Superposition

Kurztext im Rahmen von „Quanten auf Reisen“

Physikdidaktik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Weitere Kurztexte hier: https://physikdidaktik.uni-freiburg.de/kurztexte/

Gefördert durch:

Bundesministerium für Forschung, Technologie und Raumfahrt

universität freiburg

Inhaltsverzeichnis

1 Superposition **3**

1.1 Zustände werden durch Strahlen repräsentiert . . . 3

1.2 Superposition von Strahlen . . . 5

1.3 Die Polarisation von Photonen als Beispiel . . . 6

1.4 Superposition und Gemisch . . . 7

1.5 Vergleich: Superposition und Vektoraddition . . . 9

1.6 Häufige Fehlvorstellungen zur Superposition . . . 10

Kapitel 1

Superposition

Autor: Thomas Filk, Version vom: 16.07.2025

Die Superposition ist ein zentraler Begriff der Quantentheorie. Er bezeichnet die Eigenschaft, dass zu je zwei realisierbaren Zuständen in der Quantentheorie auch Linearkombinationen dieser beiden Zustände wiederum realisierbaren Zuständen entsprechen. Da Zustände in der Quantentheorie oft durch einen normierten Vektor dargestellt werden – wobei auch eine (quadrat-)normierte Wellenfunktion als Vektor (in einem Vektorraum von Funktionen) interpretiert werden kann – vergleicht man die Superposition von Zuständen insbesondere in der Schule gerne mit der vektoriellen Summe von Vektoren, wie sie beispielsweise aus der klassischen Mechanik für Geschwindigkeiten oder Kräfte bekannt ist. Dies ist nicht immer unproblematisch, da es sich streng genommen bei der mathematischen Darstellung quantenmechanischer Zustände nicht um Vektoren sondern Strahlen bzw. 1-dimensionale Unterräume eines Vektorraums handelt. Für diese hat die Superposition eine etwas andere Bedeutung als für Vektoren.

1.1 Zustände werden durch Strahlen repräsentiert

Die Schrödinger-Gleichung ist eine lineare Differenzialgleichung für Wellenfunktionen:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\psi(x,t)\,. \tag{1.1}$$

In etwas abstrakterer Notation handelt es sich um eine Differentialgleichung für Vektoren in einem Hilbert-Raum (also – etwas vereinfacht – einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt),

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle\,. \tag{1.2}$$

$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$ ist die Wellenfunktion im Ortsraum zu einem zeitabhängigen Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ und H ist der Hamilton-Operator $H = P^2/2m + V(Q)$, wobei in der Ortsraumdarstellung der Operator Q einfach der Multiplikation mit x und der Operator P dem Operator $-\mathrm{i}\hbar\nabla$ entspricht.

Die Linearität der Schrödinger-Gleichung bedeutet, dass für zwei Lösungen $\psi_1(x,t)$ und $\psi_2(x,t)$ der Gleichung auch eine beliebige Linearkombination $\psi(x,t) = \alpha\psi_1(x,t) + \beta\psi_2(x,t)$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{C})$ eine Lösung der Gleichung ist. Zusätzlich zu der Eigenschaft, eine Lösung der Schrödinger-Gleichung zu sein, fordern wir in der Physik noch eine Normierungsbedingung, meist in der Form

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x,t)|^2 \mathrm{d}^n x = 1\,. \tag{1.3}$$

Der Grund, dass überhaupt eine solche Normierungsbedingung zusätzlich gefordert werden kann, liegt darin, dass zwei Wellenfunktionen $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$, die sich nur multiplikativ um eine komplexe Zahl unterscheiden – für die also $\psi_2(x) = \alpha\psi_1(x)$ $(\alpha \in \mathbb{C}/\{0\})$ gilt –, denselben physikalischen Zustand definieren. Die mathematische Repräsentation eines physikalischen Zustands entsprich also dem Strahl (bzw. 1-dimensionalen Vektorraum) der durch einen Vektor $|\psi\rangle$ bzw. eine Wellenfunktion $\psi(x)$ gegeben ist und aus allen Vielfachen $\alpha|\psi\rangle$ bzw. $\alpha\psi(x)$ besteht. (Die Zeitabhängigkeit spielt für das Folgende keine Rolle, daher berücksichtigen wir sie nicht weiter.)

