STIFTERVERBAND

Thomas Filk · Andreas Fuchs

GLOSSAR ZUR QUANTENTHEORIE

Kurze Erläuterung kritischer Begriffe der Quantentheorie für Lehrkräfte

Glossar zu Grundbegriffen der Quantenphysik

Version vom 30. Dezember 2025

Der folgende Text definiert und beschreibt einige wichtige Grundbegriffe und Konzepte der Quantentheorie, für die eine Erklärung oft schwierig zu finden ist. Es handelt sich nicht um ein Lexikon der Quantentheorie. Die Auswahl der Begriffe ist weder vollständig noch umfassend; sie orientiert sich teilweise an den Bildungsplänen bzw. den KMK-Vorgaben.

Der Text wird fortlaufend vervollständigt, erweitert und verbessert. Konstruktive Vorschläge und Kommentare, sowohl bezüglich des vorhandenen Texts als auch bezüglich neuer Begriffe, sind willkommen.

Die folgenden beiden Diagramme sind Ausschnitte aus den KMK-Bildungsstandards [7].

Abbildung 1: Die KMK-Vorgaben zur Quantentheorie in der Schule von 2020 [7], Abschnittt 2.6.3 „Inhaltsbereich: Quantenphysik und Materie".

Quantenobjekte

Inhalte für das grundlegende und das erhöhte Anforderungsniveau	Zusätzliche Inhalte für das erhöhte Anforderungsniveau
■ Grundlegende Aspekte der Quantentheorie: Stochastische Vorhersagbarkeit, Interferenz und Superposition, Determiniertheit der Zufallsverteilung, Komplementarität	■ stochastische Deutung mittels des Quadrats der quantenmechanischen Wellenfunktion (qualitativ)
■ Zusammenhänge der Größen Energie, Impuls, Frequenz und Wellenlänge zur Beschreibung von Quantenobjekten	■ Ort-Impuls-Unbestimmtheit
■ quantenphysikalisches Weltbild hinsichtlich der Begriffe Realität, Lokalität, Kausalität, Determinismus	■ Koinzidenzmethode zum Nachweis einzelner Photonen

Atomvorstellungen

Inhalte für das grundlegende und das erhöhte Anforderungsniveau	Zusätzliche Inhalte für das erhöhte Anforderungsniveau
■ qualitative Betrachtung eines quantenmechanischen Atommodells ■ Emission und Absorption, Zusammenhang zwischen diskretem Spektrum und Energieniveauschema	■ Modell des eindimensionalen Potenzialtopfs und seine Grenzen

Begriffsliste

1. Bell'sche Ungleichungen
2. Born'sche Regel
3. Determinismus
4. Ensembleinterpretationen der Quantentheorie
5. EPR & EPR-Zustand
6. Interferenzmuster, siehe Kohärenz und Superposition
7. Kausalität
8. Kohärenz und Dekohärenz
9. Komplementarität, Welle-Teilchen-Dualität
10. Lokalität
11. Messung und Präparation
12. Penny-Flip-Spiel
13. Observable
14. Quantenalgorithmus
15. Quantengatter
16. QuBit
17. Realität
18. Reduktionspostulat (Kollapspostulat)
19. Superposition, Interferenz
20. Unbestimmtheitsrelationen bzw. Unschärferelationen
21. Verschränkung
22. Zustand, reine und gemischte Zustände

1 BELL'SCHE UNGLEICHUNGEN

Kurzbeschreibung

Bell'sche Ungleichungen sind Ungleichungen für die Erwartungswerte von Korrelationen zwischen den Messergebnissen verschiedener beobachtbarer Größen, die immer erfüllt sein müssen, sofern die Annahme der Realität („für jede dieser beobachtbaren Größen liegt schon vor der Messung ein Messwert fest") gilt. Da nicht alle Korrelationen an demselben System bestimmt werden können, handelt es sich um eine Gleichung für Erwartungswerte. Bell'sche Ungleichungen können in der Quantentheorie verletzt sein. Dies gilt allgemein als Beweis, dass die Annahme der Realität in der Quantenmechanik nicht erfüllt ist, sondern Messergebnisse erst im Augenblick der Messung „spontan" entstehen.

Anmerkungen

1. Es gibt zwei Bell'sche Ungleichungen, die im didaktischen Kontext oft verwendet werden. Das ist einmal die Ungleichung von d'Espagnat (s.u.) und einmal die CHSH-Ungleichung (s.u.; benannt nach John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony, und Richard Holt). Diese Ungleichungen beziehen sich auf die Korrelationsfunktionen von beobachtbaren Größen, die bei einer Messung jeweils nur zwei mögliche Ergebnisse liefern können (beispielsweise die Polarisation von Photonen oder der Spin von Elektronen). Die verschiedenen beobachtbaren Größen unterscheiden sich meist nur in der Orientierung, unter der sie gemessen werden (z.B. die Orientierung der Polarisationsachsen oder die Richtung, bezüglich der ein Spin gemessen wird).

   Alain Aspect hat 1982 erstmals in einem Experiment überzeugend nachgewiesen, dass Bell'sche Ungleichungen tatsächlich in der Natur verletzt sein können (in diesem Fall die CHSH-Ungleichung). Dafür erhielt er unter anderem mit John Clauser 2022 den Nobel-Preis.

2. Die Ungleichung von d'Espagnat bezieht sich auf drei Observable A_1, A_2, A_3, die jeweils zwei Messwerte (z.B. $+1$ und -1) annehmen können. In einem Einzelexperiment kann man nur zwei dieser Observablen messen: Die drei Observablen kommutieren nicht, aber an EPR-Zuständen kann man die eine Observable an einem Teilsystem und die andere Observable an dem anderen Teilsystem messen und die totale Antikorrelation ausnutzen um – unter der Realitätsannahme – auf zwei Eigenschaften eines Teilsystems schließen zu können.

   Sei N_{ij} die relative Häufigkeit der Fälle, bei denen das Ergebnis einer Messung von A_i und A_j verschieden ist, dann gilt $N_{13} \leq N_{12} + N_{23}$. Diese Ungleichung ist in jedem möglichen Einzelfall unter der Realitätsannahme erfüllt: Wenn die Ergebnisse von A_1 und A_3 verschieden sind, müssen entweder die Ergebnisse von A_1 und A_2 verschieden sein, oder es müssen die Ergebnisse von A_2 und A_3 verschieden sein.

   Zum Experiment erzeugt man sich sehr viele Systeme im EPR-Zustand. An jedem einzelnen System entscheidet man sich spontan für die Messung von zwei Observablen (eine an dem einen und eine an dem anderen Teilsystem).

3. Die CHSH-Ungleichung ist eine Ungleichung für vier Observable A_1, A_2, B_1 und B_2, wobei an einem EPR-Zustand eine der Observablen A_i an dem einen Teilsystem und eine der Observablen B_i an dem anderen Teilsystem gemessen werden. A_1 und A_2 sowie B_1 und B_2 lassen sich nicht gleichzeitig bestimmen, jedes A_i lässt sich jedoch mit jedem B_j kombinieren. Es sei $\langle A_i B_j \rangle$ der Erwartungswert für das Produkt der Ergebnisse einer Messung von A_i und B_j. Dann gilt die CHSH-Ungleichung:

   $$-2 \leq \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_2 B_2 \rangle \leq +2\,. \tag{1}$$

   Die Messwerte von A_2 und B_2 können (unter der Realitätsannahme) nicht verschieden sein, wenn die anderen Paare (A_1 und B_1, A_1 und B_2 sowie A_2 und B_1) gleiche Messwerte haben ($A_1 = B_1$ und $A_1 = B_2$ impliziert $B_1 = B_2$, außerdem folgt aus $A_2 = B_1$ insgesamt $A_1 = A_2 = B_1 = B_2$, also kann A_2 nicht ungleich B_2 sein).

Wiederum werden sehr viele System im EPR-Zustand präpariert und es wird spontan eine der vier möglichen Paarungen A_iB_j gewählt. Für die Erwartungswerte muss dann obige Ungleichung gelten.

In der Quantentheorie kann diese Ungleichung verletzt sein. Der maximale (theoretische) Wert für die Kombination in der Ungleichung ist $2\sqrt{2}$. Für die lineare Polarisation von Photonen findet man diesen Wert für $A_1 \simeq 0°$, $A_2 \simeq 45°$, $B_1 \simeq 22{,}5°$, $B_2 \simeq 67{,}5°$. Mit etwas Rechenaufwand kann man das quantenmechanische Ergebnis aus dem Gesetz von Malus ableiten.

4. Es gibt neben der Realitätsannahme weitere Bedingungen, die für die Schlussfolgerungen erfüllt sein müssen: Die bekannteste Bedingung ist unter der Bezeichnung „no-conspiracy" (oder auch „no free will" oder auch „Superdeterminismus") bekannt. Diese Annahme besagt, dass es keine Korrelation gibt zwischen der Art, wie die verborgenen Variablen für ein bestimmtes System präpariert wurden, und der Entscheidung, welche zwei Messungen an diesem System durchgeführt werden. Gäbe es eine solche Korrelation („conspiracy"), hätte der Experimentator keine Entscheidungsfreiheit („no free will"), welche Größen in einem konkreten Fall gemessen werden. In diesem Fall läge alles schon von Beginn (des Universums?) an fest („Superdeterminismus").

5. Üblicherweise schließt man aus der Verletzung der Bell'schen Ungleichungen auch auf die Nicht-Lokalität bzw. die Aussage, dass jede Theorie mit verborgenen Variablen, die die Ergebnisse der Quantentheorie reproduziert, nicht-lokal sein muss. Dies folgt erst in einem zweiten Schritt aus der Schlussfolgerung, dass die Messergebnisse spontan entstehen: Wenn sie an beiden Orten der Teilsysteme spontan entstehen, wie können die Messergebnisse bei verschränkten Zuständen (z.B. dem EPR-Zustand) dann korreliert sein? Dies kann nur dann der Fall sein, wenn zwischen den Ereignissen, die zu den Messergebnissen führen, eine Beziehung besteht. In den Experimenten von Aspect wurde darauf geachtet, dass die Messungen an den beiden Teilsystemen außerhalb der jeweiligen kausalen Lichtkegel erfolgten.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Durch die KMK-Standards werden die Begriffe Realität und Lokalität im grundlegenden Anforderungsniveau in allen Bildungsplänen umgesetzt. Die CHSH-Ungleichung ist dabei diejenige Bell'sche Ungleichung, die in den meisten didaktischen Ausarbeitungen der Thematik verwendet wird.

2 BORN'SCHE REGEL

Kurzbeschreibung

Wird ein System vor einer Messung durch den Zustandsvektor $|\psi\rangle$ beschrieben und bewirkt die Messung, dass das System nach der Messung durch den Zustandsvektor $|a\rangle$ beschrieben wird (siehe Reduktionspostulat), so ist die Wahrscheinlichkeit $w(\psi \to a)$ für diesen Übergang durch das Absolutquadrat des Skalarprodukts, $w(\psi \to a) = |\langle a|\psi\rangle|^2$, gegeben.

Anmerkungen

1. In der obigen Formulierung wurde vorausgesetzt, dass die Vektoren $|a\rangle$ und $|\psi\rangle$ normiert sind. Damit ist das Absolutquadrat des Skalarprodukts gleich dem Quadrat des Kosinus des Winkels zwischen den beiden Vektoren. Außerdem ist der Kosinus des Winkels auch für zwei Strahlen,d.h., für die von den Vektoren aufgespannten eindimensionalen Vektorräume, definiert.

2. Die Born'sche Regel impliziert für Einzelsysteme eine Wahrscheinlichkeit für gewisse Ereignisse. In der Kopenhagener Deutung handelt es sich um eine sogenannte ontische – in der Natur liegende – Wahrscheinlichkeit, nicht um eine Unkenntnis irgendwelcher Details. Die daraus resultierende stochastische Vorhersagbarkeit für gewisse Ereignisse ist Teil der Wesenszüge der Quantentheorie.

3. In der Optik kennt man das Gesetz für die Polarisation von Licht als Gesetz von Malus. In diesem Fall handelt es sich um die verminderte Intensität des Lichts nach dem Durchtritt durch Polarisationsfilter: Stehen zwei Polarisationsfilter hintereinander unter einem Winkel α relativ zueinander, dann ist die Intensität hinter dem zweiten Polarisationsfilter um den Faktor $\cos^2 \alpha$ geringer als die Intensität hinter dem ersten Polarisationsfilter. Für einzelne Photonen wird aus der „Intensität" eine relative Häufigkeit und somit für ein einzelnes Photon eine Wahrscheinlichkeit.

4. Speziell für eine Wellenfunktion $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ besagt die Born'sche Regel, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte, bei einer Messung ein Quantenobjekt an der Stelle x zu finden, durch $(\psi \to x) = |\psi(x)|^2 = |\langle x|\psi\rangle|^2$ gegeben ist. Da es sich um eine Dichte handelt, erhält man eine Wahrscheinlichkeit durch die Integration über ein Volumen ΔV: $w(\Delta V) = \int_{\Delta V} |\psi(x)|^2 \,\mathrm{d}^n x$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Quantenobjekt bei einer Ortsmessung im Volumen ΔV zu finden.

5. Aus der Born'schen Regel folgt auch die Aussage, dass der Erwartungswert einer Observablen, die durch den selbst-adjungierten Operator A beschrieben wird, in einem Zustand $|\psi\rangle$ durch $\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle$ gegeben ist. Setzt man für A seine Spektralzerlegung $A = \sum_i a_i|a\rangle\langle a|$ ein, folgt nach der Born'schen Regel:

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \sum_i a_i\langle\psi|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = \sum_i a_i|\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \sum_i a_i w(\psi \to a_i)\,. \tag{2}$$

   Die rechte Seite entspricht aber der Definition für den Erwartungswert einer Messgröße.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Die KMK-Vorgaben zur Quantentheorie umfassen bereits im grundlegenden Anforderungsniveau den Begriff der „Stochastischen Vorhersagbarkeit" als einen Aspekt der Quantentheorie. Die Born'sche Regel ist die quantitative mathematische Beschreibung der Wahrscheinlichkeiten möglicher Messergebnisse. Eine Deutung des Quadrats der quantenmechanischen Wellenfunktion ist laut KMK-Standards lediglich im erhöhten Anforderungsbereich vorgesehen, wobei hier auf eine quantitative Beschreibung verzichtet wird. Auch die Bildungspläne der Länder betonen vor allem den Unterschied zwischen der Bestimmtheit der Messwerte in der klassischen Physik und der Stochastizität allgemeiner Messungen in der Quantenphysik. Unterrichtsgänge, die vornehmlich auf der Polarisation von Photonen aufbauen, können die Born'sche Regel durchaus quantitativ einführen, insbesondere, falls das Gesetz von Malus behandelt wurde. Bei Unterrichtsgängen, die eher mit Phänomenen am Doppelspalt arbeiten, scheint eine lediglich qualitative Betrachtung naheliegender.

