleunigung immer senkrecht auf der Geschwindigkeit steht.
3. Zeigen Sie, daß für ein Teilchen der Masse m, das sich entlang obiger Bahnkurve bewegt, die z-Komponente des Drehimpulses erhalten ist.
4. Berechnen Sie die Länge der Kurve für einen Umlauf um die z-Achse.
5. Gegeben sei ein Kraftfeld der folgenden Form:

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) \;=\; (x_2, -x_1, 0)\ .$$

Welche Arbeit muß man leisten, um ein Masseteilchen, auf das diese Kraft wirkt, entlang der Bahnkurve einmal um die z-Achse zu transportieren. Zeigen Sie, daß diese Arbeit unabhängig von a ist, also auch für $a = 0$ (d.h. bei einem geschlossenen Weg) von Null verschieden ist.

2. Gradient, Rotation, Divergenz

1. Berechnen Sie den Gradienten zu folgenden Potentialen:

$$U = |\vec{x}|^2\ ,\quad U = \frac{1}{|\vec{x}|}\ ,\quad U = x_1 x_2$$

2. Berechnen Sie Rotation und Divergenz folgender Vektorfelder:

$$\vec{F} = (x_1, x_2, x_3)\ ,\quad \vec{F} = (x_2, -x_1, 0)\ ,\quad \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}(x_1, x_2, 0)$$

Wie sieht bei den rotationsfreien Fällen das Potential aus?

3. Für ein skalares Feld $\varphi(\vec{x})$ und Vektorfelder $\vec{A}(\vec{x})$ und $\vec{B}(\vec{x})$ zeigen Sie folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) &= (\vec{\nabla}\varphi) \times \vec{A} + \varphi(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{A}) &= (\vec{\nabla}\varphi) \cdot \vec{A} + \varphi(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

sowie

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \, .$$

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 2

10. 5. 1996

3. Taylor-Entwicklung von skalaren Funktionen

Gegeben sei ein skalares Potential $U(\vec{x})$.

1. Wie lautet die Taylor-Entwicklung von $U(\vec{x}+\delta\vec{x})$ um den Punkt $\vec{x}$! Geben Sie explizit den Term der Ordnung $\mathcal{O}(|\delta x|^2)$ an. (Anmerkung: Unter der Ordnung $|\delta x|^p$ versteht man alle Terme der Art $\delta x_1^a\,\delta x_2^b\,\delta x_3^c$ mit $a+b+c=p$.)

2. Bestimmen Sie zu einer Bahnkurve $t\in[-\epsilon,\epsilon]\to\vec{x}(t)$ mit $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$ die Entwicklung von $U(\vec{x}(t))$ nach t bis zur Ordnung $\mathcal{O}(t^2)$.

4. Entwicklung eines Potentials um einen stationären Punkt

Gegeben sei ein Potential $U(\vec{x})$, das bei $\vec{x}=\vec{x}_0$ einen stationären Punkt hat, d.h. es gilt

$$\vec{\nabla}U(\vec{x}_0) \;=\; 0\;.$$

Zeigen Sie, daß es ein geeignetes Koordinatensystem gibt, in dem $U(\vec{x})$ bis zur quadratischen Ordnung in $\delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{x}_0$ die Form

$$U(\vec{x}) \;\approx\; U(\vec{x}_0) \;+\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\,(\delta x_i)^2$$

annimmt. Welche Bedeutung haben die Parameter λ_i?

5. Taylor-Entwicklung von Vektorfeldern

Betrachten Sie nun ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$. Wie lautet in diesem Fall die Taylor-Entwicklung von $\vec{F}(\vec{x}+\delta\vec{x})$ um den Punkt $\vec{x}$, und wie sehen der lineare und der quadratische Term einer Entwicklung von $\vec{F}(\vec{x}(t))$ nach t aus?