Ein Quantenzustand lässt sich mathematisch auch als Projektionsoperator auf einen 1-dimensionalen Vektorraum (d.h. die Spur des Projektionsoperators ist 1) darstellen. Dabei handelt es sich um den Vektorraum, der durch den Vektor $|\psi\rangle$ bzw. die Wellenfunktion $\psi(x)$ aufgespannt wird. Wurde $|\psi\rangle$ normiert – gilt also $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ –, ist der Projektionsoperator auf diesen Strahl

$$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|\,. \tag{1.4}$$

(Wird der Zustand durch eine normierte Wellenfunktion $\psi(x)$ dargestellt, ist der Projektionsoperator der Integrationskern $P(x,y) = \psi(x)\psi(y)^*$, und seine Anwendung auf eine beliebige andere Wellenfunktion $\phi(x)$ ist durch $\int P(x,y)\phi(y)\,\mathrm{d}^n y$ gegeben.)

Der Projektionsoperator repräsentiert direkt den Zustand, d.h., eine freie Phase im Zustandsvektor bzw. der Wellenfunktion fällt heraus. Es besteht also eine „1 zu 1“-Beziehung zwischen der Menge aller Quantenzustände, die in einem Hilbert-Raum dargestellt werden können, und der Menge der Projektionsoperatoren mit der Spur 1. Definiert ist ein solcher Projektionsoperator durch folgende Bedingungen:

$$P^\dagger = P \qquad P^2 = P \qquad \mathrm{Spur}\, P = 1\,. \tag{1.5}$$

$P^\dagger = P$ bedeutet, dass P selbstadjungiert ist und somit reelle Eigenwerte und (zu verschiedenen Eigenwerten) orthogonale Eigenräume besitzt. Geometrisch bedeutet diese Bedingung, dass die Projektion eines Vektors auf den durch P beschriebenen Strahl orthogonal zu diesem Strahl erfolgt, daher spricht man auch schon mal von einem orthogonalen Projektionsoperator. $P^2 = P$ ist die definierende Eigenschaft eines Projektionsoperators: Wurde eine Projektion durchgeführt, hat eine weitere Projektion keine Wirkung; der projizierte Vektor befindet sich schon in dem Strahl. $\mathrm{Spur}\, P = 1$ bedeutet, dass es sich um einen Projektionsoperator auf einen 1-dimensionalen Vektorraum handelt. Im Allgemeinen gibt die Spur die Dimension des Unterraums an, auf den P projiziert.

1.2 Superposition von Strahlen

Projektionsoperatoren bzw. die 1-dimensionalen Unterräume eines Hilbert-Raums bilden selbst keinen Vektorraum. Und da quantenmechanische Zustände durch die 1-dimensionalen Unterräume eines Hilbert-Raums dargestellt werden, gilt für sie ebenfalls, dass sie keinen Vektorraum bilden und dass man sie im Allgemeinen nicht addieren kann. Die Summe von zwei Projektionsoperatoren ist zwar wieder ein linearer Operator, aber im Allgemeinen kein Projektionsoperator. Spurerhaltende positive Linearkombinationen von zwei Projektionsoperatoren, d.h. $\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$ für $0 < \alpha < 1$, sind Dichtematrizen, die zwar auch physikalische Zustände beschreiben, allerdings keine reinen Zustände sondern sogenannte gemischte Zustände. Diese gemischten Zuständen sollte man auf keinen Fall mit den reinen Zuständen verwechseln, die man aus der Superposition von zwei Zustandsvektoren erhält (siehe auch Abschnitt 1.4).