3 DETERMINISMUS

(siehe auch „Kausalität“)

Kurzbeschreibung

In der Physik bezeichnet man ein System als deterministisch, wenn der Zustand dieses Systems zum Zeitpunkt t durch seinen Zustand zu einem beliebigen früheren Zeitpunkt $t' < t$ eindeutig bestimmt ist. Allgemeiner kann man auch definieren, dass ein System eine deterministische Zeitentwicklung hat, wenn die vergangenen Zustände des Systems die weiteren Zustände eindeutig festlegen.

Die meisten fundamentalen Bewegungsgleichungen in der Physik (die Newton'schen Gleichungen, die Maxwell-Gleichungen, die Schrödinger-Gleichung) lassen sich als Differentialgleichungen in der Zeit für den Zustand eines Systems formulieren. Unter sehr allgemeinen Stetigkeitsbedingungen an die Abhängigkeiten dieser Differentialgleichung sind die Lösungen eindeutig, sofern sie für einen bestimmten Zeitpunkt t' vorgegeben wurden. Solche Gleichungen beschreiben somit eine deterministische Zeitentwicklung eines Systems.

In der Quantentheorie gibt es jedoch neben der Schrödinger-Gleichung, die nur für abgeschlossene Systeme gilt, noch eine zweite Form der zeitlichen Entwicklung, die durch das sogenannte Reduktionspostulat in Kombination mit der Born'schen Regel beschrieben wird: Wird an einem System, das durch den Zustandsvektor $|\psi\rangle$ beschrieben wird, eine Messung der Observablen $\mathcal{A}$ (mathematisch repräsentiert durch den selbst-adjungierten Operator A) vorgenommen, und hat A einen nicht-entarteten Eigenwert a mit zugehörigem normierten Eigenvektor $|a\rangle$, dann erhält man bei der Messung den Messwert a mit der Wahrscheinlichkeit $w(\psi \to a) = |\langle a|\psi\rangle|^2$ (siehe Born'sche Regel) und nach der Messung ist das System durch den Zustandsvektor $|a\rangle$ zu beschreiben (siehe Reduktionspostulat (Kollapspostulat)).[1]

Durch diese Regel wird eine nicht-deterministische Zeitentwicklung beschrieben: Die Quantentheorie erlaubt nur die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $w(\psi \to a)$, mit der unter den gegebenen Bedingungen der Messwert a erhalten wird und mit der nach der Messung der Zustand $|a\rangle$ vorliegt. In diesem Sinne macht die Quantentheorie zu bestimmten Prozessen, insbesondere zum Messprozess, nur stochastische Aussagen. In einer Ensembleinterpretation der Quantentheorie – ein Zustand wird physikalisch repräsentiert durch ein Ensemble gleichartig präparierter Systeme – wird der Begriff der Wahrscheinlichkeit durch „relative Häufigkeit“ ersetzt und der „Kollaps der Wellenfunktion“ durch das Subensemble, bei dem ein bestimmter Messwert aufgetreten ist.

Anmerkungen

1. Man sollte Determinismus nicht mit Vorhersagbarkeit verwechseln. Vorhersagbarkeit bedeutet, dass wir (eventuell unter Zuhilfenahme eines Computers) in der Lage sind, aus der Kenntnis eines Zustands zum Zeitpunkt t' den Zustand zu einem späteren Zeitpunkt t vorherzusagen. Dies setzt einerseits voraus, dass sich der Zustand zum Zeitpunkt t' mit genügend großer Genauigkeit bestimmen lässt, und andererseits, dass der Zustand zum Zeitpunkt t aus der Kenntnis des Zustands zum Zeitpunkt t' tatsächlich berechnet werden kann. Das ist aber bei bestimmten Gleichungen (z.B. deterministischen Gleichungen, die ein chaotisches Verhalten eines Systems beschreiben) nicht immer der Fall.

2. Besonders im schulischen Kontext verwendet man gelegentlich die Begriffe der „starken“ und „schwachen“ Kausalität. Wenn exakt gleiche Ursachen auch immer die gleichen Wirkungen haben, spricht man von schwacher Kausalität, wenn kleine Abweichungen in den Ursachen (bzw. Anfangsbedingungen) auch kleine Abweichungen in den Wirkungen haben (im Sinne einer Abhängigkeit durch ein Potenzgesetz), spricht man von starker Kausalität. Bei deterministischen Systemen mit chaotischem Verhalten („Schmetterlingseffekt“), d.h., mit einer exponentiellen Zunahme einer anfänglichen Abweichung, liegt nur schwache Kausalität vor.

[1] Eine technische Anmerkung: Falls λ ein entarteter Eigenwert ist, ist $|\lambda\rangle$ durch den Vektor $P_\lambda|\psi\rangle/\|P_\lambda|\psi\rangle\|$ zu ersetzen, wobei P_λ der Projektionsoperator auf den Eigenraum zum Eigenwert λ ist.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Der Begriff „Determinismus“ wird von den KMK-Standards explizit und bereits im grundlegenden Anforderungsniveau geführt. Die stochastische Vorhersagbarkeit von Messungen im Rahmen des Quantenformalismus wird auch in der didaktischen Literatur immer wieder als wesentlich für das Verständnis beschrieben. Weniger oft thematisiert wird in der Literatur sowie im Unterricht, dass die Zeitentwicklung der Zustände nach der Schrödinger-Gleichung deterministischer Natur ist. Hier scheint es uns ratsam, die verschiedenen Formen der Zeitentwicklung gezielt zu thematisieren und möglicherweise auch im Unterricht gegenüberzustellen. Außerdem könnte sich an dieser Stelle eine fachübergreifende Behandlung des Determinismusbegriffs mit dem Fach Ethik anbieten.

4 ENSEMBLEINTERPRETATIONEN DER QUANTENTHEORIE

Kurzbeschreibung

Ensembleinterpretationen wenden den Formalismus der Quantentheorie nur auf ein im Prinzip beliebig großes Ensemble gleichartig präparierter Systeme an. Wahrscheinlichkeitsaussagen der Quantentheorie werden durch Aussagen über relative Häufigkeiten ersetzt.

Anmerkungen

1. Insbesondere die Born'sche Regel wird als Aussage über relative Häufigkeiten interpretiert: Wurde ein Ensemble von Systemen in einem Zustand $|\psi\rangle$ präpariert und wird an diesem Ensemble eine Messung vorgenommen, sodass der Zustand $|\phi\rangle$ ein Eigenzustand des selbst-adjungierten Operators zu dieser Messung ist, dann ist die relative Häufigkeit (innerhalb statistischer Schwankungen) der Systeme, bei denen nach dieser Messung der Zustand $|\phi\rangle$ vorliegt, durch $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ gegeben.

2. Auf Systeme, die sich auch im Prinzip nicht beliebig oft in gleichartiger Form präparieren lassen, ist in diesen Interpretationen die Quantentheorie nicht anwendbar. Das gilt insbesondere für das Universum als Ganzes (Quantenkosmologen sind selten Anhänger einer Ensembleinterpretation) oder auch für größere Systeme (z.B. die Erde als Ganzes oder auch gößere Organismen).

3. Auch wenn John von Neumann in seinem Klassiker „Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik" die physikalische Realisierung eines Zustands durch ein Ensemble gleichartig präparierter Systeme definiert, spricht er von Messungen an Einzelsystemen und den Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ergebnisse [9]. Insbesondere wird die sogenannte Kopenhagener Deutung der Quantentheorie auch auf Einzelsysteme bezogen.

   In einer strengen Ensembleinterpretation der Quantentheorie bezieht sich der Formalismus ausschließlich auf ein im Prinzip unendlich großes Ensemble gleichartiger Systeme und macht keine Aussagen über Einzelsysteme.

4. Anhänger einer Ensembleinterprertation begründen ihre Entscheidung mit der Feststellung, dass sich Wahrscheinlichkeitsaussagen einer Theorie immer nur in Form von relativen Häufigkeiten an einem Ensemble überprüfen lassen. Eine Extrapolation zu Einzelsystemen lehnen sie ab.

5. Ensembleinterpretationen umgehen das sogenannte „Messproblem" im Zusammenhang mit der Reduktion des Quantenzustands. Für ein im Prinzip beliebig großes Ensemble findet keine Reduktion statt: Es liegen nach den Messungen alle Zustände mit der vorhergesagten Häufigkeit vor. Die Reduktion erfolgt durch eine Person, die aus diesem Ensemble das Subensemble mit einem bestimmten Messergebnis für weiterer Experimente auswählt.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Eine Unterscheidung verschiedener Interpretationen des Quantenformalismus spielt weder in den KMK-Bildungsstandards noch in den Bildungsplänen (mit Ausnahme von Rheinland-Pfalz) eine Rolle. Dabei bietet die Quantenmechanik hier eine in der Schule seltene Gelegenheit, die möglichen Vorhersagen eines mathematischen Formalismus von der Interpretation desgleichen abzugrenzen. In leistungsstarken Kursen ist eine Behandlung durchaus möglich.

5 EPR UND EPR-ZUSTAND

Kurzbeschreibung

EPR bezeichnet die drei Autoren Einstein, Podolsky und Rosen eines Artikels aus dem Jahr 1935, in dem auf die Besonderheiten von Quantenkorrelationen bei verschränkten Zuständen hingewiesen wurde.
Unter einem EPR-Zustand versteht man einen verschränkten Zustand von zwei Zwei-Zustandssystem, der bezüglich jeder Observablen (außer der Identität) an den beiden einzelnen Systemen antikorreliert ist.

Anmerkungen

1. Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen haben 1935 in einem Artikel versucht zu argumentieren, dass die Quantentheorie nicht allen physikalischen Freiheitsgraden Rechnung trägt [5]. Sie wiesen in diesem Zuammenhang auf die seltsamen Korrelationen hin, die bei verschränkten Zwei-Teilchenzuständen auftreten können.

   Ihre Argumentation war im Wesentlichen die folgende: Man kann sich an einem EPR-Zustand (s.u.) für eines der Quantenobjekte aussuchen, für welche beobachtbare Größe man eine Vorhersage (die dann auch mit Sicherheit eintritt) treffen möchte. Dies wird durch eine Messung an dem zweiten Quantenobjekt wegen der totalen Antikorrelation möglich. Hier machen die Autoren die Annahme, dass eine Messung an dem zweiten Quantenobjekt, das im Prinzip beliebig weit entfernt sein kann, keinen Einfluss auf das erste Quantenobjekt hat. Da man aber auf diese Weise das Ergebnis für eine beliebige Messung an Objekt 1 vorhersagen kann, muss (nach EPR) das Ergebnis für diese Messung schon in irgendeiner Weise festliegen (z.B. in Form von verborgenen Variablen). Dies wird durch die Quantentheorie nicht beschrieben.

2. Ein EPR-Zustand ist ein verschränkter Quantenzustand für zwei Quantenobjekte, die jeweils ein Zwei-Zustandssystem bilden. Dieser Zustand hat die besondere Eigenschaft, dass die Ergebnisse einer Messung derselben Observablen an den beiden Quantenobjekten immer total antikorreliert sind. Beispielsweise sind die Polarisationen zweier im EPR-Zustand verschränkten Photonen total antikorreliert, d.h., unabhängig von der gewählten Polarisationsbasis, die man für beide Photonen wählt, erhält man immer zueinander orthogonale Polarisationen. Bei Spin-$\frac{1}{2}$-Objekten (z.B. Elektronen) findet man bezüglich jeder beliebigen Richtung immer entgegengesetzte Spinorientierungen. Bezeichnen wir mit a und b die beiden Zustände, so ist der EPR-Zustand gegeben durch

   $$|\text{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|a\rangle|b\rangle - |b\rangle|a\rangle\big) \,. \tag{3}$$

   Einstein, Podolsky und Rosen erwähnen in ihrem Artikel diesen speziellen Zustand nicht (sie betrachten ein Zwei-Teilchensystem, bei dem der Gesamtimpuls und der relative Abstand präpariert wurden). Es handelt sich um einen Zustand, den später Yakir Aharonov und David Bohm für eine vereinfachte Darstellung des EPR-Arguments verwendet haben. Daher spricht man auch manchmal vom EPR-Bohm-Zustand.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Das EPR-Paradoxon wird in seiner ursprünglichen Form wohl eher selten Einzug in den Quantenphysikunterricht finden und ist auch nicht Teil der KMK-Standards oder der Bildungspläne. Allerdings spielen verschränkte Zustände wie der EPR-Zustand für die Koinzidenzmethode zur Messung von Photonen eine Rolle. Dadurch kann der EPR-Zustand, gegebenenfalls mit einem anderen Namen, im Unterricht behandelt werden.

6 INTERFERENZMUSTER

(siehe Kohärenz und Dekohärenz und Superposition)

7 KAUSALITÄT

(siehe auch Determinismus und Lokalität)

Kurzbeschreibung

Eine sehr allgemeine Interpretation von Kausalität setzt diese mit dem „Prinzip vom zureichenden Grund" von Gottfried Leibniz gleich, welches besagt, dass es für alles einen zureichenden Grund gibt, weshalb ein Ereignis in dieser und keiner anderen Form eingetreten ist, auch wenn diese Gründe uns nicht immer bekannt sind [8]. Dieses Prinzip des zureichenden Grunds scheint in der Quantentheorie verletzt (zumindest in den Standardinterpretationen), insofern es für den Ausgang einer Messung (z.B. in einem Stern-Gerlach-Experiment) manchmal keinen hinreichenden Grund gibt, und auch im Nachhinein kein Grund gefunden werden kann, weshalb ein bestimmtes Messergebnis aufgetreten ist.