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 3

17. 5. 1996

6. Die Euler-Formel

Beweisen Sie durch einen Vergleich der beiden Potenzreihen die Euler-Formel:

$$e^{\mathrm{i}\varphi} \;=\; \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \;.$$

Überprüfen Sie nach demselben Verfahren, daß

$$\exp\left[\varphi\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \;=\; \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \;.$$

Die Exponentialfunktion einer Matrix A ist dabei ebenfalls durch ihre Potenzreihenentwicklung definiert:

$$\mathrm{e}^{A} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \;.$$

Berechnen Sie

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$, $\mathrm{e}^{24\pi\mathrm{i}}$.
2. i^{i} , $\sqrt{\mathrm{i}}$, z^z mit $z = x + \mathrm{i}y$, $\ln(-1)$.
3. $\sin(ix)$, $\cos(ix)$, $\sinh(ix)$, $\cosh(ix)$, $\sinh z$ $(z = x + iy)$.

7. Der Residuensatz

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{z_0} (z - z_0)^n \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \;,$$

wobei $\oint_{z_0}$ ein geschlossenes Wegintegral entgegen dem Uhrzeigersinn um den Punkt z_0 bezeichnet.

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 4

24. 5. 1996

8. Integraldarstellung der Θ-Funktion

Die Heaviside-Funktion (oder auch Θ-Funktion) ist definiert als

$$\Theta(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

(Der Wert $\Theta(0) = 1/2$ wird oft aus Bequemlichkeitsgründen angenommen, spielt aber im allgemeinen keine Rolle.)

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das folgende Integral für $x \neq 0$

$$f(x,\epsilon) \;=\; \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k - i\epsilon} \;,$$

und zeigen Sie:

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(x,\epsilon) \;=\; \Theta(x) \;.$$

(Hinweis: Machen Sie die Fallunterscheidung $x > 0$ und $x < 0$ und schließen Sie je nach Vorzeichen von x den Integrationsweg über einen „großen“ Halbkreis in der positive bzw. negativen komplexen Halbebene.)

Was ergibt das Integral für $x = 0$?

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 5

31. 5. 1996

9. Das geladene Teilchen in einem kostanten Magnetfeld

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens mit der Masse m und der Ladung e in einem Magnetfeld $\vec{B}$ ist durch die Lorentzkraft gegeben, d.h.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; e(\vec{v}(t)\times\vec{B})\;.$$

Wir nehmen im folgenden ein konstantes (ortsunabhängiges) Magnetfeld entlang der 3-Richtung an:$\vec{B} = B\vec{e}_3$. In diesem Fall hängt die Bewegungsgleichung nicht vom Ort des Teilchens ab, d.h. es handelt sich um eine Differentialgleichung für $\vec{v}(t)$.

1. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für die drei Komponenten getrennt hin. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die 3-Komponente.

2. Lösen Sie die verbleibenden Differentialgleichungen indem Sie

   a) beide Gleichungen nochmals ableiten, und anschließend durch Bildung einer geschickten Linearkombination die Beiträge für v_1 und v_2 entkoppeln,

   b) direkt die Lösung von

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} v_1(t)\\ v_2(t)\end{pmatrix} \;=\; \omega\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1(t)\\ v_2(t)\end{pmatrix}$$

   durch die Exponentialfunktion der Koeffizitentenmatrix (vgl. Augabenblatt 3) angeben:

   $$\begin{pmatrix} v_1(t)\\ v_2(t)\end{pmatrix} \;=\; \exp\left[\omega t\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} v_1(0)\\ v_2(0)\end{pmatrix}\;,$$

   wobei $\omega = eB/m$.

3. Berechnen Sie aus den Lösungen für $\vec{v}(t)$ die Bahnkurve $\vec{x}(t)$.

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 6

7. 6. 1996

9. Die „lineare Kette“ aus drei Massepunkten

Betrachten Sie die lineare Kette aus drei Massepunkten der Masse m, wobei Massepunkt 1 und Massepunkt 3 noch über eine Feder mit einer festen Aufhängung verbunden sein sollen. Berücksichtigen Sie im folgenden nur die longitudinalen Bewegungsfreiheitsgrade.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, und schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in der Form
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{x}(t) \;=\; -\frac{D}{m}\,\Gamma\,\vec{x}(t)\;,$$
wobei Γ eine 3×3-Matrix ist und $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ die jeweiligen Auslenkungen der Teilchen aus ihrer Ruhelage beschreibt.