Das Superpositionsprinzip hat für quantenmechanische Zustände eine etwas andere Bedeutung als für Vektoren: Zwei linear unabhängige 1-dimensionale Vektorräume definieren eine sogenannte lineare Hülle dieser beiden Vektorräume. Allgemein besteht die lineare Hülle zu einer Menge von Vektoren aus allen Vektoren, die sich als Linearkombination dieser Vektoren schreiben lassen. Sind nun zwei (linear unabhängige) 1-dimensionale Vektorräume gegeben, kann man sämtliche Linearkombinationen aus den Vektoren dieser beiden Vektorräume betrachten und diese bilden offensichtlich einen 2-dimensionalen Vektorraum. Jeder 1-dimensionale Unterraum dieser 2-dimensionalen Hülle von zwei Quantenzuständen lässt sich als Superposition der beiden Quantenzustände interpretieren.

Im Folgenden seien die beiden Vektorräume, die Quantenzustände darstellen sollen und von denen wir Linearkombinationen betrachten wollen, orthogonal. Das bedeutet, jeder Vektor aus dem einen Vektorraum ist orthogonal zu jedem Vektor aus dem anderen Vektorraum. Das ist zwar nicht notwendig und viele der folgenden Überlegungen lassen sich auch auf nicht-orthogonale Vektorräume verallgemeinern, doch in nahezu allen Fällen, die eine Schulrelevanz haben, ist diese Situation gegeben. Der Grund ist, dass zwei Eigenzustände zu einer quantenmechanischen Observablen (repräsentiert durch einen selbstadjungierten Operator) immer orthogonal sind, sofern die zugehörigen Eigenwerte, also die Messwerte der Observablen zu diesen Zuständen, verschieden sind. Wenn also Superpositionen von „echten Alternativen“ betrachtet werden, werden diese Alternativen immer durch orthogonale Zustandsvektoren dargestellt.

Wenn zwei orthogonale, normierte Vektoren (als Repräsentanten eines Quantenzustands) $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ gegeben sind und wir eine normierte Linearkombination dieser beiden Vektoren betrachten,

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\,, \tag{1.6}$$

dann sind die Wahrscheinlichkeiten, bei einem System, das im Zustand $|\psi\rangle$ präpariert wurde, bei einer Messung den Zustand $|\psi_1\rangle$ bzw. den Zustand $|\psi_2\rangle$ zu finden, durch $|\alpha|^2 = |\langle\psi_1|\psi\rangle|^2$ bzw. $|\beta|^2 = |\langle\psi_2|\psi\rangle|^2$ gegeben. Dies ist die Born'sche Regel. Diese Wahrscheinlichkeiten entsprechen dem Kosinusquadrat des Winkels zwischen den beiden Vektoren und damit dem

Kosinusquadrat des Winkels zwischen den zugehörigen Strahlen. Das bedeutet, sie hängen nicht von einem Repräsentanten (einem Vektor) auf diesen Strahlen ab. Somit sind diese Wahrscheinlichkeiten für die Strahlen wohl definiert. Insbesondere hängen diese Wahrscheinlichkeiten nicht von der relativen Phase zwischen der Linearkombination von zwei Vektoren ab, d.h., die Wahrscheinlichkeiten sind für die Linearkombination

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}|\psi_2\rangle \tag{1.7}$$

unabhängig von dem Winkel δ, obwohl es sich für verschiedene Werte von δ nicht nur um verschiedene Vektoren $|\psi\rangle$ handelt sondern auch um verschiedene Strahlen und damit verschiedene Zustände.

1.3 Die Polarisation von Photonen als Beispiel

Die Polarisation von Licht bzw. von einzelnen Photonen ist ein schönes Beispiel für einen Zustandsraum, der den Strahlen in einem Vektorraum entspricht. Insbesondere die linearen Polarisationen, bei denen es keine Phasenverschiebung zwischen den beiden Komponenten des elektrischen Feldstärkevektors gibt, lassen sich als Strahlen in einem 2-dimensionalen reellen Vektorraum darstellen. Wenn wir einen normierten Vektor $\vec{A}$ entlang einer Polarisationsrichtung als Repräsentanten der Polarisation wählen, entsprechen $\vec{A}$ und $-\vec{A}$ derselben Polarisation.