Relativistische (Mikro-)Kausalität

In der relativistischen Physik bezeichnet Kausalität (oder auch Mikrokausalität) eine transitive und asymmetrische Relation zwischen zwei Ereignissen (also Punkten der Raumzeit). Man sagt, dass ein Ereignis A ein anderes Ereignis B kausal beeinflussen kann, wenn B innerhalb oder auf dem Zukunftslichtkegel von A liegt. Mit anderen Worten, ein sich maximal mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitendes Signal, das bei A ausgesandt wird, kann B erreichen.

Anmerkungen

Der Begriff der Kausalität ist in der Philosophie sehr umstritten und auch in der Physik wird er, abgesehen von obiger Definition der Mikrokausalität, eher umgangssprachlich verwendet. Gemeint ist meist, dass ein Ereignis A einen kausalen Einfluss auf Ereignis B hat, wenn ohne das Ereignis A das Ereignis B nicht stattgefunden hätte. In konkreten Fällen ist A jedoch oft weder eine hinreichende noch eine notwendige Bedingung für das Eintreffen von B, da B möglicherweise auch von anderen Ereignissen ausgelöst werden kann oder auch das Ereignis A nicht notwendigerweise und immer das Ereignis B zur Folge hat.

In philosophischen Diskussionen versucht man in der Physik das Konzept der Kausalität meist zu vermeiden und durch das besser definierte Konzept der Korrelation oder aber der Determiniertheit zu ersetzen. In der Quantentheorie wird oft die Frage diskutiert, inwieweit eine Messung an einem System einen Einfluss auf den Ausgang einer zweiten Messung an einem anderen System haben kann. Dies spielt besonders dann eine Rolle, wenn die beiden Systeme durch einen verschränkten Zustand beschrieben werden. Die dort beobachteten Korrelationen (z.B. Verletzungen der Bell'schen Ungleichungen) scheinen einem klassischen Kausalitätsverständnis zu widersprechen, da die Messungen meist raumartige Ereignisse bilden (sich also nicht direkt beeinflussen können, sofern ein Einfluss mit Überlichtgeschwindigkeit ausgeschlossen wird) und andererseits eine gemeinsame Ursache ausgeschlossen werden kann, sofern man eine Realitätsannahme macht (siehe Realität).

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Genau wie der Begriff des Determinismus wird der Begriff der „Kausalität" von den KMK-Bildungsstandards bereits im grundlegenden Anforderungsbereich verortet. In den Bildungsplänen werden die Begriffe meist gemeinsam in Formulierungen verwendet, die darauf abzielen, den stochastischen Charakter des Messprozesses in der Quantenphysik zu betonen.

8 KOHÄRENZ UND DEKOHÄRENZ

Kurzbeschreibung

Unter Kohärenz versteht man eine konstante bzw. gleichbleibende Phasenbeziehung. Da Interferenzmuster in der Quantenphysik nur mit sehr vielen Systemen unter gleichartigen Bedingungen beobachtet werden können, bedeutet die Kohärenz in diesem Fall, dass die relativen Phasenbeziehungen zwischen zwei (oder mehr) interferierenden Anteilen eines Zustands bei vielen gleichartig präparierten Systemen gleich bleiben. Von Dekohärenz spricht man, wenn die Phasenbeziehungen für verschiedene aber gleichartig präparierte Systeme zufällig werden oder nicht mehr kontrollierbar sind.

Anmerkungen

1. Interferenzmuster treten auf, wenn sich zwei oder mehr Anteile eines Zustands überlagern und die relative Phase zwischen diesen Anteilen kontrolliert verändert werden kann. Beim Doppelspalt handelt es sich um die beiden Anteile des Zustands, die jeweils von einem Spalt herrühren, und die relative Phase zwischen diesen Anteilen variiert mit der Koordinate auf dem Detektorschirm. Beim Mach-Zehnder-Interferometer bestehen die Anteile des Zustands aus den beiden möglichen Wegen, die ein Quantenobjekt genommen haben kann, und die Phase wird durch die Differenz in der optischen Weglänge bestimmt. Damit ein Interferenzmuster nachgewiesen werden kann, muss das Experiment sehr oft wiederholt werden und bei all diesen Wiederholungen müssen die relativen Phasenbeziehungen gleich sein. „Welcher-Weg“-Information zerstört diese Konstanz der Phasenbeziehungen und damit das Interferenzmuster.

2. Die Interferenzfähigkeit quantenphysikalischer Systeme ist einer der Wesenszüge der Quantentheorie.

3. Ein fehlendes Interferenzmuster bedeutet nicht notwendigerweise Dekohärenz von relativen Phasen. Bei Einzelphoton-Quantenradierern kann beispielsweise eine Welcher-Weg-Information gewonnen werden, nachdem die Photonen auf einen Schirm getroffen sind (z.B. an Photonen, die mit den Photonen, die auf den Schirm getroffen sind, verschränkt waren). Daher sieht man auch auf dem Schirm zunächst keine Interferenz. Man kann aber die Welcher-Weg-Information durch eine komplementäre Messung auch endgültig löschen und dafür eine komplementäre Information gewinnen, mit der man die Punkte auf einem Schirm nachträglich „markieren“ kann, sodass zwei um $\pi/2$ versetzte Interferenzmuster sichtbar werden. Das anfänglich fehlende Interferenzmuster war somit keine Folge einer Dekohärenz.

4. Dekohärenz wurde gelegentlich als Lösung des Messproblems angesehen, d.h., die Reduktion des Quantenzustands wurde mit der Dekoärenz zwischen zwei klassischen Anteilen (z.B. bei der Superposition von zwei unterschiedlichen Zeigerstellungen eines Messgeräts) eines Zustands erklärt. Insbesondere John Bell hat jedoch mehrfach darauf hingewiesen [1], dass man mit Dekohärenz zwar erklären kann, weshalb man bei vielen Freiheitsgraden, die nicht kontrolliert werden können, keine Interferenz mehr beobachten kann und damit makroskopisch den Eindruck gewinnt, als ob ein reduzierter Zustand vorläge, doch die eigentliche Reduktion des Zustands lässt sich mit Dekohärenz nicht erklären.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Die Kohärenzeigenschaft von Wellen wird üblicherweise in der Schule im Rahmen von mechanischen Wellen und elektromagnetischen Wellen bereits vor der Behandlung der Quantenmechanik eingeführt. Eine Übertragung auf die Quantenmechanik findet oft nur implizit statt, denn in der Schulphysik betrachten wir lediglich reine Zustände von Quantensystemen. Dekohärenz führt dazu, dass gemischte Zustände vorliegen, die in der Regel nicht explizit betrachtet werden und die insbesondere im Zusammenhang mit der Verschränkung zu Schwierigkeiten führen. So fällt vielen Schülerinnen und Schülern insbesondere die Unterscheidung zwischen klassischen Korrelationen und Verschränkung schwer (siehe Verschränkung).

9 KOMPLEMENTARITÄT

Kurzbeschreibung

Niels Bohr, der den Begriff der Komplementarität 1927 in seinen berühmten Como Lectures in die Physik eingeführt hat, bezeichnete zwei Eigenschaften als komplementär, wenn sie nicht gleichzeitig an einem System gemessen werden können, aber erst in ihrer Gemeinsamkeit ein vollständiges Bild einer unabhängigen Realität geben. Insbesondere bezeichnete er Raum und Zeit einerseits und das Kausalitätsprinzip andererseits als komplementär [3].

Mathematische Definition

Zwei selbst-adjungierte Operatoren A und B werden als komplementär bezeichnet, wenn ihre Eigenräume eindeutig und maximal verschieden sind. Die Bedingung „maximal verschieden" bedeutet: Sei $\{|e_i\rangle\}$ die orthonormierte Basis zum Operator A und $\{|f_i\rangle\}$ die orthonomierte Basis zum Operator B, dann bezeichnet man diese beiden Basissysteme als maximal verschieden, wenn $|\langle f_i|e_j\rangle|^2 = N$ (unabhängig von i und j) ist. In endlich dimensionalen Vektorräumen ist $N = 1/d$ (d die Dimension des Vektorraums)

Zwei beobachtbare Größen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind komplementär, wenn sie durch komplementäre Operatoren repräsentiert werden.

Experimentelle Signatur

Sind zwei beobachtbare Größen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ komplementär und hat man ein Ensemble von Systemen in einem bestimmten Eigenzustand von $\mathcal{A}$ präpariert (d.h., liefert eine Messung an einem Subensemble dieser Systeme immer denselben Messwert a), so ist die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Eigenwert b von B als Messwert von $\mathcal{B}$ zu erhalten, unabhängig sowohl von b als auch von a. Man erhält in diesem Fall die maximal mögliche Streuung für die Messwerte von $\mathcal{B}$.

Anmerkungen

1. In der Literatur findet man auch andere Definitionen von mathematischer Komplementarität. Beispielsweise bezeichnen manche Autoren zwei Operatoren A und B als komplementär, wenn sie nicht kommutieren, wenn also $[A,B] \neq 0$. In diesem Fall reicht es, wenn die beiden Operatoren auf einem Unterraum des Vektorraums nicht kommutieren, ansonsten aber gleich sind. Etwas strenger wird daher manchmal gefordert, dass $\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle \neq 0$ für alle $|\psi\rangle \neq 0$. In diesem Fall können die beiden Operatoren jedoch immer noch beliebig nahe beieinander liegen (d.h., der Differenzoperator hat eine beliebig kleine Norm). Beispielsweise würden die Polarisationsfilter zu zwei Polarisationsrichtungen komplementären Messungen entsprechen, wenn sie sich um einen beliebig kleinen Winkel unterscheiden. In diesem Fall liefert eine Messung der Observablen $\mathcal{B}$ in einem Eigenzustand zu $\mathcal{A}$ eine (nicht notwendigerweise maximale) Streuung der Messwerte.

   Eine sehr strenge Definition fordert von A und B, dass sie kanonische Vertauschungsrelationen erfüllen, dass ihr Kommutator also proportional zur Identität ist: $[A,B] = \mathrm{i}c$ (mit c konstant). Bei dieser Definition gibt es in endlich dimensionalen Vektorräumen keine komplementären Operatoren.

2. Bezüglich aller oben genannten Definitionen von Komplementarität sind der Ortsoperator und der Impulsoperator komplementär, daher sagt man auch schon mal Ort und Impuls seien komplementär. Da die (uneigentlichen) Eigenräume zum Ortsoperator ein beliebig scharf lokalisiertes Objekt beschreiben, das in dieser Hinsicht die Eigenschaften eines Teilchens hat, und die Eigenräume zum Impulsoperator ein beliebig ausgedehntes Objekt mit einer scharfen Wellenlänge beschreiben, spricht man auch oft von der „Komplementarität von Welle und Teilchen".

   Die Beziehungen von deBroglie stellen den Zusammenhang zwischen dem Teilchencharakter und dem Wellencharakter eines Quantenobjekts her:

   $$p = \frac{h}{\lambda} \qquad\qquad E = h\nu\,. \tag{4}$$

Eine Kenngröße für Teilchen (der Impuls p bzw. die Energie E) ist gleich dem Planck'schen Wirkungsquantum h multipliziert mit einer Kenngröße für Wellen (die Wellenlänge λ bzw. die Frequenz ν).

3. Die Komplementariät von Observablen und die damit verbundenen Unbestimmheiten der Messwerte sind Teil der Wesenszüge der Quantenmechanik.

4. In der Schule spielt die Komplementarität von „Welcher-Weg-Information" und „Beobachtbarkeit eines Interferenzmusters" eine wichtige Rolle: Ist Welcher-Weg-Information vorhanden (oder zumindest prinzipiell möglich), kann man kein Interferenzmuster beobachten. Ein Versuch, diese Komplementarität zu quantifizieren, stellt die Greenberger-Englert-Ungleichung dar [6, 4]. Es handelt sich hierbei um eine spezielle Form der Welle-Teilchen-Komplementarität (und damit letztendlich der Ort-Impuls-Komplementarität): Ist bekannt, welchen Weg ein Quantenobjekt genommen hat, zeigt dieses Quantenobjekt die Eigenschaften eines Teilchens; beobachtet man ein Interferenzmuster, wird daran der Wellencharakter deutlich.

5. Ebenfalls komplementär in dem hier angegebenen Sinne sind zwei Polarisationsbasen (zu Licht), die maximal verschieden sind, z.B. die Basis der horizontal/vertikalen Polarisationen $\{h,v\}$ und die Basis der plus/minus diagonalen (unter $\pm 45°$ geneigten) Polarisationen $\{+,-\}$. (Diese beiden Basispaare spielen in der Quantenkryptographie bzw. allgemeiner der Quanteninformation eine wichtige Rolle.) Aber auch die links/rechts zirkularen Polarisationen $\{L,R\}$ sind komplementär zu den beiden genannten Basissystemen. Die folgenden drei Vektorpaare entsprechen diesen Polarisationsbasen. Man überzeugt sich leicht, dass das Quadrat des Skalarprodukts von je zwei Vektoren aus verschiedenen Basissystemen immer gleich $1/2$ ist:
$$\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}}_{\{h,v\}} \quad , \quad \underbrace{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}}_{\{+,-\}} \quad , \quad \underbrace{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}\right\}}_{\{L,R\}} .$$

6. Niels Bohr sah in der Komplementarität ein Grundprinzip der Natur und wollte diesen Begriff auch auf andere Bereiche außerhalb der Quantentheorie oder Physik ausdehnen. Er verstand darunter zwei Perspektiven auf die Welt, die erst in ihrer Gemeinsamkeit ein vollständiges Bild ergeben, aber nicht gleichzeitig eingenommen werden können. Ein gelegentlich zitiertes Beispiel von komplementären Begriffen in diesem Sinne sind „Wissen und Glauben".

7. Der hier angegebene Komplementaritätsbegriff ist zu unterscheiden von der mengentheoretischen oder auch der logischen Komplementarität, wo dieser Begriff einer Negation bzw. dem Gegenteil von Etwas entspricht: Das mengentheoretische Komplement zu einer Menge A bezeichnet eine Menge $\neg A$, die genau jene Elemente enthält, die nicht in A enthalten sind. Das logische Komplement zu einer Aussage bezeichnet das logische Gegenteil zu dieser Aussage.