2. Schreiben Sie allgemein die Lösung $\vec{x}(t)$ in der Basis der Eigenvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ von Γ, und bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten in dieser Basis als Funktion der jeweiligen Eigenwerte λ_i $(i = 1, 2, 3)$.

3. Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren von Γ explizit.

4. Lösen Sie allgemein das Anfangswertproblem, d.h., eliminieren Sie die freien Integrationskonstanten der allgemeinen Lösung durch die Anfangskonfiguration $\vec{x}(0)$ und die anfängliche Geschwindigkeit $\vec{v}(0)$ der drei Massepunkte.

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 7

15. 6. 1996

10. Die Greensche Funktion zum gedämpften Oszillator

Bestimmen Sie die retardierte Greensche Funktion zum gedämpften harmonischen Oszillator, d.h. die Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) G(t,t') \;=\; \delta(t-t')$$

mit der Randbedingung:

$$G(t,t') \;=\; 0 \qquad \text{für } t < t' \;.$$

In der Vorlesung wurde die erzwungene gedämpfte Schwingung

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\right) x(t) \;=\; g(t)$$

mit

$$g(t) \;=\; A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

durch einen Exponentialansatz gelöst. Bestimmen Sie nun die Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion, d.h. durch explizite Auswertung von

$$x(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')\,g(t')\,\mathrm{d}t' \;.$$

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 8

22. 6. 1996

11. Infinitesimale Drehungen – Generatoren der Drehgruppe

Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}R(\varphi)\Big|_{\varphi=0}\vec{x} \;=\; \vec{v}\times\vec{x}$$

Benutzen Sie dazu die in der Vorlesung abgeleitete Darstellung einer Rotationsmatrix um einen Einheitsvektor $\vec{v}$ mit Drehwinkel φ:

$$R_{ij} \;=\; \cos\varphi\;\delta_{ij} \;+\; \sin\varphi\;\epsilon_{ikj}v_k \;+\; (1-\cos\varphi)\;v_iv_j \;.$$

Die Matrix

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}R(\varphi)\Big|_{\varphi=0} \;=\; I_{\vec{v}}$$

bezeichnet man als *Generator* der Drehung um die $\vec{v}$-Achse.
(Anmerkung: Der Generator ist in diesem Fall eine antisymmetrische Matrix. Da es für physikalische Anwendungen oft sinnvoll ist, die Generatoren als sogenannte hermitesche Matrizen – $A_{ij} = A^*_{ji}$ – zu definieren, schreibt man oft $L_{\vec{v}} = -\mathrm{i}I_{\vec{v}}$. In der mathematischen Literatur ist aber obige Definition verbreiteter.)

Sei I_i der Generator für eine Drehung um die i-Achse. Zeigen Sie:

$$(I_i)_{kl} \;=\; \epsilon_{kil} \;.$$

Beweisen Sie damit die sogenannten Kommutatorrelationen für die Generatoren der Drehgruppe:

$$[I_i, I_j] \;:=\; I_iI_j - I_jI_i \;=\; \epsilon_{ijk}I_k \;.$$

Nutzen Sie dazu die Relation für das ϵ-Symbol:

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{imn} \;=\; \delta_{km}\delta_{ln} \;-\; \delta_{kn}\delta_{lm} \;.$$

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 9

29. 6. 1996

12. Das Foucaultsche Pendel

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für einen harmonischen Oszillator in einem erdfesten, rotierenden Nicht-Intertialsystem auf. Dieses erdfeste System habe seinen Ursprung an einem Punkt der Erdoberfläche mit der geographischen Breite φ. Die 3-Achse stehe senkrecht auf der Erdoberfläche, die 1-Achse zeige in Richtung Osten, die 2-Achse in Richtung Norden. Der Oszillator habe eine Eigenfrequenz ω, seine Bewegung erfolge in der Horizontalebene – d.h. der 1-2-Ebene des erdfesten Systems – und die rücktreibende Kraft des Oszillators beziehe sich auf den Bezugspunkt (den Ursprung) des erdfesten Systems. Vernachlässigen Sie alle Beiträge, die von der Bewegung des Nicht-Inertialsystems herrühren, mit Ausnahme der Coriolis-Kraft.