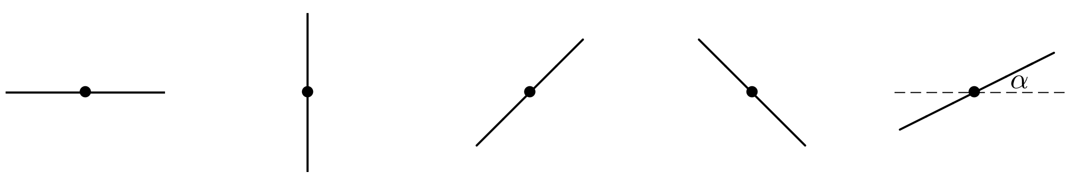

Abbildung 1.1: Die vier linearen Polarisationen h (horizontal), v (vertikal), + (positiv diagonal) und − (negativ diagonal). Außerdem ist eine allgemeine Polarisationsrichtung, gekennzeichnet durch ihren Winkel α zwischen der Polarisationsrichtung und der Horizontalen, wiedergegeben.

Abbildung 1.1 zeigt fünf lineare Polarisationen: h steht für horizontale Polarisation, v für vertikale Polarisation, + für positiv diagonale Polarisation (d.h., die Polarisationsrichtung verläuft unter einem Winkel von $+45°$ relativ zur horizontalen Achse entlang einer Diagonalen mit positiver Steigung) und − für eine negativ diagonale Polarisation (die Polarisationsrichtung verläuft unter einem Winkel von $-45°$ entlang einer Diagonalen mit negativer Steigung). Eine allgemeine Polarisationsrichtung können wir durch ihren Winkel α relativ zur horizontalen Richtung kennzeichnen. In der Bra-Ket-Schreibweise drücken wir formal diese Polarisationen durch normierte Vektoren aus:

$$|h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Diese Vektoren sind jedoch nur Repräsentanten der Strahlen. Außerdem wurden in diesem Fall die Polarisationen h und v ausgezeichnet, indem $|h\rangle$ und $|v\rangle$ als die Basisvektoren gewählt wurden.[1]

Für diese Vektoren gilt:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|h\rangle + |v\rangle\big) \qquad \text{und} \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|h\rangle - |v\rangle\big) \tag{1.9}$$

Umgekehrt gilt aber auch:

$$|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle + |-\rangle\big) \qquad \text{und} \qquad |v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle - |-\rangle\big) \tag{1.10}$$

Für eine allgemeine Polarisation erhalten wir:

$$|\alpha\rangle = \big(\cos\alpha|h\rangle + \sin\alpha|v\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(\cos\alpha + \sin\alpha\big)|+\rangle + \big(\cos\alpha - \sin\alpha\big)|-\rangle\Big)\,. \tag{1.11}$$

Ein Vorteil der Bra-Ket-Schreibweise ist, dass sie unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems ist. Die obigen Beziehungen zwischen verschiedenen Polarisationsrichtungen gelten in allen Koordinatensystemen, wohingegen die Darstellung durch Spaltenvektoren die Wahl einer Basis voraussetzt.

Die Born'sche Regel wird bei Polarisationszuständen zu dem Gesetz von Malus:

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \cos^2(\beta - \alpha)\,. \tag{1.12}$$

1.4 Superposition und Gemisch

Zwei wichtige Konzepte, die leider oft verwechselt werden, beziehen sich auf den Unterschied zwischen Superposition und Gemisch. Sind zwei reine Zustände gegeben, so ist eine Superposition wieder ein reiner Zustand. Wenn die reinen (orthogonalen) Zustände ψ_1 und ψ_2 durch die normierten Vektoren $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ repräsentiert werden, dann repräsentiert auch der Vektor

$$|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle \qquad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{1.13}$$

wieder einen reinen Zustand. Die Koeffizienten a und b können dabei bis auf ihre Normierung beliebig sein und kennzeichnen verschiedene Superpositionen von $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$. Messungen, die zwischen ψ_1 und ψ_2 unterscheiden, liefern mit einer Wahrscheinlichkeit (oder relativen Häufigkeit) $|a|^2$ den Zustand ψ_1 und mit der Wahrscheinlichkeit (bzw. relativen Häufigkeit) $|b|^2$ den Zustand ψ_2. Findet man jedoch eine Messvorschrift, sodass die Superposition $|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$ ein Eigenzustand des zugehörigen selbstadjungierten Operators ist, dann findet man dieses Ergebnis auch bei jeder einzelnen Messung.