   Wenn man bei einem Mach-Zehnder-Interferometer von der Komplementarität der beiden Interferenzmuster hinter den beiden Ausgängen spricht, bezieht sich diese Komplementarität auf das mengentheoretische Konzept, nicht auf das quantenmechanische. Legt man die beiden Interferenzmuster übereinander, erhält man eine Gleichverteilung.

8. In der Quantentheorie impliziert die Komplementarität zweier Observablen, dass die Varianzen der beiden Observablen nicht beide beliebig klein werden können. Meist besteht zwischen den Varianzen der Messwerte zu diesen beiden Observablen an einem Ensemble gleichartig präparierter Systeme eine sogenannte Unbestimmtheitsrelationen bzw. Unschärferelationen: Je kleiner die Varianz zu einer Observablen wird umso größer wird die Varianz der anderen Observablen.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Der Begriff der Komplementarität wird in den KMK-Standards für das grundlegende und das erhöhte Anforderungsniveau festgeschrieben. In vielen Bildungsplänen wird die Komplementarität als Komplementarität von Welle und Teilchen beschrieben, in der Form, dass Quantenobjekte sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften haben, diese sich aber nicht gleichzeitig und unabhängig voneinander beobachten lassen. Mit den neuen Bildungsstandards werden dabei auch Interferometrieexperiemente, wie das Mach-Zehnder-Interferometer häufiger in den Bildungsplänen aufgegriffen und mit ihnen die sogenannte Welcher-Weg-Information.

10 LOKALITÄT

Kurzbeschreibung

Lokalität bezeichnet eine Forderung der speziellen Relativitätstheorie, wonach sich kausale Einflüsse nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können.

Im Zusammenhang mit der Quantentheorie wird immer wieder diskutiert, ob es wirklich Fernwirkungen („spooky action at a distance“) gibt. Das Reduktions- oder Kollapspostulat der Quantentheorie besagt, dass der Zustand eines Systems unmittelbar nach einer Messung durch den Eigenvektor zu dem beobachteten Messergebnis zu beschreiben ist. Handelt es sich bei dem Zustand $|\psi\rangle$ vor der Messung um einen räumlich ausgedehnten Zustand, und bei dem Zustand $|\lambda\rangle$ nach der Messung um einen räumlich lokalisierten Zustand, so hat „instantan“ eine nicht-lokale Reduktion des Zustands stattgefunden, die der Relativitätstheorie zu widersprechen scheint, zumindest, sofern man dem Zustand eine objektive (eventuell sogar substantielle) Bedeutung zuschreibt.

Betrachten wir als Beispiel den Einstein-Podolsky-Rosen-Zustand (kurz EPR-Zustand)

$$|\text{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a,x\rangle|b,y\rangle - |b,x\rangle|a,y\rangle)\,,$$

wobei $|a,x\rangle$ den Zustand eines Systems (z.B. ein Photon oder Elektron) am Ort x beschreibt, das die Eigenschaft a (z.B. eine bestimmte Polarisation oder eine Spinorientierung bezüglich einer bestimmten Richtung) besitzt, entsprechend für die anderen Kombinationen. x und y seien räumlich weit entfernte Punkte. Wird nun bei Punkt x eine Messung vorgenommen und der Messwert a registriert, reduziert sich der EPR-Zustand instantan zu dem Zustand $|a,x\rangle|b,y\rangle$. Insbesondere ändert sich die Vorhersage für eine Messung an Punkt y instantan von vorher „50%/50% a oder b“ zu „100% b“. Ob dieses Verhalten die (relativistische) Lokalität verletzt oder nicht, hängt von der Interpretation des Zustands ab. Im Rahmen der Kopenhagener Deutung (und noch extremer beispielsweise im Rahmen der Quanten-Bayesianismus-Interpretation der Quantentheorie) bezieht sich der Zustand nur auf das Wissen über ein System. Während somit eine Person bei x den Zustand unmittelbar nach der Messung reduziert, wird für eine Person bei y dieses Wissen erst später zugängig. In diesen Interpretationen kann einem System ein Zustand nicht *per se* zugeschrieben werden, sondern jede Person schreibt dem System einen Zustand entsprechend seinem bzw. ihrem Vorwissen zu.

Diese Situation ist natürlich sehr unbefriedigend und viele Interpretationen gehen von einem objektiven (d.h. von einer Person unabhängigen) Zustandsbegriff aus. Je nach Grad der Realität, die man einer Wellenfunktion zuschreibt (bis hin zu einem unabhängig existierenden Führungsfeld in der Bohm’schen Mechanik), wird die relativistische Lokalität verletzt. Da aber Quantenkorrelationen nicht dazu genutzt werden können, gezielt Information oder gar Energie zu übertragen, liegt keine Verletzung in einem objektiv nachweisbaren Sinne vor. Messungen an einem EPR-Zustand kann man nicht als „Ursache für“ oder „Wirkung von“ etwas interpretieren, daher besteht zwischen diesen Messungen auch keine notwendige kausale Abhängigkeit.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Obwohl der Begriff der Lokalität in vielen Quantenmechanikvorlesungen an der Universität nicht behandelt wird, ist er gemeinsam mit dem Begriff der „Realität“ in die KMK-Bildungsstandards aufgenommen worden und im grundlegenden wie im erhöhten Unterrichtsniveau zu unterrichten. Zum EPR-Paradoxon sowie zur sogenannten „spukhaften Fernwirkung“ gibt es viel populärwissenschaftliches Material. Gelegentlich wird darin die Fehlvorstellung, mit den Gesetzen der Quantenmechanik könne entgegen der Annahmen der Relativitätstheorie Information mit Überlichtgeschwindigkeit gesendet werden, verbreitet. Die in der Fachwissenschaft weit verbreitete Annahme, dass keine Information sich schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann wird auch „no-signaling theorem“ genannt. Um den Begriff der Lokalität und insbesondere seine Problematik in der Quantenmechanik zu erarbeiten, benötigt es verschränkte Zustände, wie den EPR-Zustand. Würden wir nur separable Zustände betrachten, gäbe es bei der Messung des Zustands eines Teilsystems keine Reduktion des Zustands eines weiteren Teilsystems und somit auch nichts, was einen nichtlokalen Charakter hat.

11 MESSUNG UND PRÄPARATION

Kurzbeschreibung

In der Quantentheorie versteht man unter einer Messung die Kopplung eines Systems, dessen Eigenschaften untersucht werden sollen, an ein als klassisches System beschreibbares Gerät, das seinen Zustand aufgrund einer Wechselwirkung mit dem untersuchten System verändert. Diese Veränderung lässt sich an dem Messgerät als Zahl (Zeigerstellung) ablesen und gibt Aufschluss über den Zustand des untersuchten Systems. Dazu wird erwartet, dass man die Funktionsweise des Messgeräts verstanden hat. Unter einer Präparation versteht man die Selektion von Systemen, die bezüglich bestimmter Observablen dieselben Eigenschaften haben.

Anmerkungen

1. Der Begriff der Messung spielt in der Quantentheorie eine wichtige, aber auch sehr umstrittene Rolle. Einerseits haben die Begründer der Quantentheorie, allen voran Bohr und Heisenberg, Wert darauf gelegt, dass sich die Quantentheorie nur auf das Beobachtbare beziehen darf, und sie haben daher ihre Axiomatik der Quantentheorie auf dem Beobachtbaren und damit den Ergebnissen von Messungen aufgebaut. Andererseits haben Kritiker wie John Bell (1928–1990) immer wieder betont, dass bei einer wirklich fundamentalen Theorie die Beschreibung einer „Messung" eigentlich aus dem Formalismus ableitbar sein sollte. In einem berühmten Artikel *Against 'Measurement'* [1] spricht sich Bell dafür aus, diesen Begriff – natürlich nicht das Experiment als physikalische Methode – ganz aus dem Vokabular der Physik zu verbannen, zumindest wenn man über die Grundlagen der Quantentheorie spricht, da es sich letztendlich nur um eine besondere Form von Wechselwirkung zwischen zwei Systemen handelt, die zumindest theoretisch durch eine fundamentale Theorie beschreibbar sein sollte.

2. In der klassischen Physik versteht man unter einer Messung im Idealfall eine neutrale Beobachtung, mit der man eine Information über den Zustand des gemessenen Systems erhält, ohne dass die Messung den Zustand dieses Systems beeinflusst. Falls die experimentelle Messanordnung aus praktischen Gründen den Zustand des System doch verändert, bezieht man die gewonnene Information auf den Zustand des Systems unmittelbar vor der Messung. Diese Idealvorstellung einer Messung ist in der Quantentheorie im Allgemeinen nicht mehr haltbar.

Am Beispiel der Polarisationszustände einzelner Photonen können wir die Bedeutung und Wirkung von „Messgeräten" wie Polarisationsfiltern, Detektoren und Polarisationsstrahlteilern in mehrere Klassen unterteilen:

1. Der Durchtritt eines Photons durch einen Filter ist eine *Präparation*, insbesondere wenn über den Zustand des Photons vorher nichts bekannt ist. Hinter dem Filter hat ein hindurchgetretenes Photon eine bekannte Polarisation.

2. Ob ein Photon einen Filter passiert hat oder nicht, weiß man im Allgemeinen nicht. Ein Detektor hinter einem Filter kann ein Photon registrieren, allerdings wird das Photon dabei im Allgemeinen absorbiert und somit entweder vernichtet oder aber in seinem Zustand drastisch verändert. Meist kann man mit einem solchen Photon keine weiteren kontrollierten Experimente durchführen. Es hat aber ein *Nachweis* des Photons stattgefunden.

3. Eine *Bestätigung* findet statt, wenn man (aufgrund der Theorie) weiß, in welchem Polarisationszustand sich ein Photon befindet – beispielsweise, weil es einen bestimmten Filter passiert hat – und man nun eine Messung genau dieser Eigenschaft durchführt (also z.B. einen zweiten Filter mit exakt derselben Polarisationsrichtung hinter dem ersten aufbaut). Eine Bestätigung ändert unsere Information über ein System nicht. Allerdings könnte man auf einer Meta-Ebene sagen, dass eine Bestätigung eine Theorie testet (es könnte ja sein, dass Photonen ihre Polarisationsrichtung spontan verändern). Auf einer

Meta-Ebene kann eine Bestätigung also einen informativen Charakter haben, im Rahmen einer Theorie führt eine Bestätigung jedoch nicht zu einem Informationszuwachs.

4. Die Wirkung eines Polarisationsstrahlteilers bzw. Polwürfels mit anschließenden Detektoren in beiden Strahlgängen ist das, was man landläufig als „Messung“ bezeichnet. Allerdings muss betont werden, dass man die Polarisation eines einzelnen Lichtquants gar nicht messen kann: Selbst wenn ein Lichtquant von einer anderen Person im Zustand $|\alpha\rangle$ präpariert wurde, uns diese Orientierung α aber nicht bekannt ist, gibt es kein Experiment, das uns diese Orientierung als Ergebnis liefert. Auf dieser Eigenschaft von Quantensystemen beruht auch die Quantenkryptographie. Man muss sich in einer konkreten Situation auf eine Orientierung des Polarisationsstrahlteilers festlegen und kann dann bezüglich dieser Orientierung eine ‚Messung‘ vornehmen.

Erwin Schrödinger hat (scherzhaft) vorgeschlagen, den Begriff der Messung in der Quantentheorie durch „Prokrustie“ zu ersetzen (nach dem Riesen der griechischen Mythologie, der seinen Gäste die Beine abhackte oder sie streckte, damit sie in seine Betten passten) [12]. Messungen zwingen ein System in einen Eigenzustand zu der Observablen, allerdings betont Schrödinger zurecht, dass wir als Experimentatoren – im Gegensatz zu dem Riesen Procrustes – uns diesen Zustand nicht aussuchen können.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Da die Messung eine wichtige Rolle in der Quantenphysik spielt und sich von einer Messung in der klassischen Physik unterscheidet, wird sie wohl in jedem Unterrichtsgang zur Quantenphysik thematisiert werden. Der Begriff wird daher auch in den Bildungsplänen aufgegriffen, oft in Verbindung mit den Begriffen Realität, Lokalität und Verschränkung. Vermieden wird dabei in der Regel darauf, den Zusammenhang zu Eigenzuständen von Observablen explizit zu machen. Beispielsweise kann in der Schule davon gesprochen werden, dass eine Messung in der Quantenmechanik projektiv und invasiv ist. Im erhöhten Anforderungsbereich wird von den KMK-Standards die Koinzidenzmethode zum Nachweis einzelner Photonen gefordert.

12 OBSERVABLE

Kurzbeschreibung

Observable sind physikalische Größen, die man an einem physikalischen System messen kann.

Anmerkungen

1. John von Neumann definiert ein physikalisches System durch die Menge der Observablen, die an diesem System beobachtet werden können [9]. Welche Observablen das sind, ist eine Erfahrungstatsache. Erst durch das Ergebnis des Stern-Gerlach-Experiments 1922 erkannte man, dass es neben Ort und Impuls noch einen weiteren Freiheitsgrad gibt, den man an einem Elektron messen kann, nämlich seine Spinorientierung entlang einer vorgegebenen Achse. Man kann daher nie behaupten, sämtliche an einem System messbaren Observablen zu kennen, bzw. es kann nie ausgeschlossen werden, dass in Zukunft noch weitere Observablen bekannt werden. Ein allgemeiner physikalischer Formalismus muss für eine Theorie bzw. ein Modell zunächst klären, welche Observablen es gibt bzw. bekannt sind und wie diese Observablen mathematisch repräsentiert werden sollen.

2. Die physikalische Realisierung einer Observablen erfolgt durch die Angabe des Messprotokolls, wie eine Messung dieser Observablen durchzuführen ist. Es ist eine Abfolge von Schritten, die angeben, in welcher Form ein System mit einer Messapparatur gekoppelt wird und wie die Veränderungen an der Messapparatur (z.B. die Zeigerstellung) abgelesen werden. Aus diesen Veränderungen muss sich eine Zahl bestimmen lassen, die man als das Ergebnis der Messung bezeichnet, und die eine Aussage über den Zustand eines Systems – z.B. wie es präpariert wurde – macht. Hier bezeichne ich die physikalische Observable als Messvorschrift mit kalligraphischen Buchstaben, z.B. $\mathcal{R}$, die zugehörige mathematische Darstellung dieser Observablen kennzeichne ich durch R. Sehr oft wird aber nicht zwischen diesen beiden Objekten unterschieden und es wird erwartet, dass man im Einzelfall entscheiden kann, ob die physikalische Messvorschrift oder die mathematische Darstellung gemeint ist.