   Lösung:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) &= -\omega^2 x_1(t) - 2\Omega \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) &= -\omega^2 x_2(t) + 2\Omega \dot{x}_1(t) \end{aligned}$$

   mit

$$\Omega = \sin\varphi \, \frac{2\pi}{\text{Tag}} \, .$$

2. Zeigen Sie, daß sich dieses System gekoppelter Differentialgleichungen durch die Einführung der komplexen Variablen $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ in die Form

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) + 2\mathrm{i}\Omega \dot{z}(t)$$

   bringen läßt.

3. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe eines Exponentialansatzes mit den Anfangsbedingungen $z(0) = x_0$ und $\dot{z}(0) = 0$. Zeigen Sie, daß sich unter der Annahme $\omega \gg \Omega$ – d.h. unter Vernachlässigung von Termen der Art Ω/ω – die Lösung in der Form

$$z(t) = x_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} \cos\omega t$$

   schreiben läßt. Interpretieren Sie diese Lösung. Was bedeutet die Bedingung $\Omega/\omega \ll 1$? Worin unterscheidet sich qualitativ eine Lösung, bei der der Oszillator zum Zeitpunkt $t = 0$ maximale Auslenkung und Geschwindigkeit 0 hat, von einer Lösung, bei der der Oszillator zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhelage herausgestoßen wird?

Übungen zur Einführung in die theoretische Physik

Nr. 10
6. 7. 1996

13. Linienintegrale

1. Berechnen Sie die Länge eines Halbkreisbogens vom Radius R. Parametrisieren Sie den Halbkreis in der Ebene einmal durch einen Winkel

$$\varphi \longrightarrow \vec{x}(\varphi) = R(\cos\varphi, \sin\varphi) ,$$

und einmal durch die x-Achse, indem Sie den Halbkreis als Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ auffassen:

$$x \longrightarrow \vec{x}(x) = (x, f(x)) .$$

Es tritt folgendes Integral auf: $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R} = \pi .$

2. Sei allgemein eine Funktion $f(x)$ gegeben. Was ist die Länge Länge des Graphen von $f(x)$ zwischen den beiden Punkten zu x_0 und x_1, ausgedrückt als Integral über x als Parameter?

3. Unter der *Bogenlängenparametrisierung* eines Weges in der Ebene $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ mit $s \to (x_1(s), x_2(s))$ versteht man die spezielle Parametrisierung, für die gilt:

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s}\right| = 1 .$$

Der Weg wird also mit „konstanter Geschwindigkeit“ durchlaufen.

Leiten Sie für den Graphen einer Funktion $f(x)$ eine Beziehung zwischen der Bogenlängenparametrisierung und der Parametrisierung durch die x-Achse her.

14. Flächen- und Volumenelemente

1. Betrachten Sie die Oberfläche eines Zylinders vom Radius R und der Höhe H in Zylinderkoordinaten (r, φ, z). Berechnen Sie das Flächenelement auf der Mantelfläche und an den Grundflächen.

2. Bestimmen Sie den Fluß der beiden Felder

$$\vec{F}_1(\vec{x}) \;=\; A\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y,-x,0) \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_2(\vec{x}) \;=\; B\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

durch die Oberfläche des Zylinders, wobei der Schwerpunkt des Zylinders der Koordinatenursprung sei.

Es treten die beiden folgenden Integrale auf:

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \qquad\qquad \int \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\;.$$

3. Berechnen Sie das Volumenelement für den Wechsel von kartesischen Koordianten $\{x_i\}$ zu Zylinderkoordinaten (r,φ,z).