Man kann die Zustände ψ_1 und ψ_2 auch durch ihre Projektionsoperatoren darstellen: $P_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ und $P_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$. Bildet man nun eine Linearkombination der Form

$$\rho = p_1 P_1 + p_2 P_2 \qquad \text{mit} \quad p_1 + p_2 = 1 \quad (p_i > 0)\,, \tag{1.14}$$

[1] Einfache Buchstaben oder Symbole wie h, v oder ψ beschreiben allgemeinen einen quantenmechanischen Zustand; ein Ket-Vektor $|h\rangle$,$|v\rangle$,$|\psi\rangle$ bezeichnet einen normierten Vektor, der den Zustand im Hilbert-Raum repräsentiert.

so beschreibt ρ ein Gemisch aus den beiden Zuständen ψ_1 und ψ_2. In einem Ensemble von physikalischen Systemen, das dieses Gemisch repräsentiert, sind Systeme im Zustand ψ_1 mit einer relativen Häufigkeit p_1 und Systeme im Zustand ψ_2 mit der relativen Häufigkeit p_2 vertreten. Messungen, die zwischen ψ_1 und ψ_2 unterscheiden, liefern mit einer Wahrscheinlichkeit (oder relativen Häufigkeit) p_1 den Zustand ψ_1 und mit der Wahrscheinlichkeit (bzw. relativen Häufigkeit) p_2 den Zustand ψ_2. Solche Messungen, können also nicht zwischen einem Gemisch und einer Superposition unterscheiden. In diesem Fall gibt es jedoch keine Messung, bei der immer dasselbe Ergebnis herauskommt. ρ ist kein Objekt, das man als Eigenzustand zu einem selbstadjungierten Operator interpretieren kann. Das Fehlen eines solchen Operators bzw. das Fehlen einer entsprechenden Messvorschrift ist das charakteristische Zeichen für ein Gemisch.

Betrachten wir hierzu nochmals das Beispiel der Polarisation von Photonen. Eine Superposition eines Zustands, der ein Photon mit der Polarisation $|h\rangle$ beschreibt, mit einem Zustand, der ein Photon mit der Polarisation $|v\rangle$ beschreibt, ergibt

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|h\rangle + |v\rangle\big) \tag{1.15}$$

(hier wurde die spezielle Superposition zu $a = b = 1/\sqrt{2}$ gewählt). Dieser Vektor beschreibt den Zustand eines Photons mit der Polarisation +, also eine unter +45° geneigte Polarisation. In einem Mach-Zehnder-Interferometer mit polarisierenden Strahlteilern kann man diese Gleichung experimentell realisieren: Ein Photon im Zustand $|+\rangle$ wir am ersten Strahlteiler, der die Achsen $|h\rangle$ und $|v\rangle$ haben soll, in die beiden Bestandteile $|h\rangle$ und $|v\rangle$ entsprechend der obigen Formel aufgespalten. Am zweiten Strahlteiler können diese beiden Anteile bei exakt gleicher optischer Wellenlänge der beiden Wege innerhalb des Mach-Zehnder-Interferometers wieder in Superposition gebracht werden und man erhält hinter dem zweiten Strahlteiler wieder ein diagonal polarisiertes Photon.

Man kann zur Demonstration auch die kohärente Überlagerung von zwei Laserstrahlen verwenden. Wenn die Phasen der beiden Laser richtig abgestimmt sind, kann man die Strahlen mit einem geeigneten polarisationsabhängigen Strahlteiler so überlagern, dass man einen diagonal polarisierten Strahl (der doppelten Intensität) erhält.