3. Observablen bilden nicht einfach nur eine strukturlose Menge, sondern es gibt auch Beziehungen zwischen den Observablen, die bekannt sein sollten und sich in der mathematischen Darstellung widerspiegeln müssen. Kennt man eine Observable $\mathcal{R}$, also die Vorschrift, wie man diese Observable an einem System messen kann, so kennt man auch die Observable $f(\mathcal{R})$ für eine Funktion f: Man misst die Observable $\mathcal{R}$ an einem physikalischen System und bildet von dem erhaltenen Messwert r die Funktion $f(r)$. Insbesondere ist die Observable $\alpha\mathcal{R}$ (für eine beliebige reelle Zahl α) durch die Messvorschrift von $\mathcal{R}$ gegeben, wobei jeder gemessene (an einer Zeigerstellung abgelesene Messwert) mit α multipliziert wird. Lassen sich zwei Observable $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ gleichzeitig an einem System messen (das bedeutet, es gibt ein Protokoll, bei dem man gleichzeitig einen Messwert sowohl für $\mathcal{R}$ als auch für $\mathcal{S}$ erhält – diese Werte seien r und s), dann ist die Observable $f(\mathcal{R},\mathcal{S})$ definiert als die Messvorschrift, bei der von den Messwerten die Funktion $f(r,s)$ gebildet wird.

   Bei Observablen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$, die sich nicht gleichzeitig an einem System messen lassen – solche Observablen bezeichnet man als nicht kompatibel –, sind allgemeine Funktionen $f(\mathcal{R},\mathcal{S})$ zunächst nicht definiert. Insbesondere sind auch Ausdrücke der Art $\mathcal{R}+\mathcal{S}$ oder $\mathcal{R}\cdot\mathcal{S}$ als Messvorschriften nicht definiert.

4. Die mathematische Darstellung (Repräsentation) einer Observablen hängt von der Theorie ab, die wir verwenden. In der klassischen Mechanik handelt es sich bei Observablen um Funktionen von Ort und Impuls (bzw. Geschwindigkeit), d.h. Funktionen auf dem Phasenraum. In der Quantenmechanik werden Observable durch sogenannte selbst-adjungierte bzw. hermitesche Operatoren auf einem Hilbert-Raum – einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt – dargestellt.

An dieser Stelle sollte man betonen, dass die mathematische Darstellung einer Observablen nicht den Messprozess repräsentiert, also den dynamischen Vorgang der Messung, sondern eher die Informationen, die man durch solche Messungen erlangen kann: die Menge der möglichen Messwerte sowie die Zustände, die mit diesen Messwerten verbunden sind. In diesem Sinne (und in Anlehnung an einen Ausdruck von Schrödinger [11] zum Begriff der Wellenfunktion) kann man von einer Observablen als einem „Katalog von möglichen Ergebnissen" sprechen.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Der Begriff der Observable wird in der Schule meist nicht eingeführt und eher intuitiv verwendet.

13 Penny-Flip-Spiel

Kurzbeschreibung

Das Penny-Flip-Spiel ist ein einfaches Beispiel für eine Spielregel, bei der es klassisch keine Gewinnstrategie gibt, bei der es aber in dem erweiterten Zustandsraum einer Quantenversion eine hundertprozentige Gewinnstrategie gibt. Das Spiel wurde 1999 von David Meyer in einem Artikel zu Quantenstrategien erwähnt [10].

Beim Penny-Flip-Spiel spielen zwei Personen – Alice und Bob – gegeneinander. In der klassischen Version darf Alice eine Münze so präparieren, dass diese „Kopf“ oder “Zahl“ zeigt. Bob darf nun diese Münze umdrehen oder so belassen, wie sie ist, jedoch ohne dass Alice weiß, was Bob getan hat. Alice darf nun entscheiden, ob die Münze nochmals umgedreht wird oder nicht. Alice hat gewonnen, wenn die Münze am Ende „Kopf“ zeigt.

In dieser klassischen Version hat Alice nur eine 50-prozentige Chance zu gewinnen, da sie nicht weiß, zu welcher Aktion sich Bob entschieden hat. In der Quantenversion des Spiels darf Alice die Münze in einem beliebigen Quantenzustand präparieren, z.B. in dem Zustand

$$|\text{Münze}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\text{Kopf}\rangle + |\text{Zahl}\rangle\Big)\,.$$

Bob darf nun wiederum die Münze umdrehen (d.h., er darf $|\text{Kopf}\rangle$ und $|\text{Zahl}\rangle$ vertauschen) oder er darf „Kopf“ und „Zahl“ so belassen, wie sie sind. Offenbar ändern beide Transformationen aber an dem von Alice präparierten Quantenzustand nichts. Wenn Alice nun eine Hadamard-Transformation (siehe Quantengatter) durchführt, überführt sie den Zustand in den Zustand $|\text{Kopf}\rangle$. Sie hat also in jedem Fall gewonnen, unabhängig davon, was Bob gemacht hat.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Das Penny-Flip-Spiel ist zwar nicht Teil der Rahmenlehrpläne, es lässt sich aber sehr einfach beschreiben und mit den Methoden eines zweidimensionalen Vektorraums erklären. Die zentrale Idee ist, dass der Vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ nicht verändert wird, wenn man „Kopf“ und „Zahl“ vertauscht, also eine Spiegelung an der positiven Diagonalen vornimmt.

14 QUANTENALGORITHMUS

Kurzbeschreibung

Ein Algorithmus ist eine Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems. Beispielsweise kann ein Kochrezept als Alltagsbeispiel eines Algorithmus gedeutet werden. Ein fundamentales Prinzip der Informatik ist das Eingabe-Verarbeitung-Ausgabe-Prinzip, kurz EVA-Prinzip, wobei hier der Algorithmus für die Verarbeitung der Eingabe sorgt und dann eine Ausgabe bereithält. Ein Quantenalgorithmus funktioniert nach dem gleichem Prinzip, lediglich wird die Information, die verarbeitet wird, in Quantenzuständen codiert und diese wird mittels Quantengattern (siehe Artikel Quantengatter) verarbeitet.

Da wir die Zustände 0 und 1 eines klassischen Bits auch in einem QuBit speichern können und die Bool'schen Gatter NOT, AND, OR oder XOR auch auf Quantencomputern ausführen können[2], könnten wir mit einem funktionsfähigen Quantencomputer prinzipiell auch alle klassischen Algorithmen ausführen.

Es gibt darüber hinaus allerdings auch echte Quantenalgorithmen, die sich nicht von einem klassischen Computer ausführen lassen und die teilweise bewiesene Vorteile gegenüber klassischen Computern besitzen. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist der Grover-Algorithmus, der 1996 von Lov Grover vorgeschlagen wurde, und der die Suche in einer unsortierten Datenbank beschleunigt. Während der beste klassische Algorithmus die Datenbank stupide Element für Element durchsuchen muss und so im Schnitt die Hälfte der Elemente anschauen muss, schafft es der Grover-Algorithmus mit $\sqrt{n}$ Aufrufen einer Operation, wobei n hier die Anzahl der Elemente in der Datenbank ist. Allerdings ist dieser Rechenvorteil (oft (quantum) Speed-up genannt) hier lediglich ein Wurzelfaktor. Interessanter für die Anwendung wären Quantenalgorithmen, die einen exponentiellen Vorteil gegenüber herkömmlichen Algorithmen bieten. Der Shor-Algorithmus zum Faktorisieren von Zahlen ist ein Beispiel für einen Quantenalgorithmus, der exponentiell schneller arbeitet als der beste bekannte Algorithmus. Interessanterweise ist es ein offenes Problem, ob die Faktorisierung nicht auch auf klassischen Computern effizient lösbar ist und wir einfach noch nicht den richtigen klassischen Algorithmus gefunden haben. Ein solcher effizienter klassischer Algorithmus ist aktuell nicht bekannt. Es ist allerdings auch kein Beweis bekannt, der zeigt, dass es keinen solchen Algorithmus geben kann. Da der Shor-Algorithmus ein durchaus wichtiges Problem effizient löst, das auch Auswirkungen auf einige asymmetrische Verschlüsselungsverfahren wie das RSA-Verfahren haben würde, wird er immer wieder als prominentes Beispiel herangezogen.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Quantenalgorithmen werden weder in den KMK-Bildungsstandards noch in den Bildungsplänen der Länder für das Fach Physik thematisiert. Ebenso wie Quantengatter werden sie im Wahlbereich des Bildungsplans für das Fach Informatik in Sachsen aufgegriffen. Im Physikunterricht tauchen Quantenalgorithmen insbesondere bei Schülerpräsentationen über Quantencomputer auf.

[2] Man muss bei diesem Vergleich allerdings etwas vorsichtig sein. In der Bool'schen Informatik gibt es irreversible Gatter, wie das AND Gatter. Bei diesen Gattern kann man aus der Ausgabe nicht eindeutig auf die Eingabe schließen. Da Quantengatter unitären Operationen entsprechen, die insbesondere immer invertierbar sind, gibt es nicht direkt ein Quanten-AND. Allerdings kann ein Gatter gebaut werden, das zwei QuBits als Input hat und zwei QuBits als Output, wovon eines der Output-QuBits dem UND der zwei Eingangs-QuBits entspricht.

15 QUANTENGATTER

Kurzbeschreibung

Quantengatter sind die elementaren Bausteine eines Quantenalgorithmus. Sie können auf unterschiedlichen Plattformen, wie supraleitenden Schaltkreisen oder gefangenen Ionen, realisiert werden. In der Quanteninformationsverarbeitung interessiert man sich dabei besonders für die Fehlerrate der Gatter, da die Fehlerkorrektur deutlich aufwendiger ist als in klassischen informationsverarbeitenden Systemen.

Ein Quantenalgorithmus (siehe Quantenalgorithmus) ist eine feste Abfolge von Quantengattern. In der Regel sind Quantengatter unitäre Operationen auf ein oder zwei QuBits. Darüber hinaus gibt es auch Quantengatter, die auf drei oder mehr QuBits gleichzeitig wirken, allerdings können auf den meisten Quantencomputern nur Ein-Qubit-Gatter und Zwei-QuBit-Gatter realisiert werden. Wenn wir den Zustand eines einzelnen QuBits auf der Bloch-Kugel darstellen, dann beschreibt ein Ein-QuBit-Gatter eine Rotation oder Spiegelung auf der Bloch-Kugel. Zum Beispiel überführt das Gatter X (manchmal spricht man auch vom „Pauli-X-Gatter“, da es durch die Pauli-Matrix σ_x repräsentiert wird) den Zustand $|0\rangle$ in den Zustand $|1\rangle$ und umgekehrt. Es wird daher auch als NOT-Gatter bezeichnet, weil es die gleiche Funktion wie das klassische NOT-Gatter erfüllt. In der Vektorschreibweise gilt:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und damit } X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle.$$

Im Gegensatz zum klassischen NOT-Gatter, haben die klassischen Gatter AND, OR und XOR kein direktes Quantenanalogon. Das liegt daran, dass die Quantengatter (da sie eine unitäre Operation beschreiben) immer reversibel sind. Die Gatter AND, OR und XOR haben jedoch einen zwei Bits umfassenden Input und geben lediglich ein einziges Bit aus. Sie können daher nicht reversibel sein, da wir beispielsweise bei einem Output eines AND-Gatters von 0 nicht unterscheiden können, welche der drei Inputs 00, 01 oder 10 vorlag.

Über die klassischen Gatter hinaus gibt es Quantengatter wie das Hadamard-Gatter H, das aus den Basiszuständen Superpositionen bildet. Es wirkt beispielsweise auf die Zustände $|0\rangle,|1\rangle$ wie folgt:

$$H|0\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad H|1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

In der Basis $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ ausgedrückt handelt es sich also um gleichmäßige Superpositionen der Basiszustände. Auf der Bloch-Kugel transformiert das Hadamard-Gatter den Nord- und Südpol auf Antipoden auf dem Äquator. Für das Hadamard-Gatter gibt es kein analoges klassisches Gatter.

Das CNOT-Gatter, also das kontrollierte Nicht, ist das bekannteste Gatter, das auf zwei QuBits wirkt. Es führt eine NOT-Operation – also ein X-Gatter – auf dem zweiten QuBit aus, wenn sich das erste QuBit im Zustand $|1\rangle$ befindet und ändert nichts am Zustand des zweiten QuBits, falls das erste QuBit sich im Zustand $|0\rangle$ befindet. Wir wählen die folgende Standardbezeichnungen der Basen:

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Dann können wir das CNOT-Gatter mit folgender unitärer Matrix beschreiben:

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass der linke obere Block einer Identität entspricht, also dem Fall, wenn das Kontroll-QuBit (das erste QuBit) sich im Zustand $|0\rangle$ befindet, und der rechte untere Block dem X entspricht. Das CNOT-Gatter bildet gemeinsam mit den Ein-QuBit-Gattern eine universelle Gattermenge. Das bedeutet, jeder Quantenalgorithmus kann als Abfolge von Ein-QuBit-Gattern und CNOT-Gattern dargestellt werden. Alle Gatter, die auf mehr als zwei QuBits wirken, können durch eine Folge von Ein-QuBit- und CNOT-Gattern ausgedrückt werden. Bei aktuellen Hardwareimplementierungen liegt die Fehlerrate von CNOT-Gattern grob in der Größenordnung von $0{,}1\%$. Dies ist die dominierende Fehlerproblematik, die eine Skalierung der Hardware hin zu größeren Quantencomputern und Quantenalgorithmen mit vielen Gattern behindert.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Die Behandlung von Quantengattern ist für das Fach Physik weder in den KMK-Standards noch in den Bildungsplänen der Länder vorgesehen. Im Informatikbildungsplan in Sachsen gibt es einen Wahlbereich Quanteninformatik, in dem Quantengatter Inhalt sind. Klassische Gatter werden typischerweise im Informatikunterricht der Mittelstufe, spätestens Oberstufe unterrichtet. Es ist durchaus denkbar, dass Quantengatter in diesen Unterrichtsgängen als Ausblick für eine andere Art der Informationsverarbeitung behandelt werden. Hierbei könnte man beispielsweise auf die Reversibilität der Gatter deuten und damit begründen, dass man Quanteninformation nicht kopieren kann (nach dem sogenannten no-cloning theorem).