Misst man die Photonen (oder den Laserstrahl) mit einem Polarisationsstrahlteiler zu den Achsen h und v, erhält man bei den Photonen in der Hälfte der Fälle h und in der Hälfte der Fälle v, beim Laserstrahl erhält man in beide Richtungen jeweils die halbe Intensität. Stellt man jedoch den Polarisationsstrahlteiler auf +- bzw. −-diagonal, findet man alle Photonen (bzw. die gesamte Laserintensität) in der +-Richtung. Dies ist das Zeichen, dass eine reine Polarisation + vorliegt.

Ein gemischter Zustand von Photonen, die zur Hälfte die Polarisation h und zur Hälfte die Polarisation v haben, wird bei einem h/v-orientierten Strahlteiler ebenfalls zur Hälfte das Ergebnis h und zur Hälfte das Ergebnis v liefern. Dasselbe gilt aber auch, wenn man den Strahlteiler in eine beliebige andere Richtung orientiert. Es gibt keine Position, bei der alle Photonen in dieselbe Richtung abgelenkt werden. Dies ist wieder das Signal für einen gemischten Zustand. (Streng genommen müsste man bei diesem Test auch auf zirkulare

Polarisation testen, die bei linearen Polarisationsstrahlteilern ebenfalls für alle Richtungen ein 50% -50%–Ergebnis liefern würde.)

1.5 Vergleich: Superposition und Vektoraddition

Offenbar haben Superposition und Vektoraddition vieles gemein. Insbesondere lässt sich die Superposition als „Vektoraddition von Repräsentanten" darstellen. Für einen besseren Vergleich betrachten wir daher nochmals das Paradebeispiel aus der Physik, bei dem die Vektoraddition Anwendung findet: das Kräfteparallelogramm.

Zu zwei Kräften $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die am selben Punkt eines Körpers angreifen, können wir eine resultierende Kraft $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ definieren, die sich als die vektorielle Summe der beiden Kräfte darstellen lässt (in der Schule spricht man häufig vom „Parallelogrammgesetz"). Die physikalische Wirkung, die diese Kraft $\vec{F}$ auf den Körper ausübt, ist dieselbe, wie die physikalische Wirkung der beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$. Aus der Beobachtung der Bewegung des Körpers alleine lassen sich die beiden Fälle nicht unterscheiden.

Umgekehrt können wir eine gegebene Kraft $\vec{F}$ immer nach zwei vorgegebenen (linear unabhängigen) Richtungen zerlegen und erhalten auf diese Weise zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die entlang der vorgegebenen Richtungen zeigen und deren vektorielle Summe gleich der Kraft $\vec{F}$ ist.[2] Da diese beiden Richtungen (bis auf die lineare Unabhängigkeit) beliebig gewählt werden können, lässt sich jede beliebige Kraft auf unendlich viele verschiedenen Weisen als Summe von zwei anderen Kräften schreiben.

Vieles davon lässt sich auf die Superposition von Zuständen übertragen: Jeder beliebige Zustand lässt sich auf unendlich viele verschiedene Weisen als Superposition von anderen Zuständen schreiben. Allerdings lassen sich zu je zwei Zuständen auch unendlich viele Zustände als Superposition dieser beiden Zustände schreiben. Eindeutig wird die Superposition erst, wenn wir zu den beiden Zuständen Einheitsvektoren als Repräsentanten wählen und die Koeffizienten der Linearkombination festlegen.

Andererseits gibt es aber auch wichtige Unterschiede, die gerade bei Schülerinnen und Schülern leicht zu Fehlvorstellungen führen können. So gibt es beispielsweise zu jedem Vektor den entsprechenden negativen Vektor, und die vektorielle Summe dieser beiden Vektoren ergibt den Nullvektor. Dies spielt eine wichtige Rollen, wenn wir Systeme im Kräftegleichgewicht betrachten. Wählen wir jedoch einen Vektor als Repräsentanten eines Zustands, dann ist der dazu negative Vektor ebenfalls ein Repräsentant desselben Zustands. In diesem Fall ist es sinnlos, eine Superposition dieser beiden Vektoren zu betrachten.

Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen Superposition und vektorieller Summe besteht in der Normierung. Wenn wir zwei Vektoren, beispielsweise Kräfte, addieren, beschreibt die Summe einen Vektor, dessen Länge sich nach dem Parallelogrammgesetz bestimmt. Diese Länge ist wesentlich, ansonsten beschreibt die vektorielle Summe keine Kraft, welche die ursprünglichen beiden Kräfte ersetzen kann. Bei der Repräsentation der Superposition von Zuständen als vektorielle Summe muss jedoch der resultierende Vektor wieder auf

[2] Der Einfachheit halber betrachten wir hier Kräfte in einer Ebene. Ansonsten müssen die beiden Richtungen so gewählt werden, dass die Kraft $\vec{F}$ in der von ihnen aufgespannten Ebene liegen.

die Länge 1 normiert werden. Ansonsten beschreibt er (im üblichen Sinne) keinen Zustand. Etwas anders ausgedrückt: Während bei Vektoren, z.B. bei Kräften, die Länge der Vektoren wesentlich ist, ist beim Zustand (und der Superposition von Zuständen) eigentlich nur der Winkel zwischen den Vektoren relevant. Vektoren, die sich in ihrer Länge unterscheiden, beschreiben denselben Zustand.

1.6 Häufige Fehlvorstellungen zur Superposition

Man hört sehr oft, dass ein bestimmter Zustand ein „Superpositionszustand" sei. Das klingt so, als ob es auch Zustände gäbe, die keine Superpositionszustände sind. Hinter dieser Sprechweise steckt meist die implizite Annahme, dass gewisse Zustände ausgezeichnet sind. Diese Sprechweise wird beispielsweise oft verwendet, wenn man über die Superposition von Zuständen mit klassischen Eigenschaften spricht. Beispielsweise im Zusammenhang mit Schrödingers Katze bezeichnet man die Zustände $|\mathrm{tot}\rangle$ und $|\mathrm{lebendig}\rangle$ als klassisch realisierbare Zustände, wohingegen eine Superposition von $|\mathrm{tot}\rangle$ und $|\mathrm{lebendig}\rangle$ als Superpositionszustand bezeichnet wird. Ebenso spricht man im Zusammenhang mit dem Messproblem gerne von einem Superpositionszustand, wenn man die Superposition von zwei Zeigerstellungen des Messinstruments betrachtet (die typischerweise nie beobachtet wird).

Ein anderes Beispiel, bei dem gerne von Superpositionszuständen gesprochen wird, ist die Quanteninformation. Die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ sind ausgezeichnet, weil sie in der Quanteninformation die typischen Basiszustände sind und weil abschließende Messungen an einem Quantenzustand sich auf diese Basis beziehen. Superpositionszustände sind dann Zustände, die nicht diesen beiden ausgezeichneten Basiszuständen entsprechen.

Ohne die Angabe einer ausgezeichneten Basis (oder einer ausgezeichneten Observablen, die eine solche Basis definiert) ist es sinnlos, von einem Superpositionszustand zu sprechen oder gar einen Zustand als „keine Superposition" zu bezeichnen. In diesem Zusammenhang ist es sogar ein Fehler, von reinen und gemischten Zuständen zu sprechen: Auch die Superpositionszustände zu einer ausgezeichneten Basis sind reine Zustände.

Eine weitere verbreitete Fehlvorstellung liegt in der Verwechslung von Superposition und Gemisch. Hierbei handelt es sich um zwei vollkommen verschiedene Konzepte: Eine Superposition von zwei reinen Zuständen ist wieder ein reiner Zustand und entspricht einem Strahl in einem Hilbert-Raum. Ein Gemisch von zwei Zuständen ist kein reiner Zustand und lässt sich nicht als Strahl in einem Hilbert-Raum darstellen, sondern wird meist durch eine Dichtematix dargestellt. In diesem Fall liegen physikalisch (mindestens) zwei verschiedene Zustände vor und die Eigenwerte der Dichtematrix geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Zustände bei einer willkürlichen Wahl aus einem Ensemble physikalischer Systeme, das diesem Gemisch entspricht, gezogen werden.