16 QUBIT

Kurzbeschreibung

Das QuBit ist der elementare Baustein der Quanteninformation, so wie das Bit der elementare Baustein der digitalen Informationsverarbeitung ist. Die Information eines QuBits kann dabei mithilfe unterschiedlicher physikalischer Systeme gespeichert werden. Zum Beispiel können zwei Energieniveaus von Ionen oder neutralen Atomen als QuBit verwendet werden, aber auch in künstlich hergestellten größeren Systemen, wie zum Beispiel supraleitenden Schaltkreisen oder sogenannten Quantenpunkten (quantum dots) können Strukturen mit zwei ausgezeichneten Energieniveaus gefunden werden, die als QuBit dienen können.

Mathematisch können die möglichen Zustände eines QuBits durch normierte Elemente eines zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raums $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ repräsentiert werden. Dabei bezeichnen wir zwei Basiszustände dieses Raums als $|0\rangle$ und als $|1\rangle$ in Anlehnung an die beiden Zustände 0 und 1 eines klassischen Bits. Wir legen willkürlich meistens folgende Notation fest:

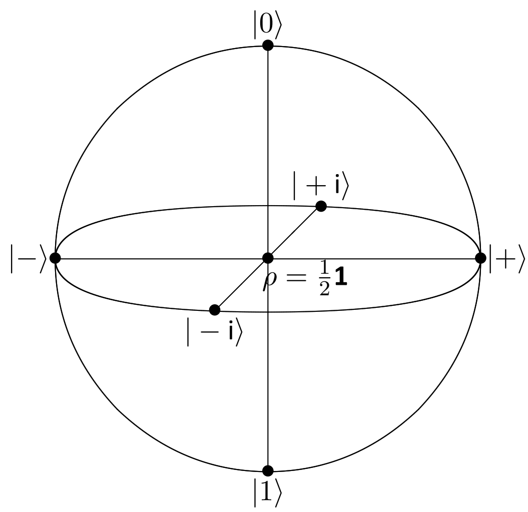
$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

QuBits können in beliebigen Überlagerungszuständen dieser Basis präpariert werden, im Allgemeinen kann ein QuBit also folgende Zustände einnehmen:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \qquad \alpha,\beta \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Alle Zustände eines einzelnen QuBits können durch eine sogenannte Bloch-Kugel, auch Poincaré-Bloch-Kugel[3], dargestellt werden (siehe Abbildung 2).

Abbildung 2: Die Bloch-Kugel für QuBits. Die Kugeloberfläche repräsentiert die reinen Zustände, das Kugelinnere die gemischten Zustände. Gegenüberliegende Punkte (Antipoden) entsprechen orthogonalen QuBit-Zuständen.



$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$
$$|+\mathrm{i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \mathrm{i}|1\rangle)$$
$$|-\mathrm{i}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - \mathrm{i}|1\rangle)$$

Betrachten wir mehr als ein QuBit, dann gibt es Zustände (die sogenannten verschränkten Zustände), die sich nicht durch zwei Bloch-Kugeln repräsentieren lassen. Mit Aristoteles und Einschub gesprochen gilt in der Quanteninformation für Mehr-QuBit-Systeme: „Das Ganze ist [potenziell] mehr als die Summe seiner Teile“.

[3] Poincaré verwendete diese Darstellung schon für die Polarisationszustände von klassischem Licht. Für einzelne Photonen codiert die Polarisation ebenfalls die Information von einem QuBit.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Der Begriff des QuBits ist weder in den KMK-Standards noch in den Bildungsplänen vorgesehen. Allerdings ist der Begriff in neueren didaktischen Zugängen zur Quantenphysik weit verbreitet und viele Schülerinnen und Schüler begegnen ihm in der populärwissenschaftlichen Literatur. Durch die Behandlung im Unterricht kann den Schülerinnen und Schülern dadurch eine fundierte Grundlage für eine weiterführende Beschäftigung ermöglicht werden, die der Mythisierung der Quantenmechanik und Quanteninformationsverarbeitung entgegenwirken kann. Die in der Literatur häufig verwendete Bloch-Kugel zur Repräsentation der Information eines QuBits eignet sich unserer Meinung nach allerdings weniger für den Schulgebrauch. Das liegt daran, dass Zustände, die im Hilbert-Raum orthogonal sind, als Antipoden auf der Bloch-Kugel repräsentiert werden. Falls man nun mit Hilfe der Born'schen Regel Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse berechnen möchte und hierzu ein Skalarprodukt verwendet, dann kann es zu Verwirrungen kommen, da die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ für die Schülerinnen und Schüler auf der Bloch-Kugel als Vektoren dargestellt werden, die kollinear sind und nicht orthogonal. Diese Schwierigkeit kann man umgehen, indem man lediglich Zustände betrachtet, die mit reellen Parametern α, β beschrieben werden können. Den Zustandsraum für diese Zustände können wir mit einem, in der Schule wohlbekannten, Einheitskreis identifizieren, wobei orthogonale Zustände im Hilbert-Raum auch im Einheitskreis orthogonal erscheinen.

17 REALITÄT

Kurzbeschreibung

In der Quantentheorie versteht man unter der Realitätsannahme meist die Annahme, dass sich einem gegebenen System zu jedem Zeitpunkt allen Observablen, die sich an diesem System im Prinzip messen lassen, wohl definierte Ergebnisse bzw. Messwerte zuschreiben lassen. Diese Ergebnisse sind im Allgemeinen nicht bekannt und lassen sich auch an einem einzelnen System nicht für alle Observablen bestimmen.

Der Begriff der Realität wurde aufgrund der KMK-Standards in Baden-Württemberg in den letzten Bildungsplan aufgenommen [2]. Dort heißt es unter 3.4.6 (Quantenphysik und Materie) Pkt. (7): „[Die Schülerinnen und Schüler können] erläutern, dass messbare Eigenschaften von Objekten der klassischen Physik bereits vor ihrer Messung real vorliegen und dass der Wert der Messung unabhängig davon ist, ob überhaupt gemessen wurde. Sie können beschreiben, dass diese Aussage für Quantenobjekte im Allgemeinen nicht gilt (Realität, zum Beispiel bei verschränkten Photonen)".

Der Begriff der Realität in der Quantenphysik im Zusammenhang mit verschränkten Photonen hat eine sehr spezielle Bedeutung, die in obigem Zitat angedeutet wird. Sie ist nicht in einem allgemeinen philosophischen Sinn zu verstehen, sondern, wie in der Kurzbeschreibung angedeutet, als die Annahme, dass Ergebnisse von Messungen schon unmittelbar vor dieser Messung in irgendeiner Form diesem System zugeschrieben werden konnte. Diese Messwerte ergeben sich aus bestimmten Parametern des Systems – dem genauen Ort, genauen Lageeigenschaften, eventuell auch genauen Eigenschaften sogenannter verborgener Parameter – und sie könnten von jemandem, der diese Parameter einsehen kann und die Zusammenhänge genau genug kennt, vorhergesagt werden. Das betrifft z.B. den Messwert zu einer bestimmten Polarisation (d.h. ob ein Photon durch einen bestimmten Polarisationsfilter tritt oder nicht), eines bestimmten Spins (d.h. ob bei einem Stern-Gerlach-Experiment ein Atom nach oben oder unten abgelenkt wird) oder ähnlicher Eigenschaften.

Die Annahmen, die beispielsweise in Bell'sche Ungleichungen eingehen, sind, dass diese Messwerte für ein einzelnes System schon bezüglich aller möglichen Messungen im Prinzip vorliegen, selbst wenn die Messung nicht durchgeführt wird. Es wird z.B. angenommen, dass bei einem Elektron das Ergebnis einer Messung des Spins bezüglich der x-, y- und z-Richtung (und jeder anderen Richtung) festliegt, auch wenn nur eine dieser Messungen tatsächlich durchgeführt und dieser Messwert bestimmt werden kann. Die Verletzung der Bell'schen Ungleichungen in der Quantentheorie wird als Beweis angesehen, dass die Realitätsannahme in ihrer hier vorgegebenen Form in der Quantheorie nicht gültig ist. Die Ergebnisse von Messungen entstehen im Allgemeinen erst im Augenblick der Messung und auch nur für die beobachtbare Größe, die gemessen wird. Manche Eigenschaften von Quantenobjekten gibt es nur, wenn man hinschaut.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Gemeinsam mit der Lokalität hat der Begriff der Realität mit den KMK-Bildungsstandards eine größere Bedeutung in den Bildungsplänen erhalten. Klassischerweise werden die Begriffe der Lokalität und Realität im Zusammenhang mit Bell'schen Ungleichungen eingeführt. Dabei hat sich vor allem die CHSH-Ungleichung als Standardungleichung etabliert. Somit halten auch verschränkte Zustände Einzug in den Unterricht, wobei die Thematik der Verschränkung nicht explizit in den KMK-Bildungsstandards aufgeführt ist. Die meisten Bildungspläne führen sie allerdings im Zusammenhang mit der Lokalität und Realität auf.

18 REDUKTIONSPOSTULAT (KOLLAPSPOSTULAT)

Kurzbeschreibung

Das Reduktionspostulat in der Quantenmechanik besagt, dass der Zustand eines Systems nach einer Messung einer Observablen $\mathcal{A}$, bei der ein Ergebnis a gemessen wurde, durch den Eigenraum (Eigenvektor) des selbst-adjungierten Operators A zu der Observablen $\mathcal{A}$ zum Eigenwert a beschrieben wird.

Anmerkungen

1. Ist der Eigenwert a des Operators A nicht entartet, ist der zugehörige Eigenraum eindimensional und beschreibt somit eindeutig einen reinen Zustand. Ist der Eigenwert von a jedoch entartet, d.h., der zugehörige Eigenraum ist mehrdimensional, so muss der Zustand $|\psi\rangle$, durch den das System vor der Messung beschrieben wurde, auf den Eigenraum projiziert werden. Sei P_a der Projektionsoperator auf den (mehrdimensionalen) Eigenraum zum Eigenwert a, so ist $|\psi_a\rangle = P_a|\psi\rangle/|P_a|\psi\rangle|$ der Zustand des Systems nach der Messung. Dies bezeichnet man auch als von Neumann-Lüders'sches Projektionspostulat. Ist der Eigenraum zum Eigenwert a eindimensional, sind die beiden Definitionen äquivalent.

2. Insbesondere in der älteren Literatur spricht man auch manchmal vom „Kollapspostulat“. Diese Bezeichnung kommt daher, dass bei einer Ortsmessung eines Quantenobjekts die möglicherweise über ein größeres Gebiet ausgedehnte Wellenfunktion durch die Registrierung des Quantenobjekts in einem kleinen Volumen auf dieses Volumen „kollabiert“. Ein solcher Kollaps der Wellenfunktion lässt sich nicht durch eine unitäre Zeitentwicklung und damit durch die Schrödinger-Gleichung beschreiben.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Das Reduktionspostulat wird lediglich implizit im Zusammenhang mit der stochastischen Vorhersagbarkeit und der Messung in der Schule thematisiert. Es wird allerdings nicht explizit so benannt. Am Beispiel von Photonen kann die Aussage des Reduktionspostulats anhand von Messungen deutlich gemacht werden. Der Polarisationszustand eines Photons wird mit Durchtritt durch einen Polfilter im Allgemeinen verändert (die Messung ist invasiv) und die Einstellung des Polarisationsfilter, die sogenannte Messbasis, bestimmt, welche möglichen Zustände nach der Messung vorliegen können (die Messung ist projektiv).

19 SUPERPOSITION

Kurzbeschreibung

Sind in der Physik zwei Größen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ gegeben, die Elemente eines Vektorraums sind, so versteht man unter der Superposition dieser Größen eine vektorielle Summe (eventuell mit beliebigen Koeffizienten) $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ zu einer ebenfalls physikalischen Gesamtgröße $\boldsymbol{z}$.

Anmerkungen

1. Der Begriff der Superposition spielt in vielen Bereichen der Physik eine Rolle. In der Mechanik können beispielsweise Geschwindigkeiten superponiert werden: Wenn sich z.B. ein Kran horizontal bewegt und gleichzeitig einen Gegenstand vertikal hochhebt, bewegt sich der Gegenstand mit einer Superposition aus der horizontalen und der vertikalen Bewegung. Auch bei Kräften spricht man von Superposition: Man sagt z.B., dass zwei gleichzeitig an einem Gegenstand angreifende Kräfte dieselbe Wirkung haben wie eine resultierende Kraft, die durch die vektorielle Summe der beiden angreifenden Kräfte gegeben ist. Im Zusammenhang von Wellen und Schwingungen, seien es Wasserwellen, Luftschwingungen oder elektromagnetische Wellen, sind Superpositionen ebenfalls vertraut.

2. Allgemein müssen sich Größen addieren lassen (meist mit beliebigen Koeffizienten), sodass man von Superposition sprechen kann. Das bedeutet, diese Größen sind mathematisch Elemente eines Vektorraums. Dann ist unter der Superposition von zwei Größen einfach ihre vektorielle Summe gemeint. Geschwindigkeiten und Kräfte stellt man anschaulich oft durch „Pfeile“ dar; hier handelt es sich um Vektoren in einem dreidimensionalen Raum, den man häufig mit unserem Ortsraum identifiziert (streng genommen handelt es sich um Tangentialräume, z.B. Räume von Geschwindigkeiten). Bei Wellen und Schwingungen ist der Vektorraum ein Funktionenraum, bei dem das Bild von „Pfeilen“ nicht mehr angebracht ist.

3. Jeder Vektor lässt sich auf unendlich viele verschiedene Weisen als Summe von zwei anderen Vektoren darstellen. Erst wenn man bestimmte Richtungen (oder eine Basis) auszeichnet, wird die Zerlegung eines Vektors nach diesen Richtungen bzw. nach dieser Basis eindeutig. Daher ist es auch sinnlos, ohne Angabe dieser Richtungen bzw. dieser Basis von Superpositionszuständen (im Gegensatz zu Zuständen, die keine Superpositionszustände sein sollen) zu sprechen.

   Oft ist implizit eine bestimmte Basis gemeint, wenn von Superpositionszuständen gesprochen wird. Beispielsweise kann sich diese Basis auf klassisch wohldefiniert Eigenschaften beziehen: Der Zustand der Schrödinger-Katze („$|\text{tot}\rangle + |\text{lebendig}\rangle$“) wird oft als Superpositionszustand bezeichnet, weil „tot“ und „lebendig“ klassisch wohl definierte Eigenschaften darstellen. In der Quanteninformatik bezeichnet man einen Zustand gelegentlich als Superpositionszustand, wenn er eine Superposition der Basisvektoren $|0\rangle$ und $|1\rangle$ ist, da diese Basis in der Informatik ausgezeichnet ist.

4. Superpositionen spielen in der Physik immer dann eine besondere Rolle, wenn Gleichungen (z.B. die Bewegungsgleichungen zu mechanischen Schwingungen, die Maxwell-Gleichungen im Vakuum oder die Schrödinger-Gleichung) linear sind. In diesem Fall sind zu je zwei Lösungen dieser Gleichungen auch beliebige Superpositionen wieder eine Lösung. In der Quantentheorie bedeutet das Superpositionsprinzip, dass es zu zwei reinen Zuständen eine unendliche Anzahl von ebenfalls reinen Zuständen gibt, die sich als Superposition dieser beiden Zustände darstellen lassen. Ein typisches Beispiel ist die Polarisation von Photonen: Jeder reine Polarisationszustand eines Photons lässt sich als Superposition von einer horizontalen und einer vertikalen Polarisation (oder auch einer plus/minus-diagonalen oder auch einer links- oder rechtsdrehenden Polarisation) darstellen.

5. Bei der Superposition von Quantenzuständen ist etwas Vorsicht geboten: (Reine) Quantenzustände werden durch Strahlen, d.h. eindimensionale Unterräume in einem Hilbert-Raum, dargestellt. Ein (normierter) Vektor eines solchen Unterraums dient gewöhntlich als Repräsentant eines solchen Vektorraums, der allerdings nur bis auf eine komplexe Phase eindeutig ist. Das bedeutet, dass

Quantenzustände selbst keinen Vektorraum bilden und auch nicht addiert werden können. Die Superposition von Quantenzuständen erhält man durch die normierte Linearkombination von vektoriellen Repräsentanten dieser Zustände. Man beachte aber, dass das Negative eines Zustandsvektors denselben Zustand beschreibt. Es gibt also bei der Superposition von Quantenzuständen keine „inversen“ Zustände, die sich gegenseitig aufheben können.

6. Die Möglichkeit der Superposition von Quantenzuständen ist auch die Voraussetzung für die Möglichkeit, Interferenzen beobachten zu können und damit ein Wesenszug der Quantenmechanik.

Sprechweise

Gelegentlich taucht das Problem auf, wie man von Superpositionen sprechen soll, insbesondere wenn es sich um physikalisch vermutlich nicht realisierbare Superpositionszustände von klassisch realisierbaren Zuständen handelt. Das Standardbeispiel ist „Schrödingers Katze“. Man hört oder liest hier Sätze wie „Die Katze ist sowohl tot als auch lebendig“ oder „Die Katze ist entweder tot oder lebendig“. Beide Aussagen klingen eigenartig, wenn man sie auf bekannte Superpositionen anwendet, beispielsweise die Polarisation eines Photons: „Ein diagonaler Polarisationzustand ist sowohl horizontal als auch vertikal polarisiert“ oder „Ein diagonaler Polarisationszustand ist entweder horizontal oder vertikal polarisiert“. Eine bessere Sprechweise wäre: „Ein diagonaler Polarisationszustand besitzt eine horizontale und eine vertikale Komponente“, doch in diese Fall kommt der mathematische Term „Komponente“ ins Spiel. Die Aussage „Schrödingers Katze ist weder tot noch lebendig“ ist zwar korrekt, sagt aber nur, was die Katze nicht ist.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Die Superposition wird nicht explizit als Begriff in den KMK-Standards erwähnt. Sie wird allerdings in den Bildungsplänen implizit oder explizit thematisiert. So werden bereits in der Sekundarstufe I Kräfte superponiert. In der Sekundarstufe II wird das Superpositionsprinzip auf elektrische und magnetische Felder angewandt. Dadurch kann das Superpositionsprinzip der Quantenmechanik auf Vorwissen aus dem Unterricht aufbauen. Wir empfehlen dabei, die Gemeinsamkeiten zu anderen Größen der Physik zu betonen. Darüber hinaus gibt es, wie oben bereits beschrieben, keinen Superpositionszustand per se (eine in der populärwissenschaftlichen Literatur weit verbreitete Fehlvorstellung), sondern ein Zustand kann lediglich bezüglich einer gewählten Basis in Superposition sein.

20 UNBESTIMMHEITSRELATIONEN BZW. UNSCHÄRFERELATIONEN

Kurzbeschreibung

Eine Unbestimmtheitsrelation bzw. Unschärferelation ist eine Beziehung zwischen den Varianzen von zwei oder mehr Observablen, die zum Ausdruck bringt, dass es keinen Zustand gibt, für den alle Varianzen gleichzeitig beliebig klein werden können. Dabei kann sich diese Unbestimmtheit sowohl auf die Unmöglichkeit der Präparationen eines solchen Zustands als auch auf die Unmöglichkeit von beliebig genauen Vorhersagen von Messergebnissen an einem solchen Zustand beziehen.

Anmerkungen

1. Für zwei beliebige selbstadjungierte Operatoren A und B und einen beliebigen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ lässt sich beweisen, dass

$$(\Delta A)^2 \cdot (\Delta B)^2 \geq \left| \frac{1}{2} \langle \psi | [A,B] | \psi \rangle \right|^2 , \tag{5}$$

   wobei $(\Delta A)^2 = \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle$ mit $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ (und entsprechend für B) ist. Aus den kanonischen Vertauschungsrelationen für Ort und Impuls, $[Q,P] = -\mathrm{i}\hbar\,\mathbf{1}$, folgen sofort die Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelationen $\Delta Q \cdot \Delta P \geq \frac{1}{2}\hbar$. Hierbei handelt es sich um eine multiplikative Unbestimmtheitsrelation.

2. Die Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelationen lassen sich auch aus einer allgemeinen Eigenschaft der Fourier-Transformation ableiten. Seien $\psi(x)$ eine quadratnormierte Wellenfunktion und $\tilde{\psi}(k)$ die Fourier-Transformierte, dann gilt für die Größen

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^* (x - \langle x \rangle)^2 \psi(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad (\Delta k)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k)^* (k - \langle k \rangle)^2 \tilde{\psi}(k)\, \mathrm{d}k \tag{6}$$

   die Beziehung

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \,. \tag{7}$$

   Mit der Gleichung von deBroglie, $p = \hbar k$, folgt die Heisenberg'sche Ungleichung.

   Mit demselben Argument kann man für eine zeitliche Signalfunktion $\psi(t)$ und ihre Fourier-Transformierte $\tilde{\psi}(\omega)$ die Ungleichung

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \tag{8}$$

   ableiten, aus der dann mit der Beziehung von deBroglie, $E = \hbar\omega$, die Unbestimmtheitsrelation $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ folgt. Da es in der (Standardformulierung der) Quantentheorie keinen Zeitoperator gibt, folgt diese Unbestimmtheitsrelation nicht aus der Nicht-Kommutativität von Operatoren.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Die Unbestimmtheitsrelation für Ort und Impuls ist in den KMK-Standards für das erhöhte Anforderungsniveau vorgesehen. Häufig stehen dabei qualitative Aussagen im Vordergrund, zum Beispiel um Erklärungen von Phänomenen am Doppelspalt vorzunehmen.

21 VERSCHRÄNKUNG

Kurzbeschreibung

In der Quantentheorie heißt ein reiner Zustand, der sich auf die Erwartungswerte unabhängiger Freiheitsgrade bezieht – z.B. die Freiheitsgrade zu verschiedenen Teilsystemen –, verschränkt, wenn eine Messung an einem der Freiheitsgrade mit bekanntem Messergebnis die Erwartungswerte der anderen Freiheitsgrade ändert oder sogar festlegt.

Mathematische Definition

Gegeben seien zwei Vektorräume V und W sowie das Tensorprodukt $V \otimes W$ dieser beiden Vektorräume. Ein Element $x \in V \otimes W$ heißt *separierbar*, wenn es Elemente $v \in V$ und $w \in W$ gibt, sodass $x = v \otimes w$. Gibt es solche Elemente nicht, heißt x *verschränkt*.

Anmerkungen

1. Wichtig ist, dass ein Vektorraum als Tensorprodukt von zwei anderen Vektorräumen dargestellt wird. Physikalisch bedeutet dies, dass ein Gesamtsystem in zwei Teilsysteme partitioniert wurde. Ohne eine solche Partition ist der Begriff der Verschränkung nicht definiert. Ein Vektor beispielsweise in einem vierdimensionalen Vektorraum ist nicht *per se* verschränkt oder separabel.

2. Die Separation eines separierbaren Vektors ist nicht eindeutig. Wählt man $v' = \alpha v$ und $w' = (1/\alpha)w$ ist $v' \otimes w' = v \otimes w$. Die Darstellung eines Vektors als Tensorprodukt von zwei Vektoren ist nur bis auf einen Faktor festgelegt. Daher verlangt man in der Quantentheorie bei separierbaren Zuständen meist, dass die beiden Anteile – v und w in obigem Beispiel – getrennt quadratnormiert sind.

   Falls ein Vektor x im Gesamtvektorraum separierbar ist, ist auch λx separierbar für beliebige $\lambda \neq 0$. Das bedeutet, dass Separierbarkeit eine Eigenschaft von Strahlen (eindimensionalen Unterräumen) ist. Die Separation eines Strahls in das Tensorprodukt von zwei Strahlen ist eindeutig. Daher sind Separierbarkeit und Verschränkung sinnvolle Begriffe für quantentheoretische Zustände. Insbesondere hängt der Begriff der Separierbarkeit bzw. der Verschränkung auch nicht von der Wahl einer Basis in V und W ab.

3. Ist ein Zustand bezüglich zweier unabhängiger Freiheitsgrade verschränkt, so sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Messwerte zu diesen Freiheitsgraden nicht unabhängig, d.h. sie faktorisieren nicht. Es gibt also bedingte Wahrscheinlichkeiten bzw. Korrelationen zwischen den Messergebnissen des einen und den Messergebnissen des anderen Freiheitsgrads.

4. Der Begriff der Verschränktheit lässt sich auch auf gemischte Zustände erweitern: Eine Dichtematrix ρ_{ges} zu Zuständen im Vektorraum $V \otimes W$ heißt verschränkt, wenn sie sich nicht in der Form

   $$\rho_{\text{ges}} = \sum_i w_i \, \rho_i^V \otimes \rho_i^W \tag{9}$$

   schreiben lässt, wobei ρ_i^V und ρ_i^W Dichtematrizen zu Zuständen in V bzw. W sind.

5. Korrelationen zwischen Freiheitsgraden von Systemen, die möglicherweise sehr weit von einander entfernt sind, sind in der klassischen Physik nichts ungewöhnliches. Beispielsweise ist der nahezu gleichzeitige Empfang einer Radiosendung an verschiedenen Orten eine klassische Korrelation: Der Hörer an einem Ort weiß instantan, dass der Hörer an einem anderen Ort dasselbe hört wie er: Die Meldungen an einem Ort x sind total korreliert mit den Meldungen an einem Ort y. Ein Wesenszug der Quantentheorie sind nicht solche Korrelationen, sondern die Tatsache, dass Quantenkorrelationen die Bell'schen Ungleichungen (oder ähnliche Ungleichungen, wie die CHSH-Ungleichung) verletzen können.

Beispiele

1. Eine Funktion $f(x,y)$ von zwei Variablen x und y heißt separierbar (bezüglich x und y), wenn sie sich als Produkt von zwei Funktionen schreiben lässt: $f(x,y) = g(x)h(y)$. Beispielsweise sind die Funktionen $f(x,y) = x^3y^4$ oder $f(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ oder $f(x,y) = \cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y$ separierbar, die Funktionen $f(x,y) = x^2 - y^2$ und $f(x,y) = x + y$ sind jedoch verschränkt.

2. Bei Zwei-Zustandsystemen tritt oft das Beispiel $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ auf. In diesem Fall ist ein Vektor $x = (a,b,c,d)$ genau dann separierbar, wenn $ad = bc$ gilt. Andernfalls ist der Vektor verschränkt. Beispiele für verschränkte Vektoren sind die Bell-Zustände:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_1|1\rangle_2 + |1\rangle_1|0\rangle_2\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Den Zustand $|\Psi^-\rangle$ bezeichnet man auch als EPR-Zustand. Er zeigt bezüglich jeder Basis eine totale Antikorrelation.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Zwar wird der Begriff der Verschränkung nicht explizit in den KMK-Standards aufgegriffen, allerdings benötigt man das Konzept für die Vermittlung der Bedeutung der Begriffe wie Realität und Lokalität in Bezug auf die Quantenphysik. Die Verschränkung ist damit sowohl im grundlegenden als auch im erhöhten Anforderungsniveau verortet. Im erhöhten Anforderungsniveau ist zusätzlich die Koinzidenzmethode zum Nachweis einzelner Photonen verpflichtender Inhalt. Manche Bildungspläne vermeiden den Begriff, wie beispielsweise der Lehrplan in Bayern, andere, zum Beispiel in Baden-Württemberg, schlagen lediglich verschränkte Photonen zur Behandlung der Begriffe Realität und Lokalität vor. Da in der Schulmathematik keine Tensorräume behandelt werden, ist die Verschränkung ein besonders schwieriger Unterrichtsgegenstand. Hinzu kommt, dass zur Verschränkung besonders viele falsche oder irreführende Erklärungen in populären Darstellungen, sei es in Videos oder Texten, zu finden sind.

22 ZUSTAND

Kurzbeschreibung

Der Zustand eines Systems beschreibt unser Wissen über dieses System, soweit wir es für Vorhersagen über den Ausgang von Messungen an diesem System nutzen können. Mathematisch handelt es sich um ein sogenanntes „Erwartungswertfunktional", das jeder Observablen (beobachtbaren Größe) eine Zahl – ihren Erwartungswert (in diesem Zustand) – zuordnet. Physikalisch handelt es sich um eine Vorschrift, an einem Ensemble von gleichartig präparierten Systemen Messungen von Observablen vornehmen und deren Mittelwerte bestimmen zu können. Schrödinger bezeichnet einen Zustand als „Katalog der Erwartung" [11].

Mathematischer Zustandsbegriff

Mathematisch wird ein Zustand repräsentiert durch die Angabe einer Abbildung, die jeder Observablen eine Zahl – ihren Erwartungswert in diesem Zustand – zuordnet. Für diese Abbildung soll gelten:

1. Die Identitätsobservable, die immer nur den Messwert 1 als Ergebnis liefert, soll den Erwartungswert 1 haben.
2. Eine nicht-negative Observable, die immer nur nicht-negative Ergebnisse als Messwerte liefert, soll auch einen nicht-negativen Erwartungswert haben.
3. Das λ-fache einer Observablen $\mathcal{R}$, die immer das λ-fache eines Messwerts von einer Messung von $\mathcal{R}$ liefert, soll auch das λ-fache des Erwartungswerts von $\mathcal{R}$ haben.

Weitere Eigenschaften hängen davon ab, welche Strukturen auf der Menge der Observablen definiert sind. Handelt es sich bei der Menge der Observablen um einen Vektorraum, wie beispielsweise in der klassischen Mechanik oder der Quantentheorie (d.h., zumindest mathematisch ist die Summe von zwei Observablen definiert), verlangt man von dem Erwartungswertfunktional meist, dass es linear ist. Technisch gesprochen handelt es sich in diesem Fall bei einem Zustand um ein positives, normiertes Element des Dualraums zu dem Vektorraum der Observablen.

Physikalischer Zustandsbegriff

Physikalisch wird ein Zustand repräsentiert durch ein (im Prinzip beliebig großes) Ensemble gleichartig präparierter Systeme. Unser Wissen bezieht sich auf die Art, wie diese Systeme präpariert wurden. Ein solches Ensemble ordnet in folgendem Sinne jeder Observablen ihren Erwartungswert zu: Man betrachte ein ausreichend großes, repräsentatives Teilensemble und führe an diesem Teilensemble Messungen der Observablen durch; anschließend bestimme man den Mittelwert der Messergebnisse. Mit diesem Verfahren kann man auch die Erwartungswerte von nicht kompatiblen (z.B. komplementären) Observablen in diesem Zustand bestimmen: Man teile das Gesamtensemble des Zustands in repräsentative große Teilensembles auf und bestimmte an jedem Teilensemble den Erwartungswert einer Observablen. Theoretisch kann man so allen Observablen ihre Erwartungswerte in diesem Zustand zuordnen.

Reine und gemischte Zustände

Ein reiner Zustand beschreibt ein maximales Wissen, das man über ein System haben kann. Physikalisch bedeutet dies, dass man das Ensemble, das den Zustand repräsentiert, nicht mehr durch eine Verfeinerung der Präparation in (ausreichend große) Teilensembles aufteilen kann, bei denen die Erwartungswerte von Observablen andere sind als bei dem Gesamtensemble und die Messwerte weniger schwanken. Man kann das Ensemble also nicht mehr in Subensembles aufteilen, in denen die Varianzen der Observablen kleiner sind.

Mathematisch bedeutet die Unmöglichkeit, den Zustand weiter verfeinern zu können, dass sich ein reiner Zustand nicht als Kombination (in den Fällen, wo die Zustände ein lineares Funktional bilden, als

Linearkombination) anderer Zustände darstellen lässt. In diesem Sinne bilden reine Zustände Randpunkte der konvexen Menge aller Zustände.

Beispiele

1. In der klassischen Mechanik repräsentieren die Punkte (q,p) im Phasenraum P die reinen Zustände. Eine Observable ist eine Funktion $f : P \to \mathbb{R}$, und jeder Punkt (q_0,p_0) im Phasenraum ordnet der Funktion f eine Zahl, ihren Funktionswert $f(q_0,p_0)$ an der Stelle (q_0,p_0), zu. Dieser Funktionswert ist gleichzeitig der Erwartungswert von f, den man bei einer Messung von f an einem System im Zustand (q_0,p_0) erwartet.

   Gemischte Zustände sind Wahrscheinlichkeitsdichten ω auf dem Phasenraum. Sie ordnen jeder Funktion f ihren Erwartungswert

   $$\langle f \rangle_\omega = \int \mathrm{d}q \, \mathrm{d}p \, \omega(q,p) f(q,p) \tag{10}$$

   zu. Den Spezialfall eines reinen Zustands erhält man, wenn man für ω eine Delta-Funktion im Phasenraum, $\omega(q,p) = \delta(q - q_0)\delta(p - p_0)$, wählt.

2. In der Quantentheorie entsprechen reine Zustände den Strahlen – eindimensionale Untervektorräume – eines Hilbert-Raums (also eines Vektorraums mit einem Skalarprodukt). Meist repräsentieren wir diese Strahlen durch einen normierten Vektor $|\psi\rangle$ in diesem Unterraum und die Abbildung, die einer Observablen A – einer hermiteschen Matrix (bzw. einem selbst-adjungierten Operator) – ihren Erwartungswert zuordnet, ist:

   $$A \longrightarrow \langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle \, . \tag{11}$$

   Sehr oft wird dieser Vektor durch eine Wellenfunktion im Ortsraum, $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, dargestellt und dann wird aus dieser Formel:

   $$\langle A \rangle_\psi = \int \psi(x)^* A \psi(x) \, \mathrm{d}x \, . \tag{12}$$

   Man kann einen eindimensionalen Unterraum aber auch durch seinen Projektionsoperator P_ψ darstellen, der jeden beliebigen Vektor orthogonal auf diesen Unterraum projiziert. In diesem Fall entspricht dem Zustand, der jeder Observablen A ihren Erwartungswert zuordnet, die Abbildung:

   $$A \longrightarrow \langle A \rangle_\psi = \mathrm{Spur}\, P_\psi A \, . \tag{13}$$

   Gemischte Zustände werden in der Quantentheorie durch Dichtematrizen ρ dargestellt. Eine Dichtematrix ist dabei eine Verallgemeinerung einer Projektionsmatrix bzw. eines Projektionsoperators. Während eindimensionale Projektionsoperatoren die Eigenschaften $P^2 = P$, $P^\dagger = P$ und Spur $P = 1$ haben, haben Dichtematrizen die Eigenschaften: $\rho^2 \leq \rho$, $\rho^\dagger = \rho$ und Spur $\rho = 1$. Die Bedingung $\rho^2 \leq \rho$ bedeutet, dass die Eigenwerte von ρ (die alle reell sind), diese Bedingung erfüllen müssen und daher zwischen 0 und 1 liegen und somit die Interpretation einer Wahrscheinlichkeit haben. Technisch bedeutet diese Bedingung, dass für jeden Vektor $|\psi\rangle$ gelten muss: $\langle\psi|\rho^2|\psi\rangle \leq \langle\psi|\rho|\psi\rangle$.

Anmerkung

Gelegentlich wollen wir auch einem Einzelsystem einen Zustand zuschreiben. An diesem Punkt unterscheiden sich verschiedene Interpretationen, insbesondere die sogenannten Ensembleinterpretationen der Quantentheorie, von der Kopenhagener Deutung. Während Ensembleinterpretationen den Begriff der Wahrscheinlichkeit vermeiden und nur von relativen Häufigkeiten sprechen – die Born'sche Regel besagt dann, dass das Absolutquadrat eines Skalarprodukts gleich der relativen Häufigkeit ist, mit der bei einer Messung einer Observablen an einem Ensemble gleichartig präparierter Zustände ein bestimmtes Resultat erzielt wird – verwendet die Kopenhagener Interpretation den Zustandsbegriff auch für Einzelsysteme und spricht statt von relativer Häufigkeit von Wahrscheinlichkeit. Es gibt aber auch Situationen, bei denen der Unterschied relevant wird: Beispielsweise gilt das sogenannte No-Cloning Theorem, wonach ein unbekannter

Zustand nicht dupliziert werden kann, nicht für Ensemblezustände. An einem Ensemble kann der Zustand bestimmt und dann beliebig oft kopiert werden. Diese Aussage gilt jedoch nicht für den Zustand, den wir einem einzelnen System zuschreiben.

Didaktische Überlegungen und Relevanz in der Schule

Der Zustandsbegriff wird in der Schule vornehmlich implizit verwendet. Selten wird explizit thematisiert, wodurch beispielsweise ein Bewegungszustand genau festgelegt wird. Auch werden in der Schule keine Betrachtungen des Phasenraums vorgenommen. Dadurch ist es in der Quantenphysik der Schule schwierig, reine Zustände von gemischten Zuständen zu unterscheiden. Insbesondere, wenn die Konzepte der reinen und gemischten Zustände gemeinsam mit der Unterscheidung von separablen und verschränkten Zuständen notwendig sind, haben auch Studentinnen und Studenten Schwierigkeiten, die Konzepte zu unterscheiden und zu erklären.

Index

Aspect, Alain, 4

Bell'sche Ungleichungen, 4, 28
Bell, John, 18
Bit, 23
Bloch-Kugel, 24, 26
Bohm'sche Mechanik, 16
Bohr, Niels, 13, 14
Born'sche Regel, 6, 9, 36

CHSH-Ungleichung, 4
Clauser, John, 4
CNOT-Gatter, 24

deBroglie-Beziehungen, 13
Dekohärenz, 12
d'Espagnat, Ungleichung von, 4
Determinismus, 7
Deterministisches Chaos, 7
Dichtematrix, 33, 36
Doppelspalt, 12

Einstein, Albert, 10
Ensembleinterpretation, 7, 9
EPR, 10
EPR-Zustand, 10, 16
Erwartungswert, 6
Erwartungswertfunktional, 35

Fourier-Transformation, 32

Gatter, Bool'sche, 23
Greenberger-Englert-Ungleichung, 14
Grover-Algorithmus, 23

Hadamard-Gatter, 24
Hadamard-Transformation, 22

Interferenz, 12

Kausalität, 11
    starke und schwache, 7
KMK-Bildungsstandards, 2
Kohärenz, 12
Kollapspostulat, 29
Komplementarität, 13
    logische, 14
Kopenhagener Deutung, 6, 9, 16, 36

Lokalität, 16

Mach-Zehnder-Interferometer, 12, 14
Malus, Gesetz von, 6
Messproblem, 9, 12
Messung, 18
    als Präparation, 18
    bei Polarisationszuständen, 18
    in der klassischen Physik, 18
    Nachweis, 18
Mikrokausalität, 11

Nicht-Lokalität, 5
No-Cloning Theorem, 36
„No-conspiracy"-Annahme, 5
„no-free will"-Annahme, 5

Observable, 20
    Erwartungswert, 6
    komplementäre, 13

Pauli-X-Gatter, 24
Penny-Flip-Spiel, 22
Phase, 12
Podolsky, Boris, 10
Polarisation, 6, 14, 18
Präparation, 18
Prokrustie, 19

Quanten-Bayesianismus, 16
Quantenalgorithmus, 24
Quantengatter, 24
Quantenradierer, 12
QuBit, 23, 26

Realität, 28
Realitätsannahme, 4
Reduktionspostulat, 7, 16, 29
Rosen, Nathan, 10

Schmetterlingseffekt, 7
Schrödingers Katze, 30
Schrödinger, Erwin, 19
separierbar, 33
Shor-Algorithmus, 23
Spektralzerlegung, 6
Stochastische Vorhersagbarkeit, 6
Strahl, 30, 33
Superdeterminismus, 5
Superposition, 30
    Sprechweise, 31

Tensorprodukt, 33

Unbestimmtheitsrelation, 14, 32

Verschränkung, 33
Beispiele, 34
Vertauschungsrelationen, kanonische, 13
von Neumann, John, 20
von Neumann-Lüders'sches Projektionspostulat, 29
Vorhersagbarkeit, 7

Welcher-Weg-Information, 12, 14
Welle-Teilchen-Komplementarität, 14
Wesenszüge der Quantenphysik, 6, 12, 14, 31

Zureichender Grund, Prinzip vom, 11
Zustand, 35
als Strahl, 30
gemischter, 35
klassische Mechanik, 36

Literatur

[1] Bell, J.; *Against ‚Measurement‘*; in *62 Years of Uncertainty*, Erice, 5–14 August 1989; auch in *Physics World* 8 (1990) 33–40.

[2] *Bildungsplan des Gymnasiums 2016 – Physik – Baden-Württemberg – überarbeitete Fassung vom 25. März 2022*; https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GYM_PH.V2(2022-03-25).pdf

[3] Bohr, Niels; *The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory*; Nature (Suppl.), 121 (1928), 580–590.

[4] Englert, B.G.; *Fringe visibility and which-way information: An inequality*; Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 2154–2157.

[5] Einstein, A., Podolski, B., Rosen, N.; *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*; Phys. Rev. 47 (1935) 777–780.

[6] Greenberger, D.; Yasin, A.; *Simultaneous wave and particle knowledge in a neutron interferometer*; Phys. Lett. A 128 (1988) 391–394.

[7] Bildungsstandards im Fach Physik für die allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.06.2020). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2020/2020_06_18-BildungsstandardsAHR_Physik.pdf

[8] Leibniz, G.W.; *Monadologie*, § 31. Projekt Gutenberg-De, https://www.projekt-gutenberg.org/leibniz/monaden/monaden.html

[9] von Neumann, John; *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer Berlin, Heidelberg, 1935.

[10] Meyer, David A. (1999); *Quantum Strategies*; Phys. Rev. Lett. 82, 1052–1055.

[11] Schrödinger, Erwin; *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*; Die Naturwissenschaften (1935) Heft 48, 808–812; Heft 49, 823–828; Heft 50, 844–849.

[12] Schrödinger, E.; *Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen*; Die Naturwissenschaften 31 (1934) 518–520.